刘桂林　主编

分析力学范例与习题

北京理工大学出版社

前　言

为了配合理工科大学生和研究生分析力学课程的教学需要，我们编写了这本《分析力学范例与习题》。本书各章与梅凤翔、刘桂林编著的《分析力学基础》(西安交通大学出版社，1987年)相一致。每章都分成基本理论与公式，范例和习题等三部分。通过"基本理论与公式"可以回忆和掌握分析力学的主要内容，通过"范例"可以了解分析力学解题的思路、方法和技巧，通过"习题"的演算可以加强和提高独立解题的能力。本书收入153个范例和600个习题。

本书由北京工业学院分析力学教研室刘桂林(第二、四、六、八章)、袁士杰(第三、四章)、吕哲勤(第一、二章)、梅凤翔(第五、七、九章)编写。全书由刘桂林统一修改定稿，刘伯勋副教授审阅。

限于编者水平，书中难免有疏漏之处，希望广大读者批评指正。

编者

1987年8月

目　录

第一章　分析力学的基本概念

一、基本理论与公式

1.约束、约束的分类

（1）约束——加在系统质点几何位置和运动速度上的限制条件。

用数学方法描述约束特性的表达式称为约束方程。

（2）约束的分类

1°单面约束与双面约束

单面约束(非固执约束)——用不等号表示的约束方程。

双面约束(固执约束)——用等号表示的约束方程。

2°完整约束与非完整约束

完整约束——约束方程中含有质点的坐标(x_i, y_i, z_i)和时间t，如$f(x_i, y_i, z_i, t)=0$。

非完整约束——约束方程中除含有质点的坐标x_i，y_i，z_i和时间t外，还含有坐标对时间t的导数$\dot{x}_i$、$\dot{y}_i$、$\dot{z}_i$，如$f(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t)=0$。

半完整约束——约束方程在形式上与非完整约束相同，但通过积分可以变成完整约束的形式。如

$$A(x, y, z)\dot{x}+B(x, y, z)\dot{y}+C(x, y, z)\dot{z}=0 \tag{1-1}$$

可积的充分必要条件是

$$A\left(\frac{\partial B}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial y}\right)+B\left(\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial z}\right)+C\left(\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}\right)=0 \tag{1-2}$$

充分条件是

$$\frac{\partial B}{\partial z}=\frac{\partial C}{\partial y},\ \frac{\partial C}{\partial x}=\frac{\partial A}{\partial z},\ \frac{\partial A}{\partial y}=\frac{\partial B}{\partial x} \tag{1-3}$$

3°定常约束与非定常约束

定常约束(稳定约束)——约束方程中不显含时间t。

非定常约束(不稳定约束)——约束方程中显含时间t。

4°非完整约束中有一阶和高阶之分。

2.广义坐标

(1) 广义坐标——确定质点系统位置的独立变量。通常以q_1，…，q_n表示。质点的直角坐标x_i，y_i，z_i可表示为

$$x_i=x_i(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n,\ t)$$

$$y_i=y_i(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n,\ t)$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N) \tag{1-4}$$

$$z_i=z_i(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n,\ t)$$

(2) 广义速度——广义坐标对时间t的导数$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，…，$\dot{q}_n$。

$\boldsymbol{r}_i$——质点M_i的矢径

$\boldsymbol{V}_i$——质点M_i的速度

$$\boldsymbol{V}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

或
$$\begin{cases} \dot{x}_i = \sum\limits_{s=1}^{n} \dfrac{\partial x_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \dfrac{\partial x_i}{\partial t} \\ \dot{y}_i = \sum\limits_{s=1}^{n} \dfrac{\partial y_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \dfrac{\partial y_i}{\partial t} \\ \dot{z}_i = \sum\limits_{s=1}^{n} \dfrac{\partial z_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \dfrac{\partial z_i}{\partial t} \end{cases} \tag{1-5}$$

(3) 广义加速度——广义坐标对时间t的 二 次 导数 $\ddot{q}_1$，$\ddot{q}_2$，$\cdots \ddot{q}_n$。

质点的加速度

$$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{V}_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\ddot{q}_s + \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k \partial q_s}$$

$$\dot{q}_k \dot{q}_s + 2\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s \partial t}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t^2}$$

或

$$a_x = \ddot{x}_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_s}\ddot{q}_s + \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_s}$$

$$\times \dot{q}_k \dot{q}_s + 2\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_s \partial t}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}$$

$$a_y = \ddot{y}_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial q_s}\ddot{q}_s + \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 y_i}{\partial q_k \partial q_s}$$

$$\times \dot{q}_k \dot{q}_s + 2\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 y_i}{\partial q_s \partial t}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2}$$

$$a_z = \ddot{z}_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \ddot{q}_s + \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 z_i}{\partial q_k 2 q_s}$$

$$\times \dot{q}_k \dot{q}_s + 2 \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 z_i}{\partial q_s \partial t} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N) \tag{1-6}$$

(4) 约束方程在广义坐标和广义速度下的表达式

1°非完整约束

$$\varphi_\beta(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \cdots,\ \dot{q}_n,\ t)=0$$
$$(\beta=1,\ 2,\ \cdots,\ g) \tag{1-7}$$

2°线性非完整约束

$$\sum_{s=1}^{n} A_{\beta s} \dot{q}_s + A_\beta = 0 \tag{1-8}$$

式中$A_{\beta s}$，A_β是q_1，…，q_n和t的函数。

3.虚位移、自由度

(1) 虚位移——质点系在该位置为约束所容许的假想的无限小位移。以δ_{xi}，δ_{yi}，δ_{zi}表示系中M_i点虚位移。

(2) 在完整定常约束下，实位移是虚位移中的一个。在非定常约束下，实位移不一定是虚位移中的一个。

如虚位移加在完整非定常约束$F_\alpha(x_i,\ y_i,\ z_i,\ t)=0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N;\ \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$上的条件为

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial F_\alpha}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F_\alpha}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0$$

实位移加在完整非定常约束$F_\alpha(x_i,\ y_i,\ z_i,\ t)=0$

$(i=1, 2, \cdots, N; \alpha=1, 2, \cdots, l)$上的条件为

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_i}dz_i\right)+\frac{\partial F_\alpha}{\partial t}dt=0$$

在约束定常情况下，$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t}=0$，实位移是虚位移中的一个。

(3) 线性非完整约束加在虚位移上的条件

$$\sum_{s=1}^{n} A_{\beta s}\delta q_s=0 \tag{1-9}$$

(4) 自由度——系统广义坐标的独立变分数目。

对于完整系统，自由度数目等于独立坐标的数目。

对于非完整系统，自由度数目等于独立坐标的数目减去非完整约束方程的数目。

4.约束反力、理想约束

(1) 约束反力——约束作用于系统质点上的力。

(2) 理想约束——约束反力在系统质点虚位移上作的虚功之和等于零，称为理想约束，其数学表达式为

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{1-10}$$

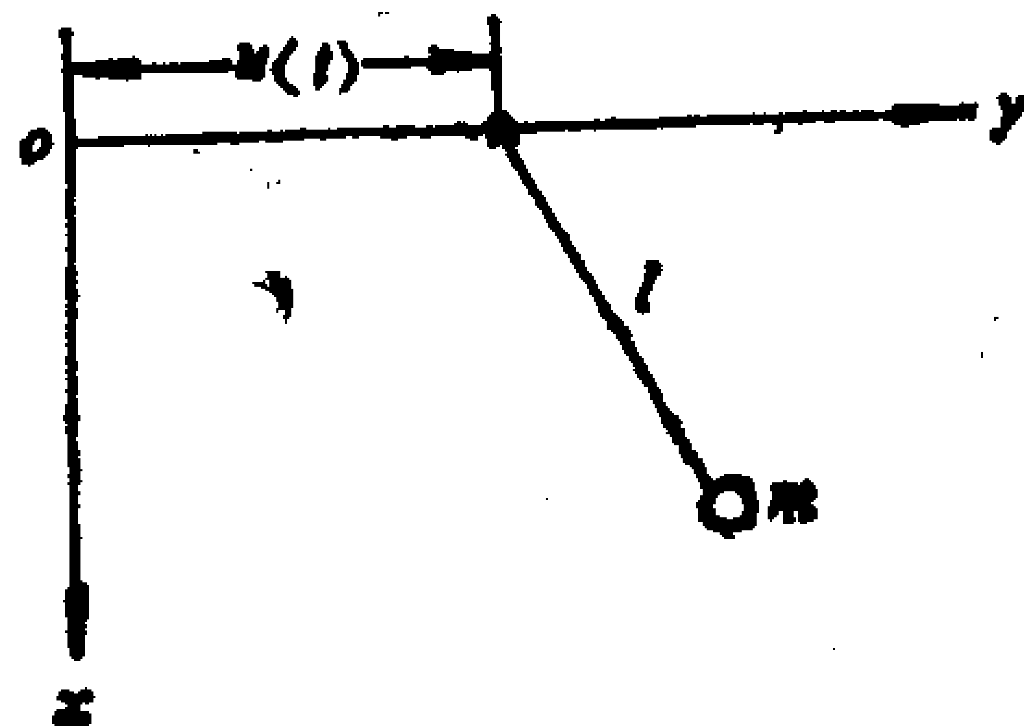
或

$$\sum_{i=1}^{N}(R_{i_x}\delta x_i+R_{i_y}\delta y_i+R_{i_z}\delta z_i)=0 \tag{1-11}$$

式中$\boldsymbol{R}_i$表示约束作用在系统质点M_i上的力。

二、范 例

例1-1 一单摆由质量为m，长为l的轻杆组成，悬挂点以$y=u(t)$运动(如图1-1)。试列写问题的约束方程，并说明约束是完整的还是非完整的，是定常的还是非定常的，是双面的还是单面的？



例1-1图

［解］ 设摆的坐标为(x_m, y_m)，则约束方程为

$$x_m^2+(y_m-u(t))^2=l^2$$

或

$$x_m^2+y_m^2-2y_mu(t)=l^2-u^2(t)$$

约束是完整的、非定常的、双面的。

例1-2 试证明约束$\dot{x}\sin\theta-\dot{y}\cos\theta=0$是非完整的。

［解］ 令$\theta=z$，对比(1-1)式知

$$A=\sin z,\quad B=-\cos z,\quad C=0$$

求偏导数，得

$$\frac{\partial A}{\partial z}=\cos z,\quad \frac{\partial A}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial B}{\partial x}=0\quad,\quad \frac{\partial B}{\partial z}=\sin z$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}=0\quad,\quad \frac{\partial C}{\partial y}=0$$

于是

$$A\left(\frac{\partial B}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial y}\right)+B\left(\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial z}\right)+C\left(\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}\right)$$

$$=\sin^2 z+\cos^2 z=1$$

故约束是非完整的

例1-3 验证约束 $\dot{x}(x^2+y^2+z^2)+2(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z})=0$ 不满足条件(1-3)，但却是可积的。

[解] 原式$=(x^2+y^2+z^2+2x)\dot{x}+2y\dot{y}+2z\dot{z}=0$

对比(1-1)式，知

$$A=x^2+y^2+z^2+2x,\ B=2y,\ C=2z$$

求偏导数，有

$$\frac{\partial A}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial A}{\partial z}=2z$$

$$\frac{\partial B}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial B}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial C}{\partial y}=0$$

可见

$$\frac{\partial A}{\partial y}\neq\frac{\partial B}{\partial x},\quad \frac{\partial A}{\partial z}\neq\frac{\partial C}{\partial x}$$

即不满足条件(1-3)。实际上，原式可改写为

$$(x^2+y^2+z^2)dx+d(x^2+y^2+z^2)=0$$

或

$$dx+\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}=0$$

积分得

$$e^x(x^2+y^2+z^2)=C$$

其中C为积分常数。

例1-4 试用旋转抛物面坐标ξ，η，φ：$x=\xi\eta\cos\varphi$，$y=\xi\eta\sin\varphi$，$z=(\xi^2-\eta^2)/2$及其对时间的导数表示点的速度$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$和加速度$\ddot{x}$，$\ddot{y}$，$\ddot{z}$。

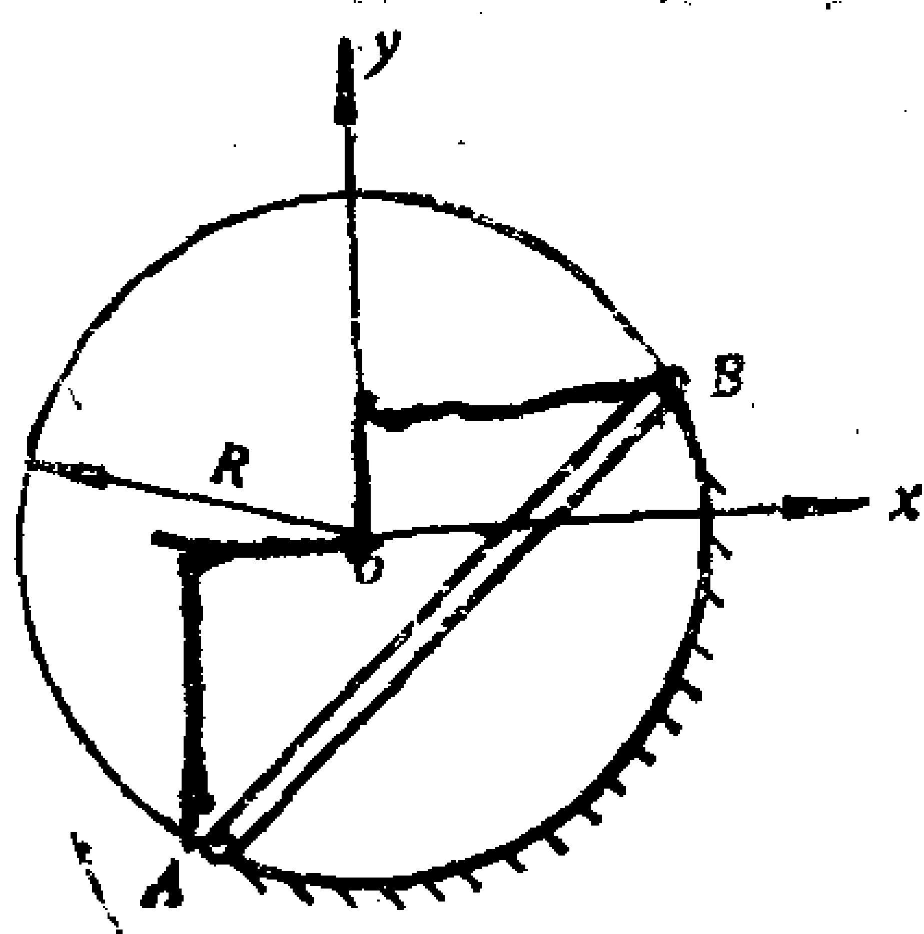
［解］ 由$x=\xi\eta\cos\varphi$，$y=\xi\eta\sin\varphi$，$z=(\xi^2-\eta^2)/2$对时间t求导数一次，得速度分量

$$
\begin{cases}
\dot{x}=\dot{\xi}\eta\cos\varphi+\xi\dot{\eta}\cos\varphi-\xi\eta\dot{\varphi}\sin\varphi \\
\dot{y}=\dot{\xi}\eta\sin\varphi+\xi\dot{\eta}\sin\varphi+\xi\eta\dot{\varphi}\cos\varphi \\
\dot{z}=\xi\dot{\xi}-\eta\dot{\eta}
\end{cases}
$$

再由速度分量对时间t求导一次，得加速度分量

$$
\begin{cases}
\ddot{x}=\ddot{\xi}\eta\cos\varphi+\xi\ddot{\eta}\cos\varphi-\xi\eta\ddot{\varphi}\sin\varphi-2\xi\dot{\eta}\dot{\varphi}\sin\varphi \\
\qquad -\xi\eta\dot{\varphi}^2\cos\varphi+2\dot{\xi}\dot{\eta}\cos\varphi-2\eta\dot{\xi}\dot{\varphi}\sin\varphi \\
\ddot{y}=\ddot{\xi}\eta\sin\varphi+\xi\ddot{\eta}\sin\varphi+\xi\eta\ddot{\varphi}\cos\varphi+2\xi\dot{\eta}\dot{\varphi}\cos\varphi \\
\qquad -\xi\eta\dot{\varphi}^2\sin\varphi+2\dot{\xi}\dot{\eta}\sin\varphi+2\eta\dot{\xi}\dot{\varphi}\cos\varphi \\
\ddot{z}=\dot{\xi}^2+\xi\ddot{\xi}-\dot{\eta}^2-\eta\ddot{\eta}
\end{cases}
$$

例1-5 一长为l的杆子两端在半径为R的铅垂固定圆环上运动，试列写杆子的约束方程、虚位移方程，并指出系统的自由度数目。



例1-5图

［解］ 设杆AB两端坐标为(x_A, y_A)，(x_B, y_B)。

约束方程有三个：

$$x_A^2+y_A^2=R^2$$

$$x_B^2+y_B^2=R^2$$

$$(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2=l^2$$

虚位移方程为

$$x_A\delta x_A+y_A\delta y_A=0$$

$$x_B\delta x_B+y_B\delta y_B=0$$

$$(x_A-x_B)(\delta x_A-\delta x_B)+(y_A-y_B)(\delta y_A-\delta y_B)=0$$

自由度数目$=2\times2-3=1$。

例1-6 一质点沿平面xoy运动，运动轨迹的斜率与时间t成正比，比例系数为1。试列写质点运动的约束方程，并说明实位移处于虚位移之中。

［解］ 质点的约束方程

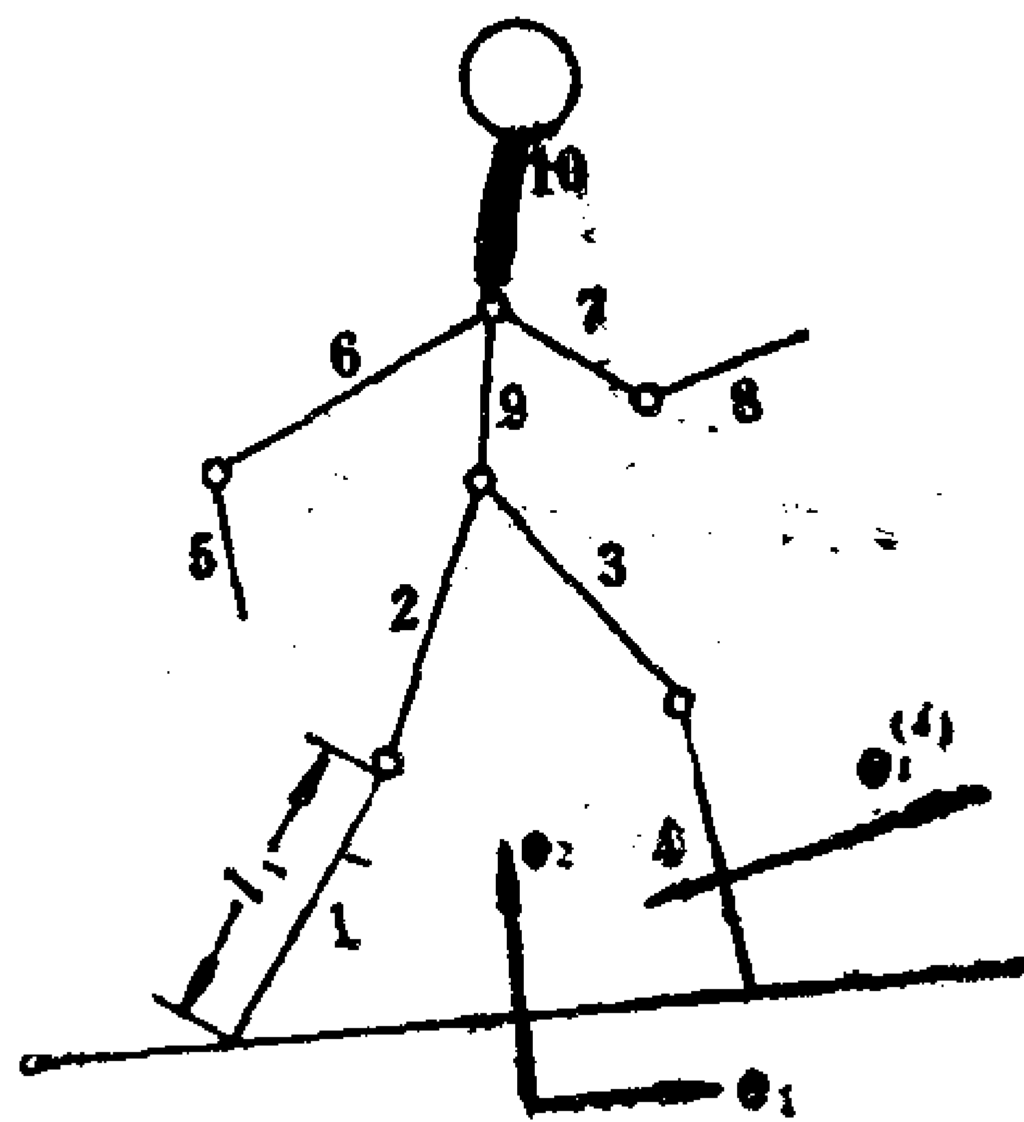
$$\dot{y}=t\dot{x} \quad 或 \quad dy=tdx \tag{1}$$

虚位移方程为

$$\delta y=t\delta x \tag{2}$$

由方程(1)、(2)可见，实位移处于虚位移之中。

例1-7 一人体模型由十个刚体组成：头、身，四肢(上、下臂，大、小腿)。设各个部位在铅垂平面内运动，且两脚停在地上，前、后脚距离保持为常值l。设各部位长l_i，今用水平固定方向单位矢量e_1与第i个刚体法线方向$e_1^{(i)}$的夹角$\varphi_i(i=1, 2, \cdots, 10)$确定系统的位置。试写出约束方程并说明系统的自由度数目(这是一个典型的



例1-7图

一般链式系统的例子)。

[解] 两只腿不离开地面，可视作铰链。人体模型由十个刚体组成，需用十个坐标$\varphi_i(i=1, 2, \cdots, 10)$确定其位置。但$\varphi_1$，$\varphi_2$，$\varphi_3$，$\varphi_4$间存在两个约束方程

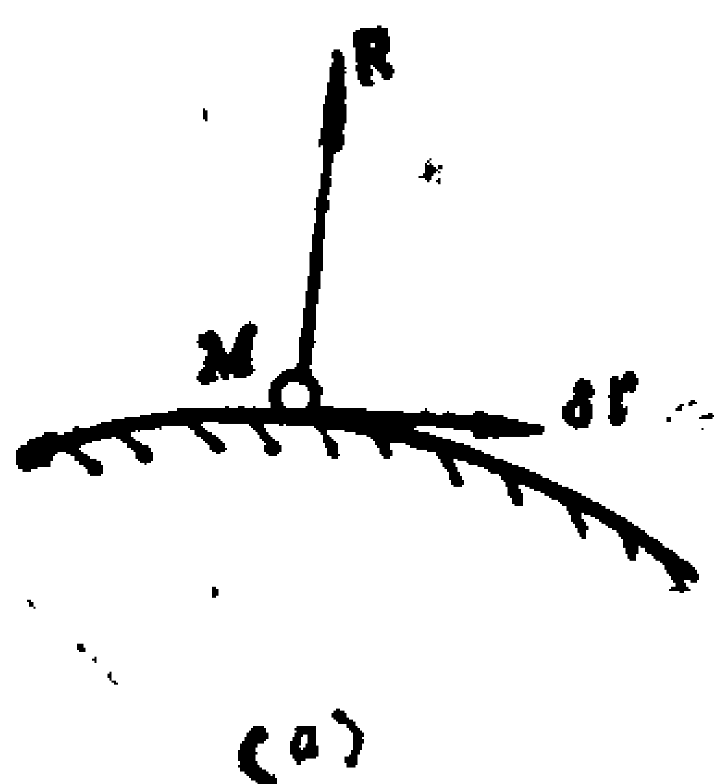
$$l_1\cos\varphi_1+l_2\cos\varphi_2+l_3\cos\varphi_3+l_4\cos\varphi_4=l$$

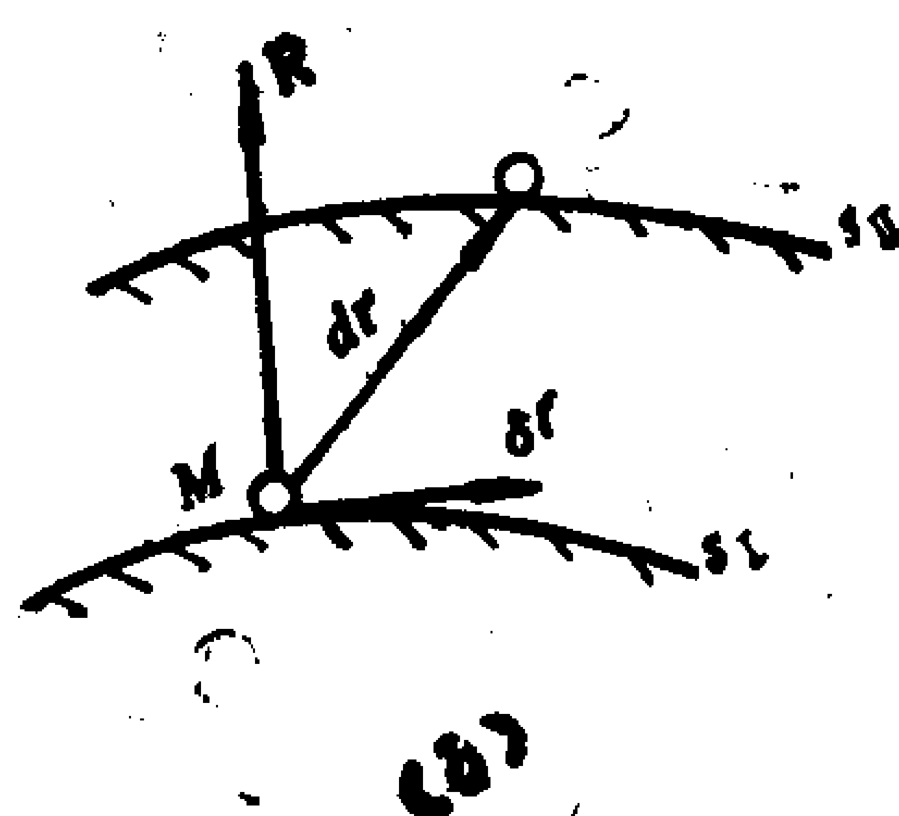
$$l_1\sin\varphi_1+l_2\sin\varphi_2-l_3\sin\varphi_3-l_4\sin\varphi_4=0$$

故系统自由度数目$=10-2=8$。

例1-8 约束反力不作功的约束是理想约束这句话是否确切?为什么?

[解] 这句话不确切。因为没有明确指出约束反力在何种位移上不作功。理想约束是指约束反力在系统的点的虚位移上作的虚功之和等于零。只要约束反力在虚位移上不作功或作的虚功之和等于零，这样的约束才称为理想约束。例如质点M在光滑曲面上运动[图1-8$(a)(b)$]。





例1-8图

1.曲面是固定的。约束反力$\boldsymbol{R}$沿曲面在该点的法线方向，与质点M的虚位移$\delta\boldsymbol{r}$相垂直(即$\boldsymbol{R}\perp\delta\boldsymbol{r}$)。因此，约束反力$\boldsymbol{R}$在虚位移$\delta\boldsymbol{r}$上作功为零。

2.曲面是运动的(或变形的)。约束反力$\boldsymbol{R}$沿曲面S_I在该

点的法线方向，与质点M的虚位移$\delta \boldsymbol{r}$仍相垂直（即$\boldsymbol{R} \perp \delta \boldsymbol{r}$），但不与实位移$d\boldsymbol{r}$相垂直。因此，约束反力$\boldsymbol{R}$在虚位移$\delta \boldsymbol{r}$上作功为零，而在实位移$d\boldsymbol{r}$上作功不为零。

由此例可以看出，只要约束反力在虚位移上作功为零，虽然它在实位移作功不为零，但仍属于理想约束。

三、习　题

1-1　一柔软不可伸长的线，一端固定，另一端栓一小球。小球所受约束是单面的还是双面的？试写出约束方程。

答：单面约束。

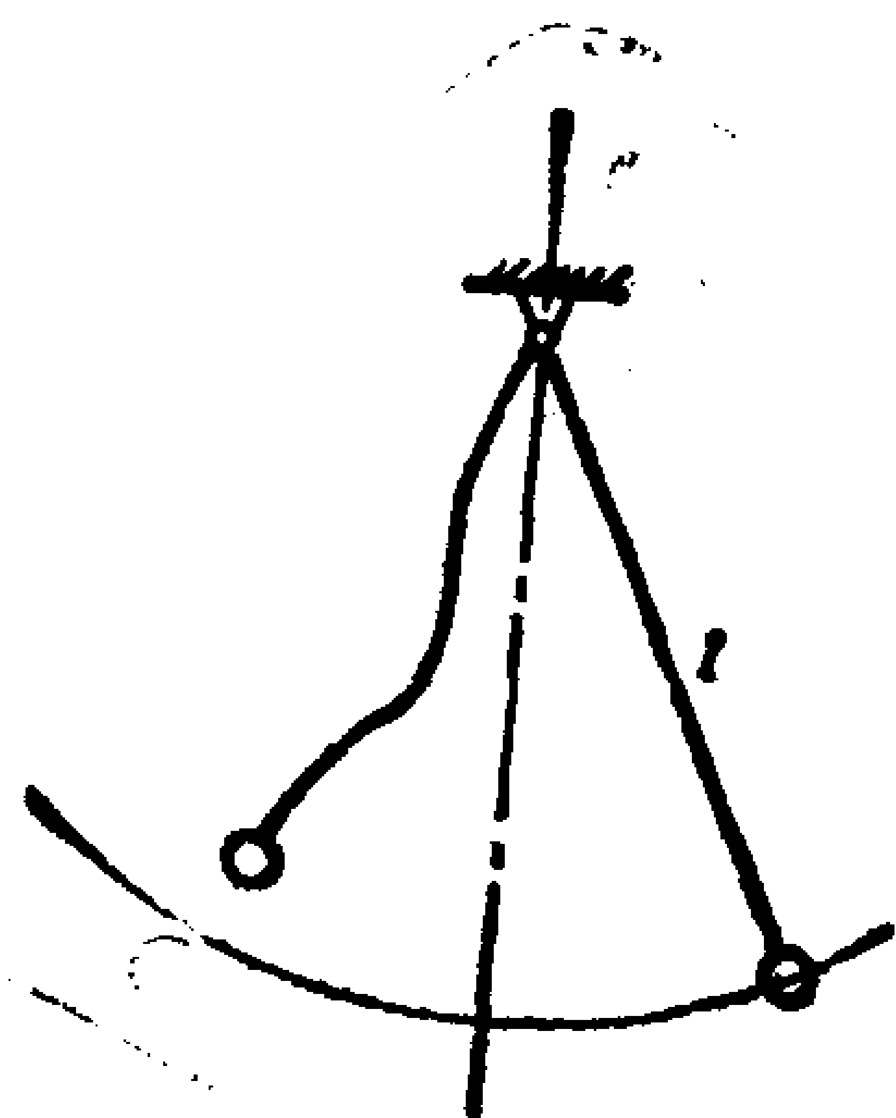
约束方程为

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant l^2$$

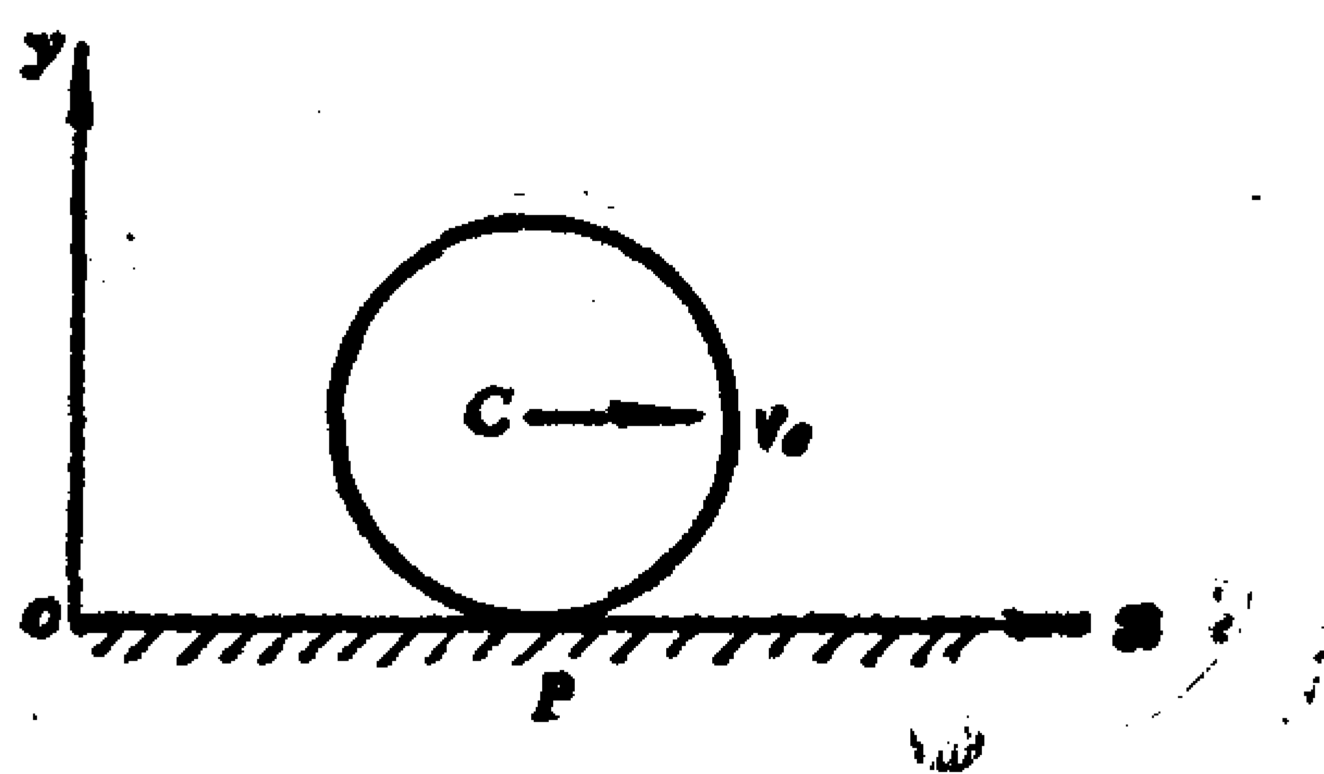
1-2　一半径为r的圆盘在铅垂平面内沿直线作纯滚动。这约束是完整的还是非完整的？试写出约束方程。

答：完整约束。约束方程为$x_c = r\theta$。

1-3　质量为m_1，m_2的两物体用长为l的不可伸长的轻



题1-1图



题1-2图

绳联结，绳子跨过半径为r的定滑轮。假设绳子与滑轮之间无滑动。取φ，x_1，x_2为坐标。试写出系统在铅垂平面内运动时的约束方程。

答：$y_1=-r \qquad x_1=l-r\pi-x_2$

$y_2=r \qquad x_2=l-x_1-r\pi$。

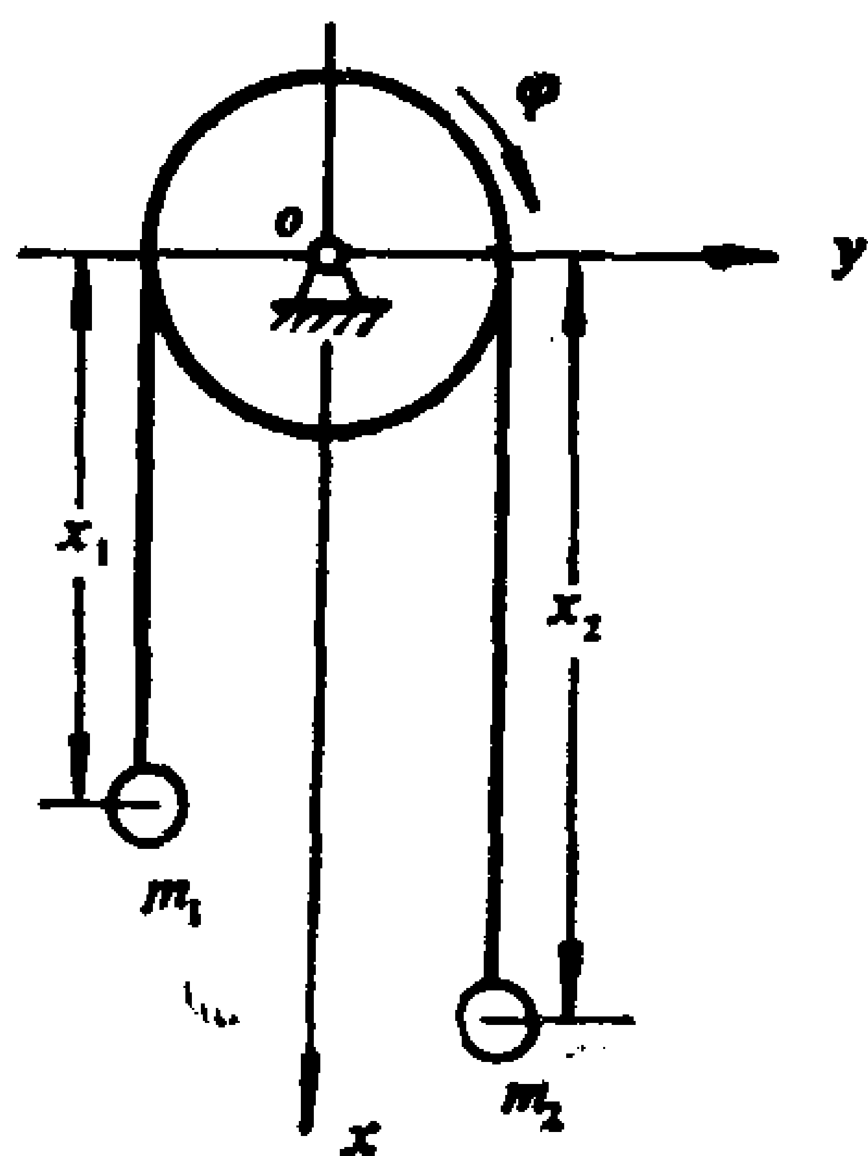
1-4 一直杆以常角速度ω绕铅垂轴转动，杆与铅垂线夹角α为常值。杆上有一小环，小环可沿杆滑动。取小环相对杆与铅垂线交点O的距离r为坐标。试将环的直角坐标用r表示之。写出直角坐标中的约束方程。

答：$x=r\sin\alpha\cos\omega t$，$y=r\sin\alpha\sin\omega t$

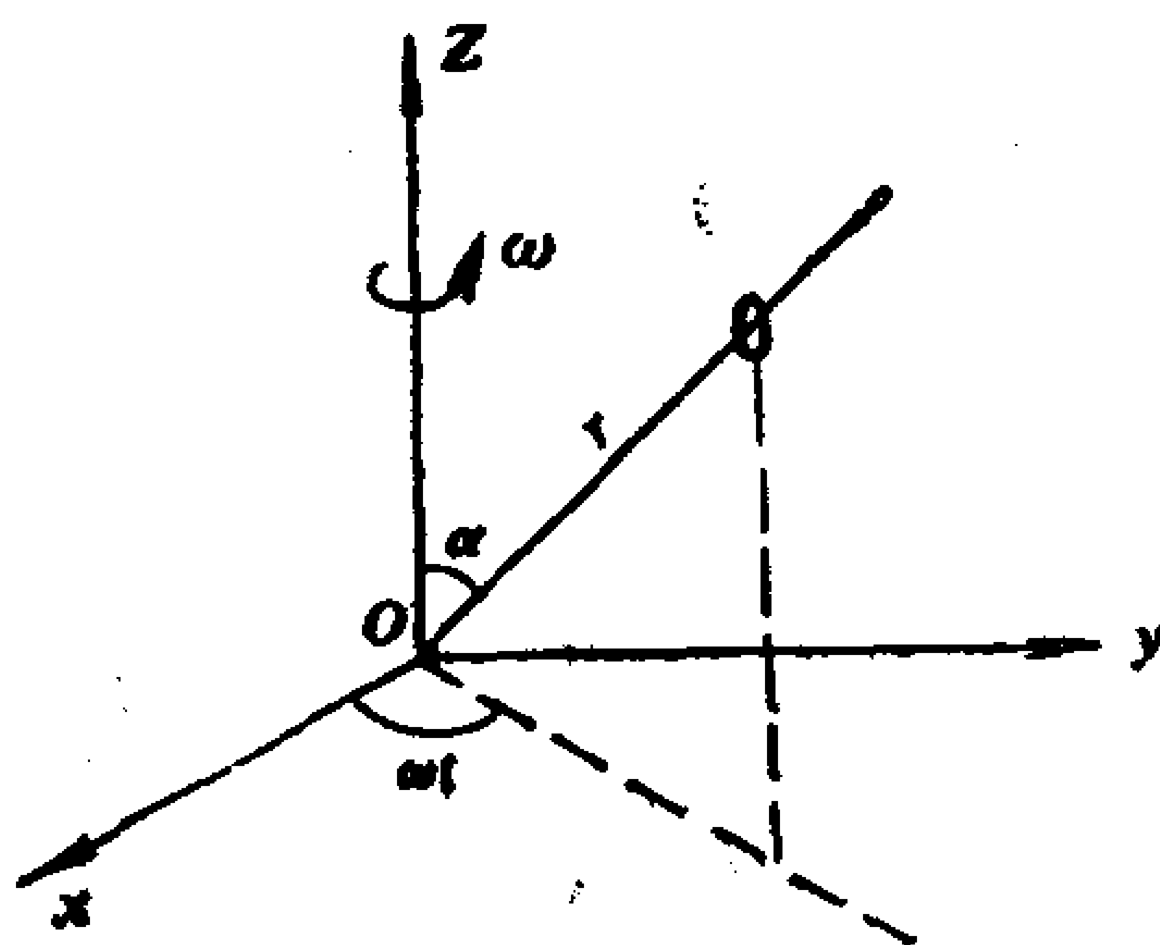
$z=r\cos\alpha$

约束方程为

$$y=x\text{tg}\omega t,\quad y=z\text{tg}\alpha\sin\omega t$$



题1-3图



题1-4图

1-5 试列写图示系统的约束方程。

答：设两质点坐标为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，约

束方程为$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=l_2^2$

$$(x_1-r\cos\omega t)^2+(y_1-r\sin\omega t)^2=l_1^2。$$

1-6　试判断下列微分约束是完整的还是非完整的？如果是完整的，写出其有限形式。

(1) $x\dot{z}+(y^2-x^2-z)\dot{x}+(z-y^2-xy)\dot{y}=0$

(2) $\dot{y}-z\dot{x}=0$

(3) $\dfrac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{x_1-x_2}=\dfrac{\dot{y}_1+\dot{y}_2}{y_1-y_2}$

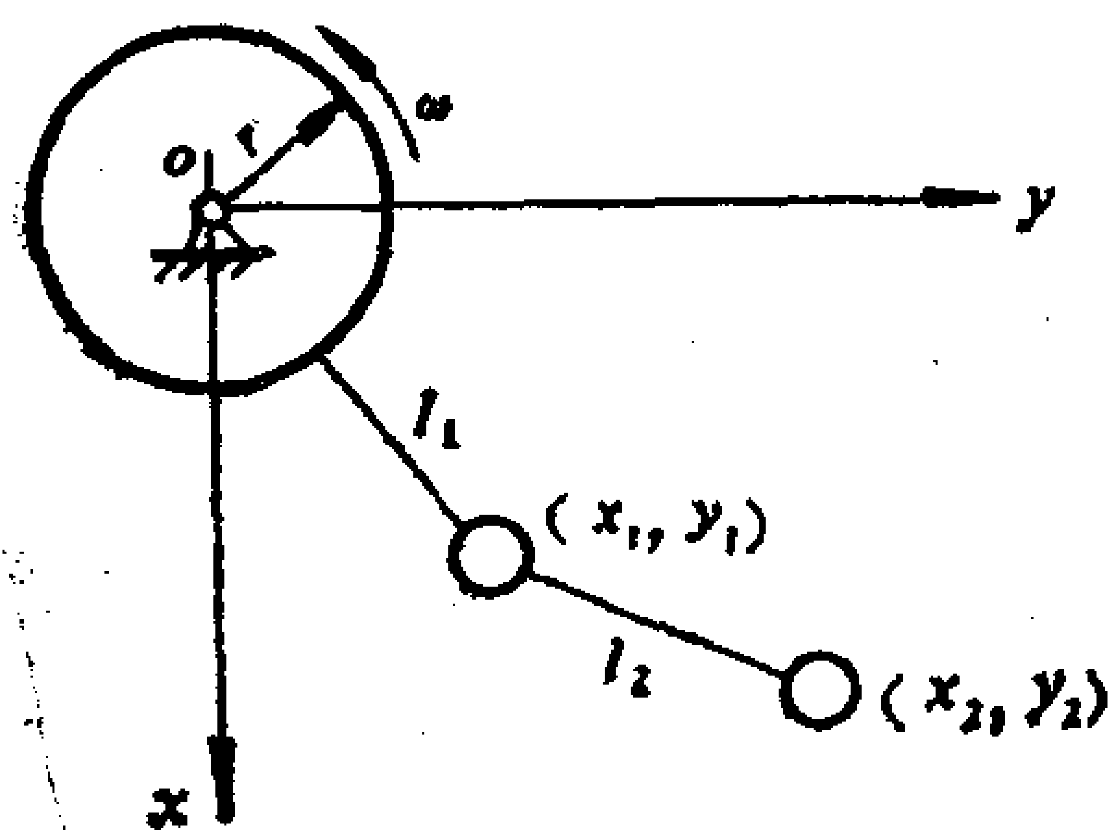
(4) $(2x+y+z)\dot{x}+(2y+z+x)\dot{y}+(2z+x+y)\dot{z}=0$

(5) $e^x\dot{x}+e^y\dot{y}+e^z\dot{z}=0$

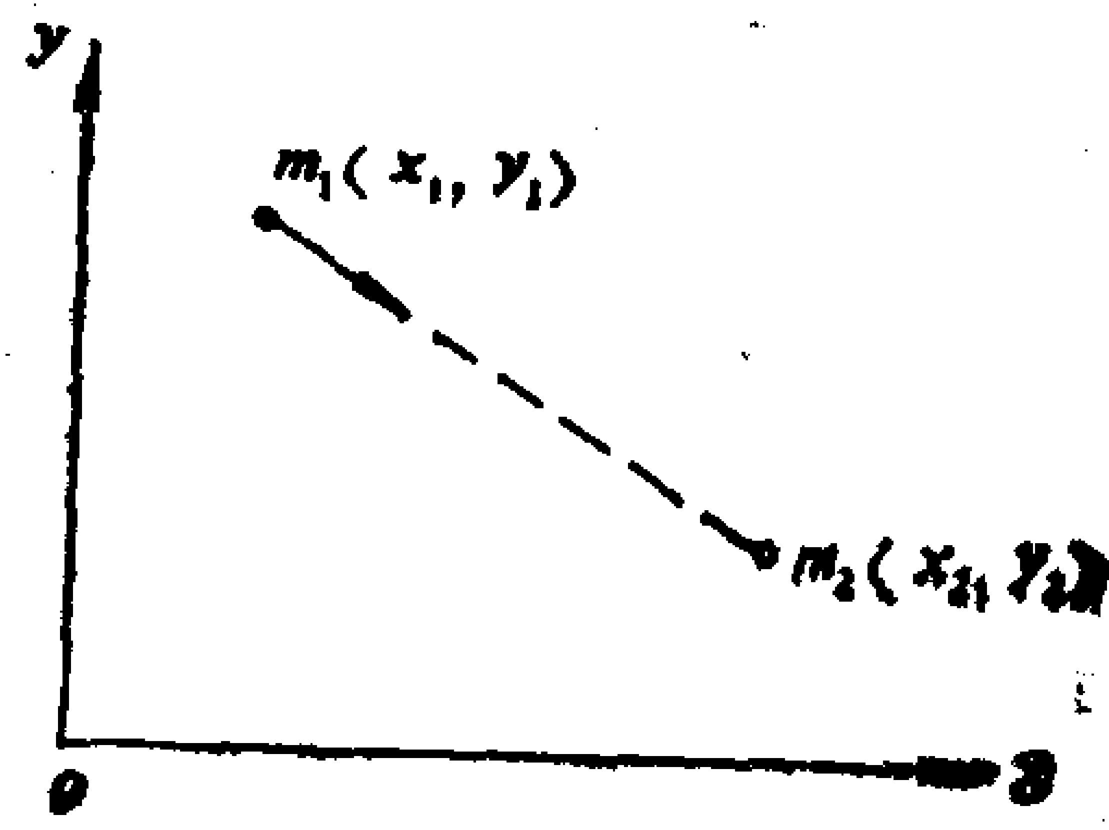
1-7　试证明，如果运动初始条件x_0，y_0，z_0，满足$z_0=(x_0^2-y_0^2)/2$，则微分约束$x\dot{x}-y\dot{y}-\dot{z}=0$与完整约束$2z=x^2-y^2$是等价的。

1-8　平面上有两质点m_1和m_2，系统运动时m_1对m_2进行追踪，m_1的速度始终对准m_2。试写出约束方程。

答：$\dfrac{\dot{y}_1}{\dot{x}_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$



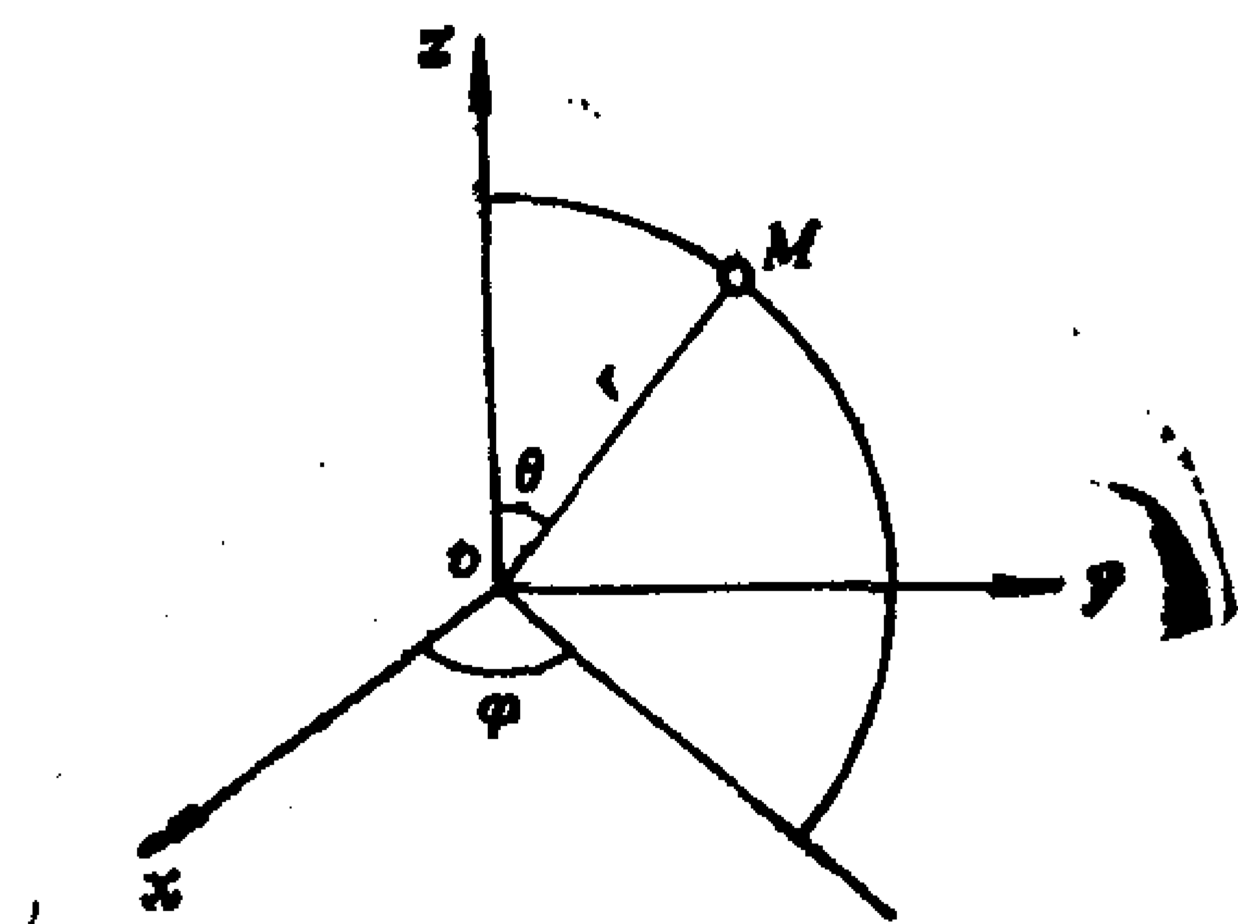
题1-5图



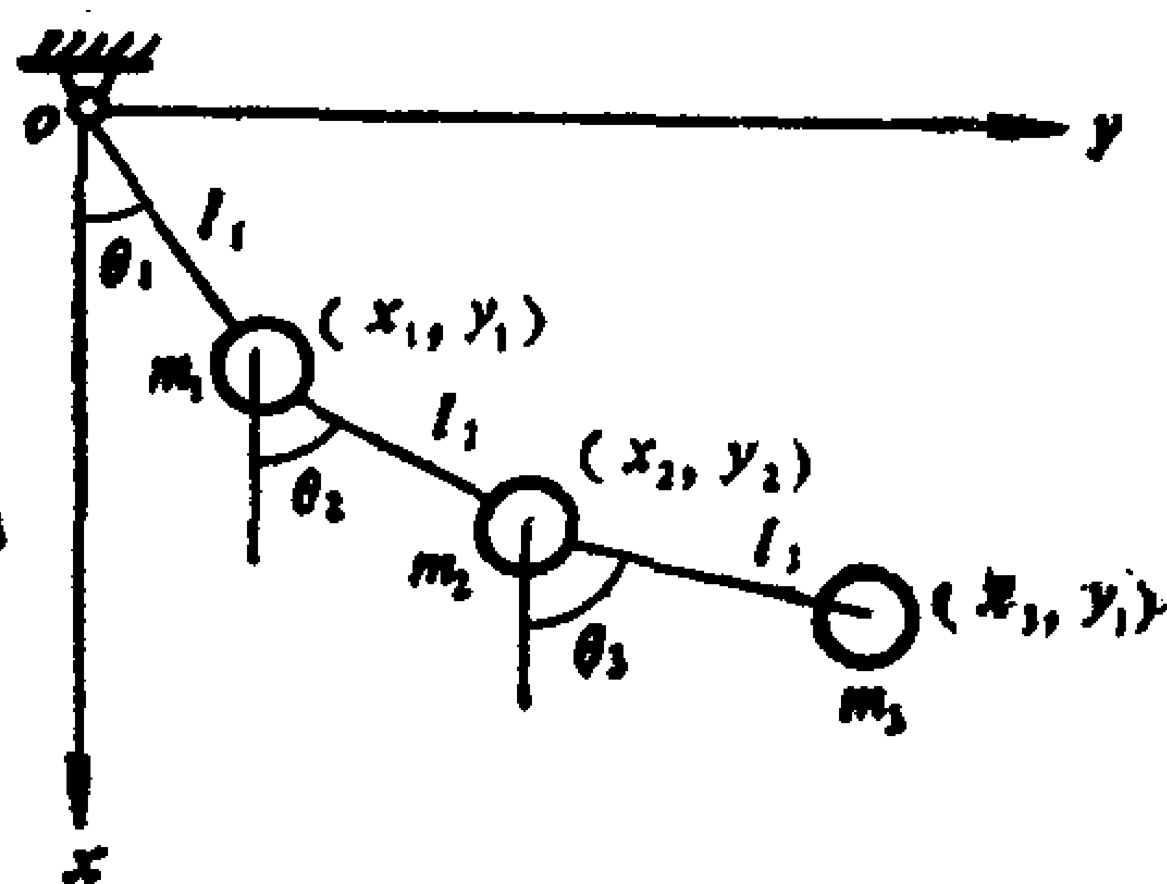
题1-8图

1-9　用球坐标r，φ，θ(如图示)及其导数表示自由质点的速度$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$，及加速度$\ddot{x}$，$\ddot{y}$，$\ddot{z}$。

1-10 一系统由三个质点组成，用不计质量的长l_1，l_2，l_3的细杆顺次联结。试用θ_1，θ_2，θ_3及其导数表示$\dot{x}_1$，$\dot{y}_1$，$\dot{x}_2$，$\dot{y}_2$，$\dot{x}_3$，$\dot{y}_3$。



题1-9图



题1-10图

1-11 试用抛物线柱坐标ξ，η，$\zeta(\xi>0)$：$x=(\xi^2-\eta^2)/2$，$y=\xi\eta$，$z=\zeta$及其对时间的导数表示点的速度$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$及点的加速度$\ddot{x}$，$\ddot{y}$，$\ddot{z}$。

1-12 试用椭圆柱坐标 ξ，η，z，$x=a\,\text{ch}\,\xi\cos\eta$，$y=a\,\text{sh}\,\xi\sin\eta$，$z=z$ 及其对时间的导数表示点的速度$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$。

1-13 试用双极坐标ξ，η，z：$x=\dfrac{a\,\text{sh}\,\xi}{\text{ch}\,\xi-\cos\eta}$与$y=\dfrac{a\sin\eta}{\text{ch}\,\xi-\cos\eta}$，$z=z$及其对时间的导数表示点的加速度$\ddot{x}$，$\ddot{y}$，$\ddot{z}$。

1-14 质点1和2由长度为l的刚杆相连结。系统的位形可以由直角坐标$(x_1,\ y_1,x_2,\ y_2)$或由广义坐标$(x,\ y,\ \theta)$给定，试写出用广义坐标表示直角坐标的变换式。其次，若定义第四个广义坐标为$q_4=l$，试计算雅可比行列式

$\dfrac{\partial(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2)}{\partial(x,\ y,\ \theta,\ q_4)}$，并求出以直角坐标表示的广义坐标。

答：$x_1=x-\dfrac{l}{2}\cos\theta$，$y_1=y-\dfrac{l}{2}\sin\theta$

$$x_2=x+\frac{l}{2}\cos\theta,\quad y_2=y+\frac{l}{2}\sin\theta$$

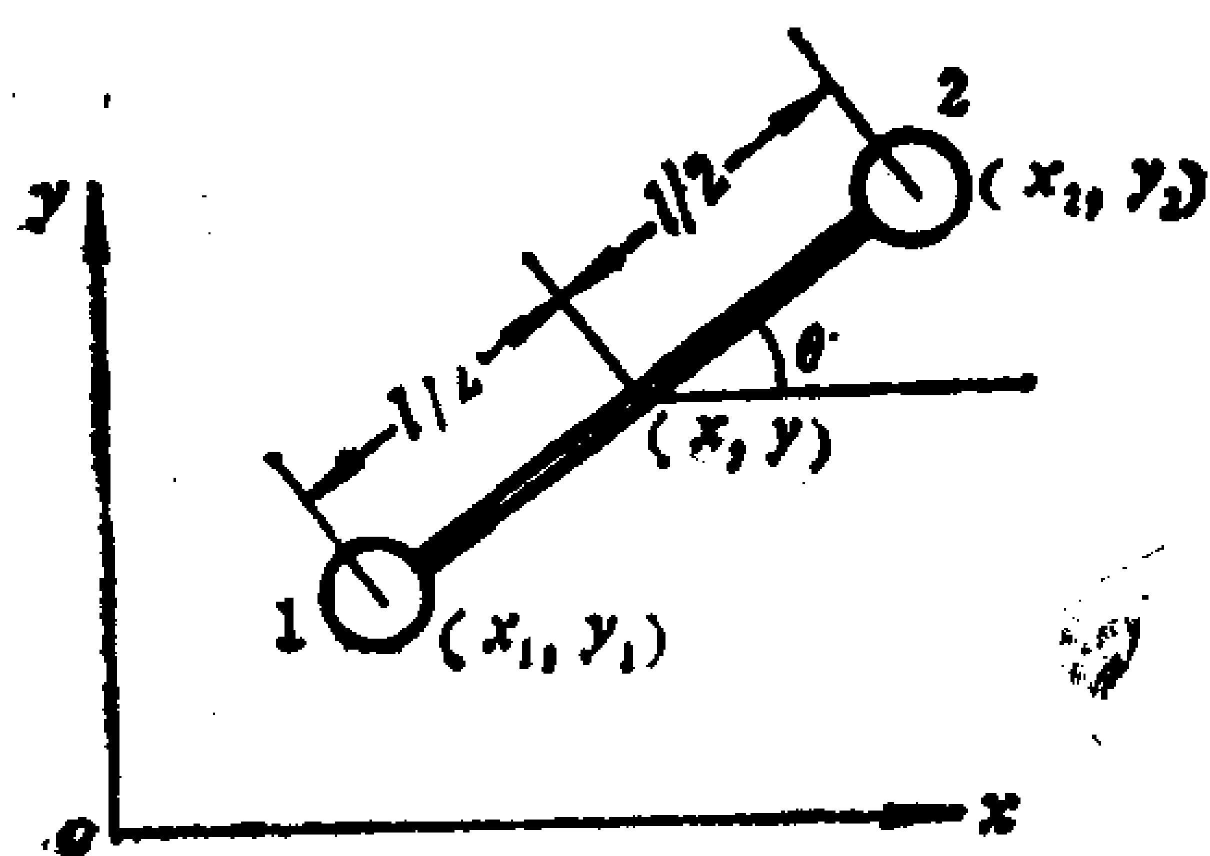
$$\frac{\partial(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2)}{\partial(x,\ y,\ \theta,\ q_4)}=-l$$

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\quad y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$$

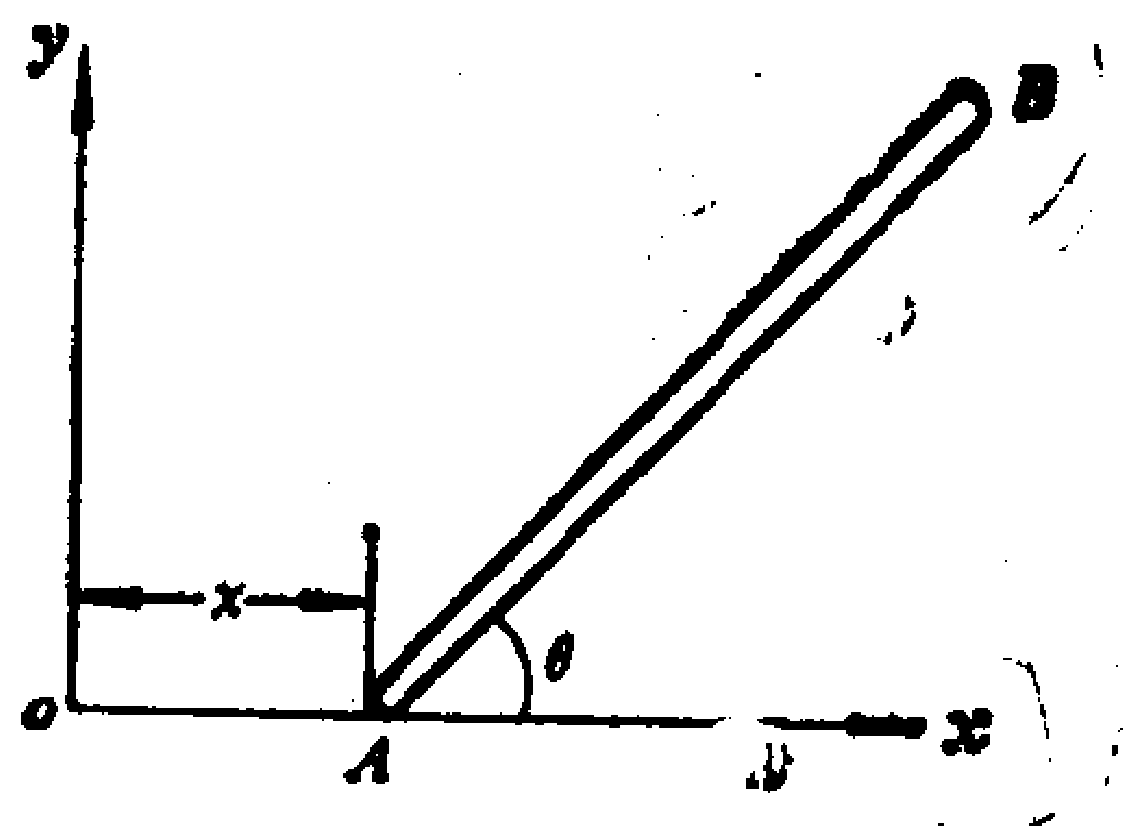
1-15 长为l的均匀细杆被限制在xy平面运动，且其A端恒保持在x轴上，若采用$(x,\ \theta)$作为广义坐标，试求杆中心的速度和加速度的大小。

答：$v_c=\sqrt{\dot{x}^2+\dfrac{l^2}{4}\dot{\theta}^2-l\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta}$

$$a_c=\sqrt{\ddot{x}^2+\frac{l^2}{4}\ddot{\theta}^2-l\ddot{x}\ddot{\theta}\sin\theta+\frac{l^2}{4}\dot{\theta}^4-l\ddot{x}\dot{\theta}^2\cos\theta}$$

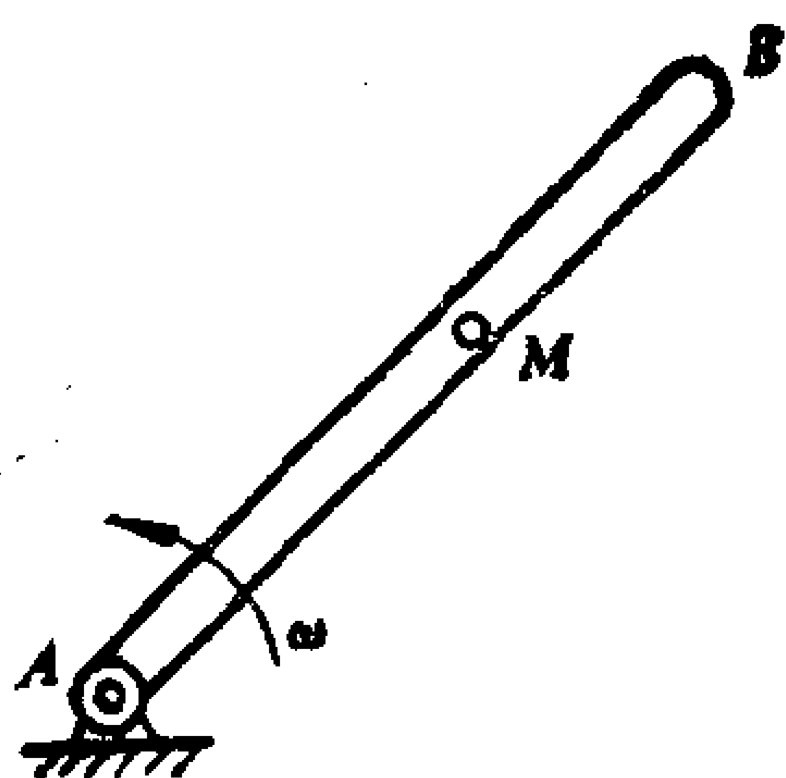


题1-14图



题1-15图

1-16 图示质点M沿光滑导管AB运动，而导管AB绕A点作定轴转动。试说明实位移不与任何一个虚位移相重合。



题1-16图

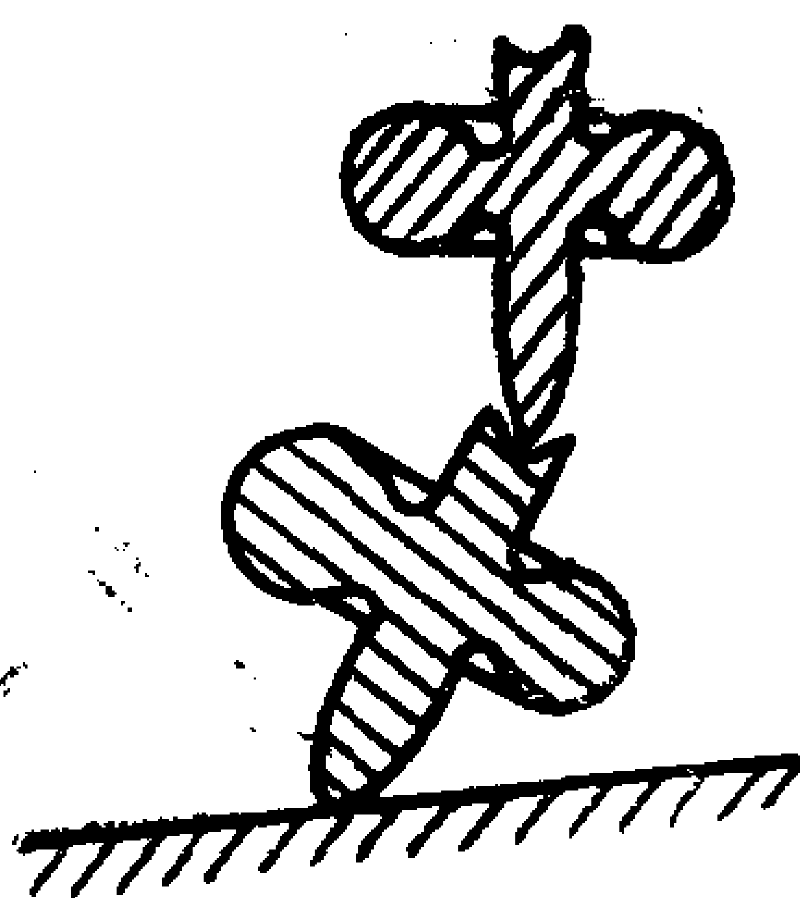
1-17 试对稳定约束$\dot{y}=2\dot{x}+z$写出实位移与虚位移所满足的关系，并说明实位移不是虚位移中的一个。

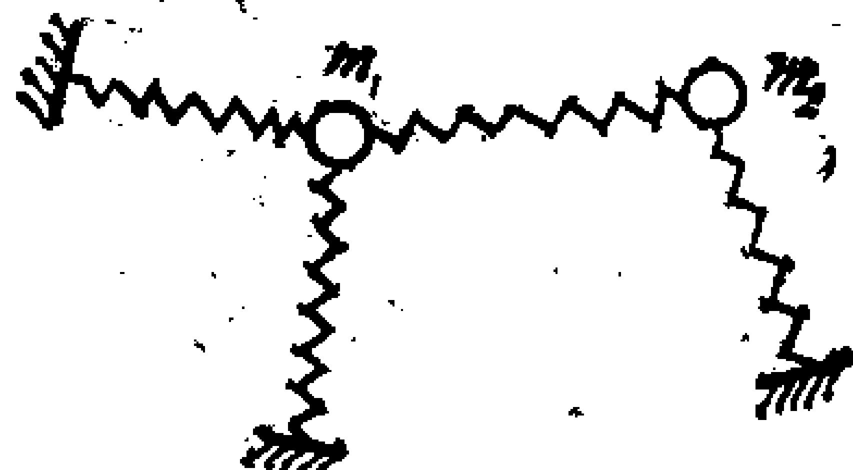
1-18 试说明题1-3，题1-4各有多少个独立的坐标，各有多少个自由度。

1-19 一刚体有一固定点，有两个固定点，有三个固定点(不共线)时，各有几个自由度？

1-20 系统由两个叠放在一起的陀螺组成，下面的陀螺支点固定，求其自由度。

1-21 两质点m_1，m_2用四根弹簧连结如图，可在图面内运动，问系统有几个自由度？


题1-20图



题1-21图

1-22 试说明题1-16中导管对质点的约束反力在虚位移上的功为零，但在实位移上的功不等于零。

第二章　虚位移原理与分析静力学

一、基本理论与公式

1.虚位移原理是分析静力学的基本原理。与几何静力学不同，它是用分析的方法以及位移和功的概念建立了任意质点系统平衡的充要条件，它是解决质点系统平衡问题的普遍原理。

2.虚位移原理——在双面、理想、完整、定常约束下，质点系统平衡的充分和必要条件是，作用在系统上的主动力在任何虚位移中所作元功之和等于零。其数学表达式有

（1）矢量形式

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{2-1}$$

（2）直角坐标形式

$$\sum_{i=1}^{N} (F_{ix}\delta_{xi} + F_{iy}\delta_{yi} + F_{iz}\delta_{zi}) = 0 \tag{2-2}$$

（3）广义坐标形式

$$\sum_{s=1}^{n} Q_s \delta q_s = 0 \tag{2-3}$$

式中

$$Q_s=\sum_{i=1}^{N}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) \tag{2-4}$$

为对应于广义坐标q_s的广义力。

3.虚位移原理可以用来解决非自由质点系统的平衡问题。大致可以解决如下三类问题：

(1) 系统在某一位置处于平衡时，求主动力之间的关系。

(2) 求系统在主动力作用下的平衡位置。

(3) 求系统在主动力作用下处于平衡时的约束反力。

4. 在应用虚位移原理解决系统平衡位置时，须注意以下几点：

(1) 根据系统所受的约束的情形，判断其是否属于理想约束(有摩擦时，可将摩擦力当作主动力，约束仍可视为理想的)。

(2) 根据约束的条件来研究系统各点的虚位移。一般情况，先确定系统的自由度，选取广义坐标，然后将主动力作用点的位置用广义坐标来表示。

(3) 确定各点虚位移之间的关系。这通常可以从约束的几何条件中得到，特别是刚体系中各点虚位移的关系和各点速度的关系是完全相似的，因此在运动学中，关于刚体各点速度分布的规律(如瞬时速度中心、速度投影定理等)都可用来确定刚体系中各点虚位移的关系。

(4) 根据问题的具体情况和简便程度选取虚位移原理的数学形式。

(5) 需要求系统的约束反力时，只须在对应点上解除一

个约束，把相应的约束反力当作主动力来处理，与此同时系统也就增加了一个自由度。

5.系统的平衡有三类：稳定平衡、不稳定平衡及随遇平衡。判定平衡的性质可用下列判据：具有完整、理想约束的系统在势力场中处于某一平衡位置。

(1) 在此位置，势能V为极小值，则平衡是稳定的；

(2) 在此位置，势能V为极大值，则平衡是不稳定的；

(3) 在此位置，势能V为常值，则平衡为随遇的。

对于一个自由度系统，可用下列方法来判断平衡性质：

若$\frac{dV}{dq}=0$，且$\frac{d^2V}{dq^2}>0$，则系统是稳定平衡；

若$\frac{dV}{dq}=0$，且$\frac{d^2V}{dq^2}<0$，则系统是不稳定平衡；

若$\frac{dV}{dq}=0$，且$\frac{d^2V}{dq^2}=0$，$V=$常数，则系统是随遇平衡，否则要根据高阶导数符号来判断，若第一个不为零的导数为偶数阶，且大于零，则平衡是稳定的，其它情形是不稳定的。

对于两个自由度系统，若

$$\frac{\partial V}{\partial q_1}=0,\ \frac{\partial V}{\partial q_2}=0$$

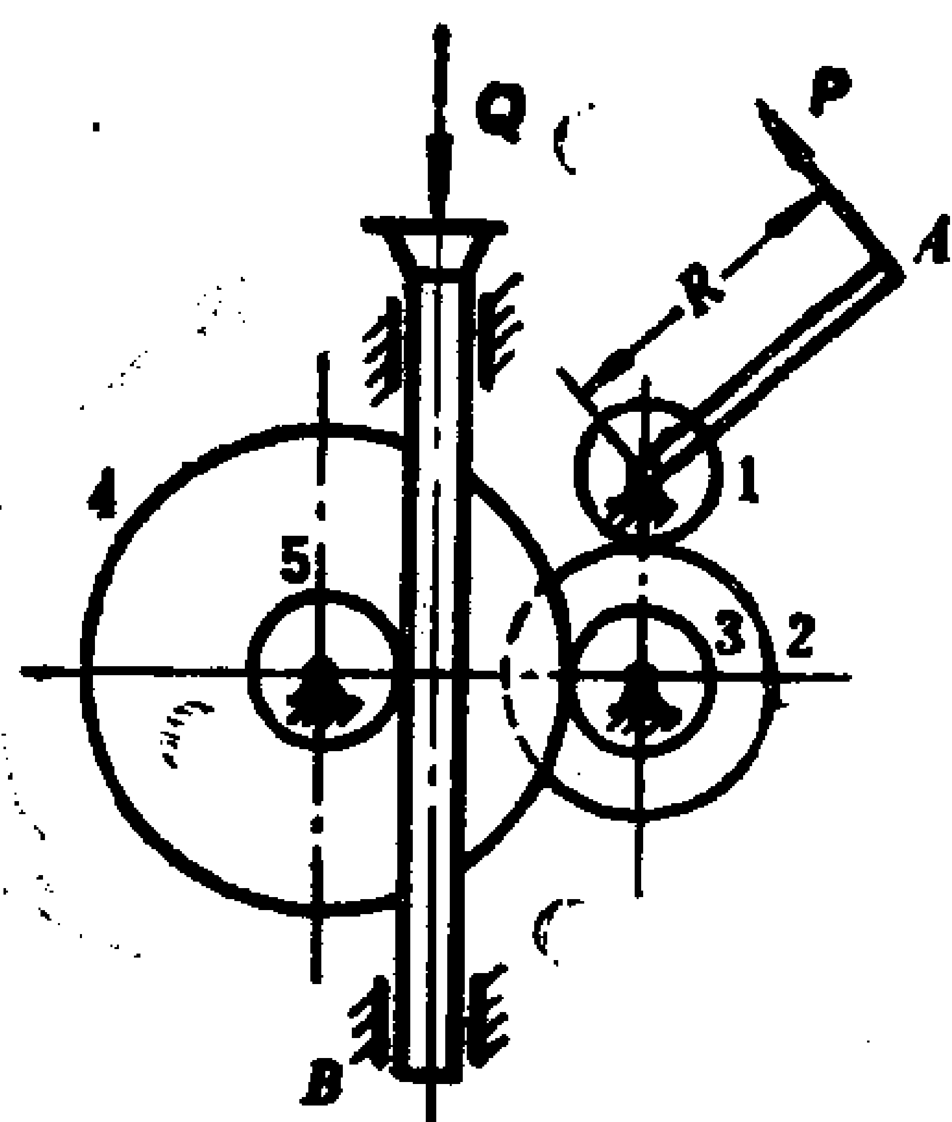
$$\Delta=\left(\frac{\partial^2V}{\partial q_1\partial q_2}\right)^2-\frac{\partial^2V}{\partial q_1^2}\frac{\partial^2V}{\partial q_2^2}<0$$

$$\frac{\partial^2V}{\partial q_1^2}>0\quad\left(或\frac{\partial^2V}{\partial q_2^2}>0\right)$$

三组式子同时成立，则平衡是稳定的。

二、范　例

例2-1　千斤顶机构中，当长为R的把柄A转动时，齿轮1、2、3、4与5也开始转动，并带动千斤顶齿条B。问在把柄端加方向垂直于手柄的多大力P，才能顶起4800N的力Q，而千斤顶保持平衡。已知$r_1=3\text{cm}$，$r_2=12\text{cm}$，$r_3=40\text{cm}$，$r_4=16\text{cm}$，$r_5=3\text{cm}$，$R=18\text{cm}$。



例2-1图

［解］令把柄A端向上的虚位移为δS_A，千斤顶齿条BC向上虚位移为δS_{BC}，根据虚位移原理

$$P\delta S_A-Q\delta S_{BC}=0$$

因为

$$\delta S_A=R\delta\varphi_1,\quad \delta S_{BC}=r_5\delta\varphi_5=r_5\delta\varphi_4$$

$$(\delta\varphi_5=\delta\varphi_4)$$

又

$$\frac{\delta\varphi_1}{\delta\varphi_4}=\frac{r_2r_4}{r_1r_3}=\frac{12}{3}\times\frac{16}{4}=16$$

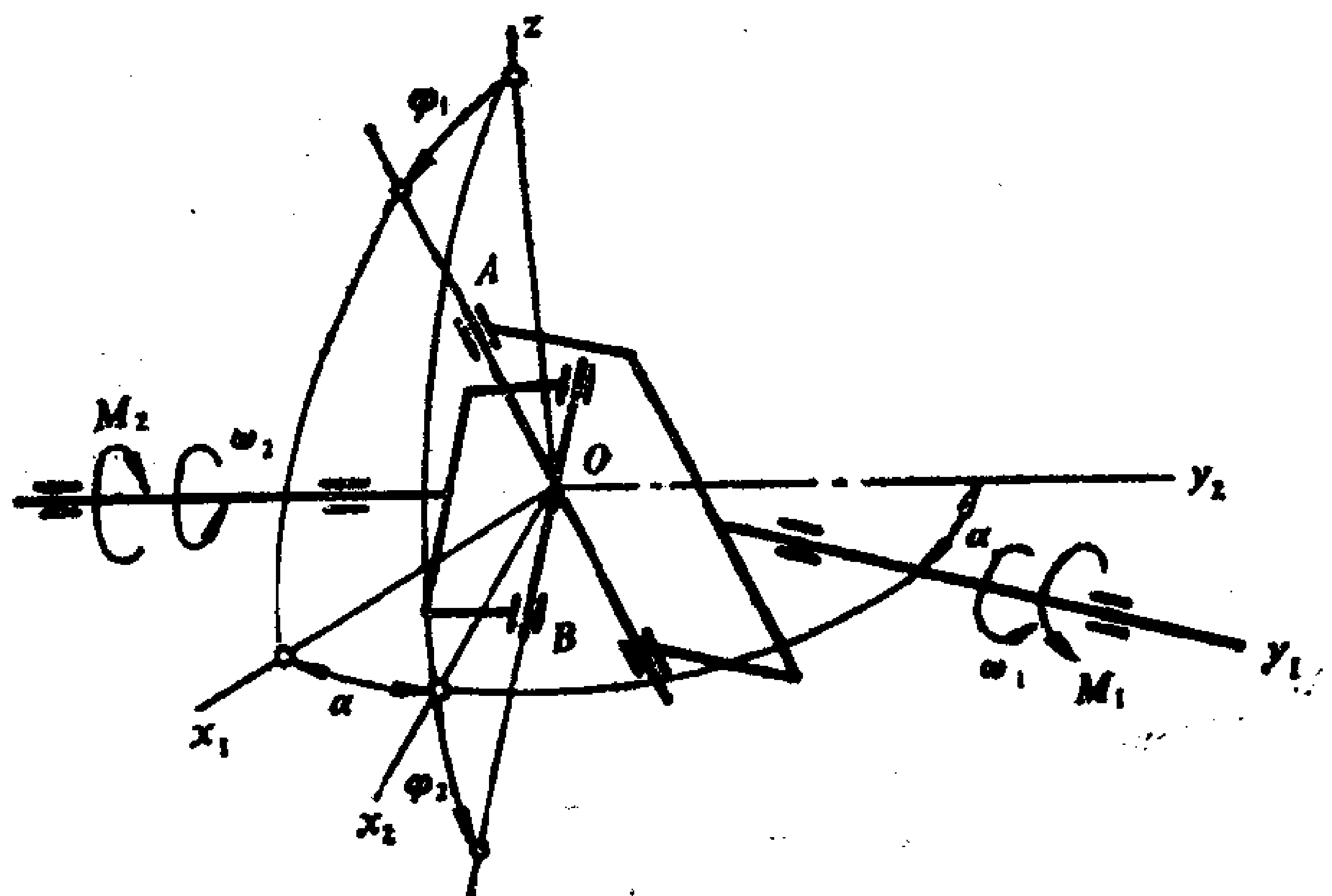
所以

$$P=\frac{\delta S_{BC}}{\delta S_A}Q=\frac{r_5\delta\varphi_4}{R\delta\varphi_1}Q=\frac{3}{18\times16}4800=50(\text{N})$$

例2-2　万向接头传动机构处于平衡状态。求它的主动轴及从动轴上力矩M_1和M_2之间的关系。已知两轴之间的夹

角为α(α通常很小)。

[解] 设oy_1沿主动轴,oy_2沿从动轴的反向,取z轴垂直于oy_1和oy_2所构成的平面,由此决定了两个右手坐标系ox_1y_1z和ox_2y_2z,它们在惯性空间都是固定的。主动轴转动由oA轴在ox_1z平面中的转角φ_1给出,从动轴的转动则由oB轴在ox_2z平面中的转角φ_2给出,根据虚位移原理



例2-2图

$$M_1\delta\varphi_1-M_2\delta\varphi_2=0$$

而OA轴在坐标系ox_1y_1z中的方向余弦是$(\sin\varphi_1, 0, \cos\varphi_1)$,$OB$轴在坐标系$ox_2y_2z$中的方向余弦是$(\cos\varphi_2, 0, -\sin\varphi_2)$,再折算到坐标系$ox_1y_1z$中的方向余弦是$(\cos\varphi_2\cos\alpha, \cos\varphi_2\sin\alpha, -\sin\varphi_2)$,由于$OA$与$OB$互相垂直,它们在同一坐标系中相应方向余弦乘积之和应等于零

$$\sin\varphi_1\cos\varphi_2\cos\alpha+0-\cos\varphi_1\sin\varphi_2=0$$

由此解得

$$\varphi_2=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi_1\cos\alpha)$$

求变分得到

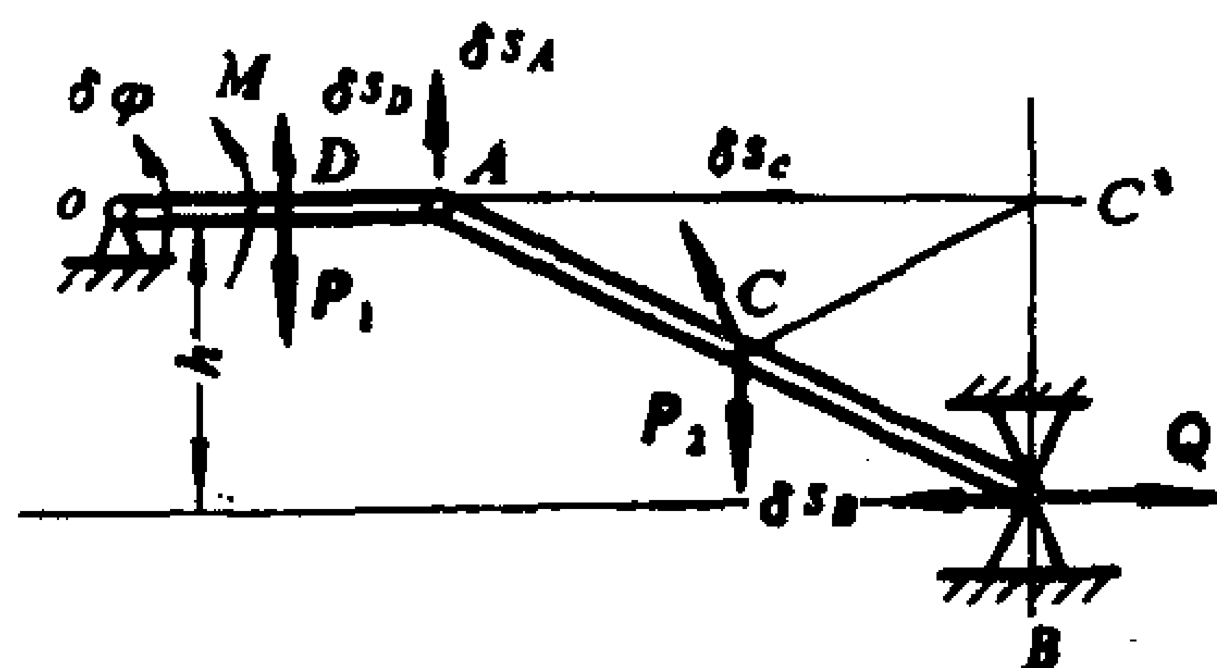
$$\delta\varphi_2=\delta\varphi_1\frac{\cos\alpha}{\cos^2\varphi_1+\cos^2\alpha\sin^2\varphi_1}$$

于是有

$$\frac{M_1}{M_2}=\frac{\cos\alpha}{\cos^2\varphi_1+\cos^2\alpha\sin^2\varphi_1}$$

由上式可以看到，分母的最大值为1（当$\varphi_1=0^\circ, 180^\circ, \cdots$），最小值为 $\cos^2\alpha$（当 $\varphi_1=90^\circ$，270°，…）主动力矩之比在$\cos\alpha$与$1/\cos\alpha$之间作周期性变化，主动轴转一圈分母最大值与最小值各出现两次。

例2-3 试求图2-3中机构在所示位置上作用于O轴上的平衡力矩。已知$OD=AD=20\text{cm}$，$AB=2AC=145\text{cm}$，$h=17\text{cm}$，$P_1=120\text{N}$，$P_2=400\text{N}$，$Q=3600\text{N}$。



例2-3图

［解］ 令OA杆向上转动的虚位移$\delta\varphi$，杆上D点虚位移

$$\delta S_D=\frac{1}{2}\delta S_A=\frac{1}{2}OA\delta\varphi$$

AB杆作平面运动，其上 A、C、B 点的虚位移δS_A、δS_C、δS_B用瞬心法可找出

$$\frac{\delta S_A}{AC^*}=\frac{\delta S_C}{CC^*}=\frac{\delta S_B}{BC^*}$$

$$\delta S_C=\frac{CC^*}{AC^*}\delta S_A \qquad \delta S_B=\frac{BC^*}{AC^*}\delta S_A$$

根据虚位移原理

$$M\delta\varphi-P_1\delta S_D-P_2\delta S_C\cos\alpha-Q\delta S_B=0$$

或
$$\left(M-P_1\cdot\frac{1}{2}OA-P_2\frac{CC^*}{AC^*}\frac{AC^*}{AB}OA\right.$$
$$\left.-Q\frac{BC^*}{AC^*}OA\right)\delta\varphi=0$$

∵ $\delta\varphi\neq 0$，得

$$M=P_1\cdot\frac{1}{2}OA+P_2\frac{CC^*}{AC^*}\frac{AC^*}{AB}OA$$
$$+Q\frac{BC^*}{AC^*}OA$$

∵ $CC^*=AC=BC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}145(\text{cm})$

$$AC^*=\sqrt{(AB)^2-(BC^*)^2}=\sqrt{(AB)^2-(h)^2}$$
$$=144(\text{cm})$$

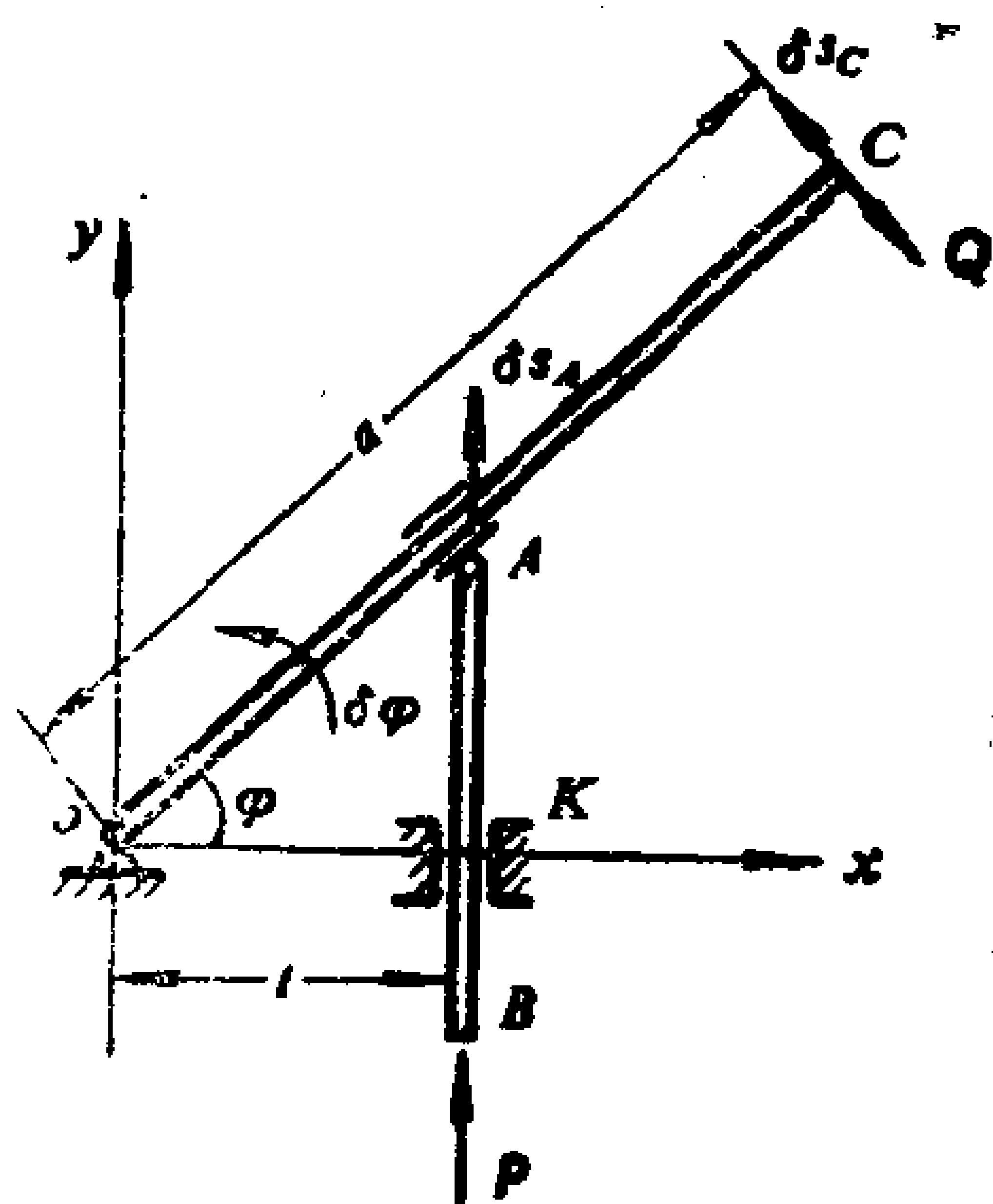
∴ $M=27\ 4(\text{N.m})$

例2-4 在连杆机构中，当曲柄OC绕水平轴O摆动时，滑块A沿曲柄OC滑动并带动一沿铅垂导板K运动的杆子AB，已知$OC=a$，$OK=l$，问C点垂直力Q多大才能平衡P。

［解］ 设机构在图示位置处于平衡。令曲柄OC绕水平轴O摆动的虚位移$\delta\varphi$，则相应的A点(即B点)和C点的虚位移分别为δS_A和δS_C，且

$$\delta S_A=\delta y_A=\delta(l\text{tg}\varphi)=\frac{l}{\cos^2\varphi}\delta\varphi$$

$$\delta S_C=a\delta\varphi$$



例2-4图

根据虚位移原理

$$P\delta S_A-\theta\delta S_C=0$$

或

$$\left(P\frac{l}{\cos^2\varphi}-Qa\right)\delta\varphi=0$$

∵ $\delta\varphi\neq0$，得

$$Q=\frac{Pl}{a\cos^2\varphi}$$

例2-5 均质杆$AB=a$，重P，一端靠在铅垂光滑墙上，如欲使杆子在任意位置都能平衡，试求此侧面的形状。

〔解〕 建立图示坐标系oxy，杆AB在平衡位置，受重力P的作用。

根据虚位移原理$P\delta y=0$

∵ $P\neq0$，则需$\delta y_C=0$，即$y_C=$常数

当杆铅垂时，$y_C=a/2$，则在任意位置时

$$y_C=y_A+\frac{a}{2}\cos\varphi=\frac{1}{2}a \qquad (1)$$

而此时

$$x_A = a\sin\varphi \quad (2)$$

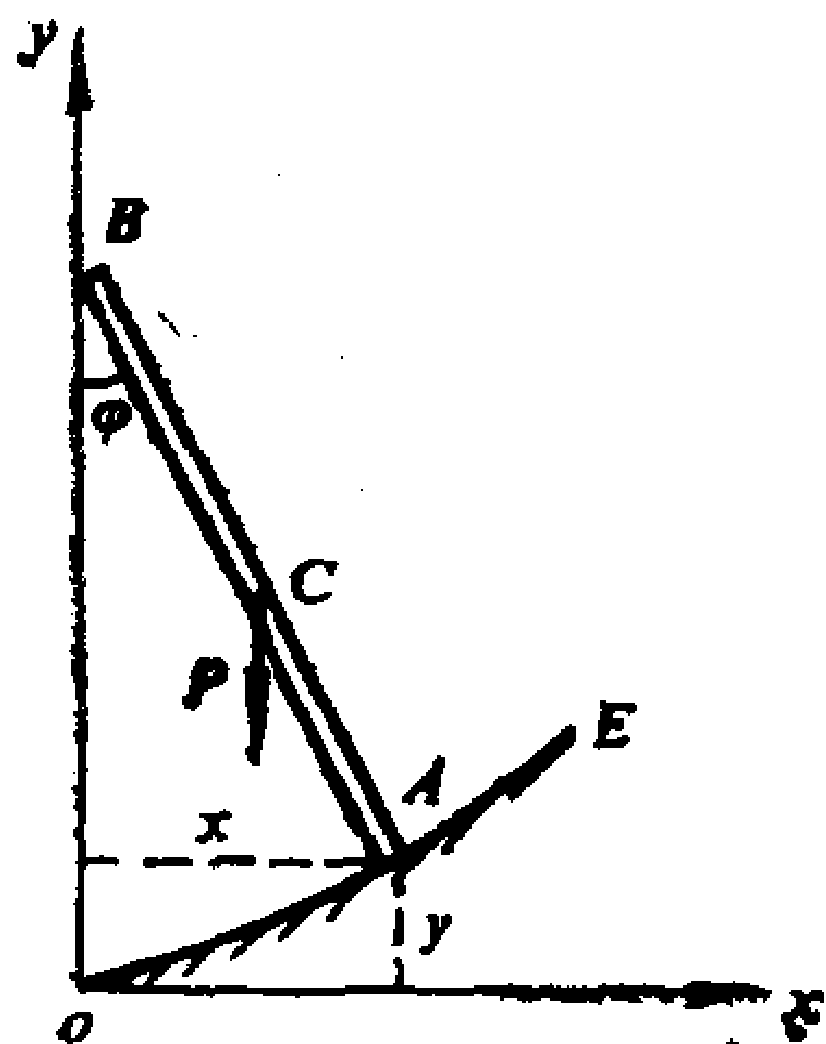
由(1)、(2)两式消去参数φ，得

$$x_A^2 + (2y_A - a)^2 = a^2$$

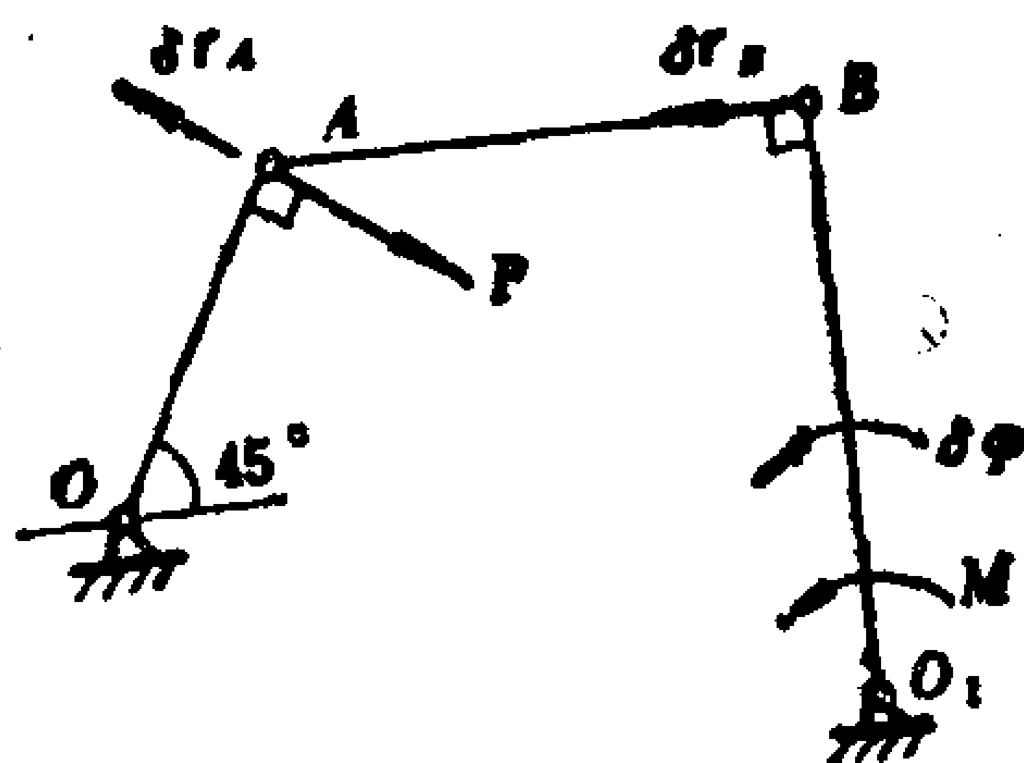
侧面呈椭圆形状。

例2-6 在铰接四连杆机构的连杆OA上作用一力P。为使机构在给定的位置上平衡。求作用于长度为r的连杆O_1B上的力偶矩。

［解］ 令O_1B杆绕O_1轴逆时针方向转动虚位移$\delta\phi$，则连杆AB两端的虚位移为$\delta \boldsymbol{r}_A$，$\delta \boldsymbol{r}_B$，由速度投影定理，得



例2-5图



例2-6图

$$\delta r_A \cos 45^\circ = \delta r_B，\text{即} \delta r_A = \sqrt{2}\,\delta r_B$$

而 $$\delta r_B = O_1B\delta\varphi，\ \therefore \delta\varphi = \frac{\delta r_B}{O_1B} = \frac{1}{r}\delta r_B$$

根据虚位移原理

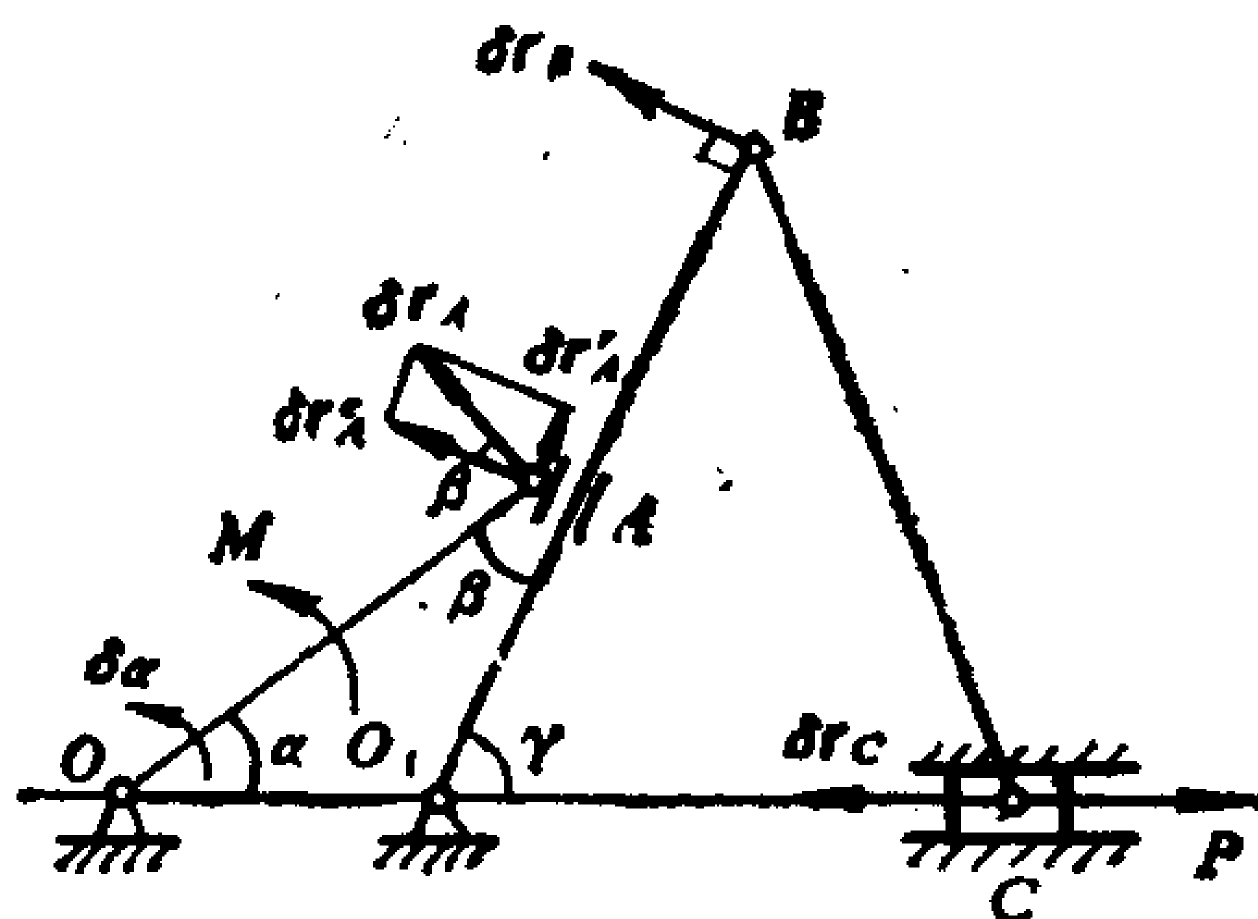
$$-P\delta r_A + M\delta\varphi = 0$$

得

$$M=\frac{P\delta r_A}{\delta\varphi}=\frac{P\sqrt{2}\,\delta r_B}{\frac{1}{r}\delta r_B}=Pr\sqrt{2}$$

例2-7 在滑块C上作用力$P=25$N，沿OC方向。$OA=17$cm，$OO_1=9$cm，$O_1B=BC=50$cm。略去摩擦，当$O_1A=10$cm时，为了使机构平衡，求作用于曲柄OA上力矩M的值。

［解］ 令曲柄OA绕O轴逆时针转动虚位移$\delta\alpha$，设$\angle AOO_1=\alpha$，$\angle OAO_1=\beta$，$\angle BO_1C=\gamma$，则OA杆上A点虚位移为δr_A，BC杆上B，C点的虚位移分别为δr_B和δr_C，且$\delta r_A=OA\delta\alpha$。因滑块$A$作复合运动，$A$点的虚位移$\delta r_A$分解为$\delta r_A^r$与$\delta r_A^e$：



例2-7图

$$\delta r_A^e=\delta r_A\cos\beta=OA\cos\beta\delta\alpha$$

又

$$\frac{\delta r_B}{\delta r_A^e}=\frac{O_1B}{O_1A}，\quad 即\delta r_B=\frac{O_1B}{O_1A}\delta r_A^e$$

杆BC作平面运动，其两端虚位移δr_B与δr_C用速度投影定理

可求得

$$\delta r_C \cos\gamma = \delta r_B \cos(2\gamma - 90^\circ) = \delta \gamma_B \sin 2\gamma$$

即

$$\delta r_C = 2\delta r_B \sin\gamma = 2\frac{O_1B}{O_1A} OA \cos\beta \sin\gamma \delta\alpha$$

∵ $\dfrac{\sin\gamma}{OA} = \dfrac{\sin\beta}{O_1O}$，得 $\sin\gamma = \dfrac{OA}{OO_1}\sin\beta$

由余弦定理

$$\cos\beta = \frac{(OA)^2 + (O_1A)^2 - OO_1^2}{2OA \cdot O_1A} = 0.9058$$

$$\beta = 25^\circ 4', \quad \sin 2\beta = 0.7675$$

根据虚位移原理

$$M\delta\alpha - P\delta\gamma_C = 0$$

即

$$\left(M - P\frac{O_1B(OA)^2}{O_1A\ O_1O}\sin 2\beta\right)\delta\alpha = 0$$

∵ $\delta\alpha \neq 0$ 得

$$M = P\frac{O_1B(OA)^2}{O_1A\ O_1O}\sin 2\beta = 30.8(\text{N}\cdot\text{m})$$

例2-8 椭圆规尺AB上联接一个边长为$2a$的等边三角形ABD。为使力P_1、P_2与平行于AB的力P_3平衡，求作用于长度为a的曲柄上的力矩M。

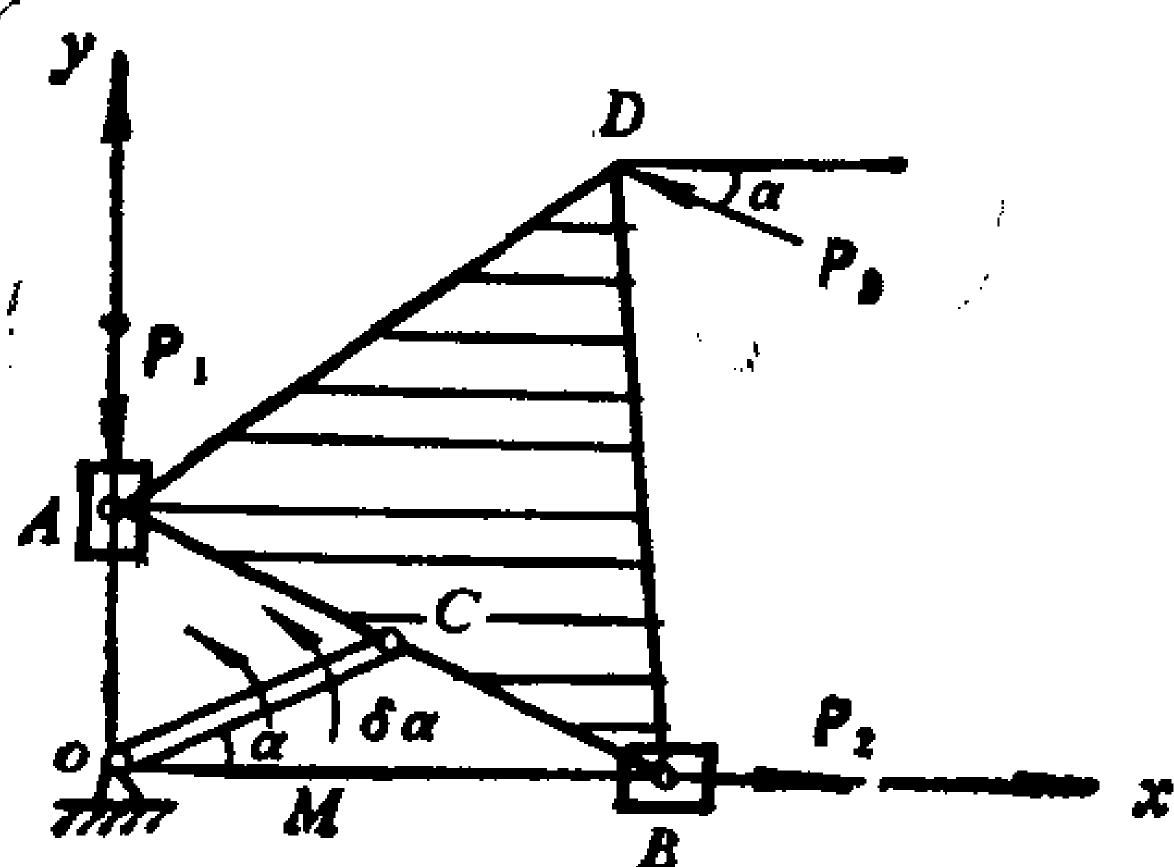
［解］ 设$\angle COB = \alpha$，令曲柄OC绕O轴逆时针转动虚位移为$\delta\alpha$。我们有$x_B = 2a\cos\alpha$，$y_A = 2a\sin\alpha$

$$x_D = 2a\sin\,[180^\circ - (90^\circ - \alpha + 60^\circ)] = 2a\sin(30^\circ + \alpha)$$

$$y_D = 2a\cos(30^\circ + \alpha) + 2a\sin\alpha$$

$$\delta x_B = -2a\sin\alpha\,\delta\alpha$$

2
刘



例2-8图

$$\delta y_A = 2a\cos\alpha\delta\alpha$$

$$\delta x_D = 2a\cos(30^\circ + \alpha)\delta\alpha$$

$$\delta y_D = -2a\sin(30^\circ + \alpha)\delta\alpha + 2a\cos\alpha\delta\alpha$$

P_1，P_2，P_3在坐标轴上的投影

$$P_{1y} = -P_1,\quad P_{2x} = P_2,\quad P_{3x} = -P_3\cos\alpha,$$

$$P_{3y} = P_3\sin\alpha$$

根据虚位移原理

$$M\delta\alpha + P_{2x}\delta x_B + P_{1y}\delta y_A + P_{3x}\delta x_D + P_{3y}\delta y_D = 0$$

或

$$M\delta\alpha + P_2(-2a\sin\alpha\delta\alpha) - P_1\cdot 2a\cos\alpha\delta\alpha - P_3\cos\alpha\cdot 2a\cos(30^\circ+\alpha)\delta\alpha + P_3\sin\alpha[-2a\sin(30^\circ+\alpha)\delta\alpha + 2a\cos\alpha\delta\alpha] = 0$$

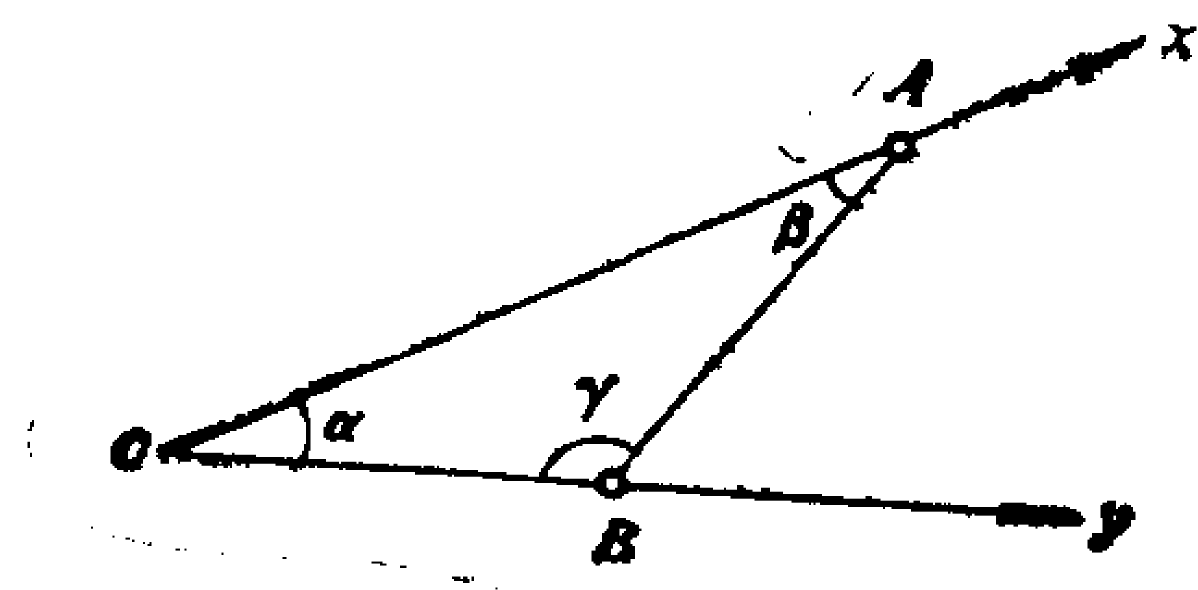
$\because \delta\alpha \neq 0$，得

$$M = 2P_1a\cos\alpha + 2P_2a\sin\alpha + 2P_3\cos\alpha\cos(30^\circ+\alpha) + 2P_3a\sin\alpha\cdot\sin(30^\circ+\alpha) - 2P_3a\sin\alpha\cos\alpha$$

当$\alpha = 30^\circ$时(即$DB \perp OB$)

$$M = a(P_2 + \sqrt{3}P_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}P_3)$$

例2-9 A、B两点用一不可伸长的线连结，此两点可沿固定直线ox，oy滑动，ox与oy成角α。这两点受o点排斥，排斥力与距离成正比，对A点的力其比例系数为k_1，对B点的力其比例系数为k_2，求在平衡位置时线与直线oA及oB所成之角β与γ。



例2-9图

［解］ 设$oA=r_A$，$oB=r_B$。系统的势函数

$$V=\frac{1}{2}k_1r_A^2+\frac{1}{2}k_2r_B^2 \tag{1}$$

由正弦定理

$$\frac{r_A}{\sin\gamma}=\frac{AB}{\sin\alpha}=\frac{r_B}{\sin[180°-(\alpha+\gamma)]}$$

得

$$r_A=\frac{AB}{\sin\alpha}\sin\gamma \tag{2}$$

$$r_B=\frac{AB}{\sin\alpha}\sin(\alpha+\gamma) \tag{3}$$

将(2)，(3)代入(1)，得

$$V=\frac{1}{2}k_1\left(\frac{AB}{\sin\alpha}\right)^2\sin^2\gamma$$

$$+\frac{1}{2}k_2\left(\frac{AB}{\sin\alpha}\right)^2\sin^2(\alpha+\gamma)$$

系统平衡时，有

$$\frac{\partial V}{\partial r}=0$$

即

$$k_1\left(\frac{AB}{\sin\alpha}\right)^2\sin\gamma\cos\gamma+k_2\left(\frac{AB}{\sin\alpha}\right)^2\sin(\alpha+\gamma)$$
$$\cdot\cos(\alpha+\gamma)=0$$

$\left(\frac{AB}{\sin\alpha}\right)^2\neq0$，消去$\left(\frac{AB}{\sin\alpha}\right)^2$，得

$$k_1\sin2\gamma+k_2\sin2(\alpha+\gamma)=0 \tag{4}$$

或

$$\sin2\gamma(k_1+k_2\cos2\alpha)=-k_2\sin2\alpha\cos2\gamma$$

于是

$$\mathrm{tg}2\gamma=-\frac{k_2\sin2\alpha}{k_1+k_2\cos2\alpha}$$

关系(4)又可写成

$$k_1\sin2(\alpha+\beta)+k_2\sin2\beta=0$$

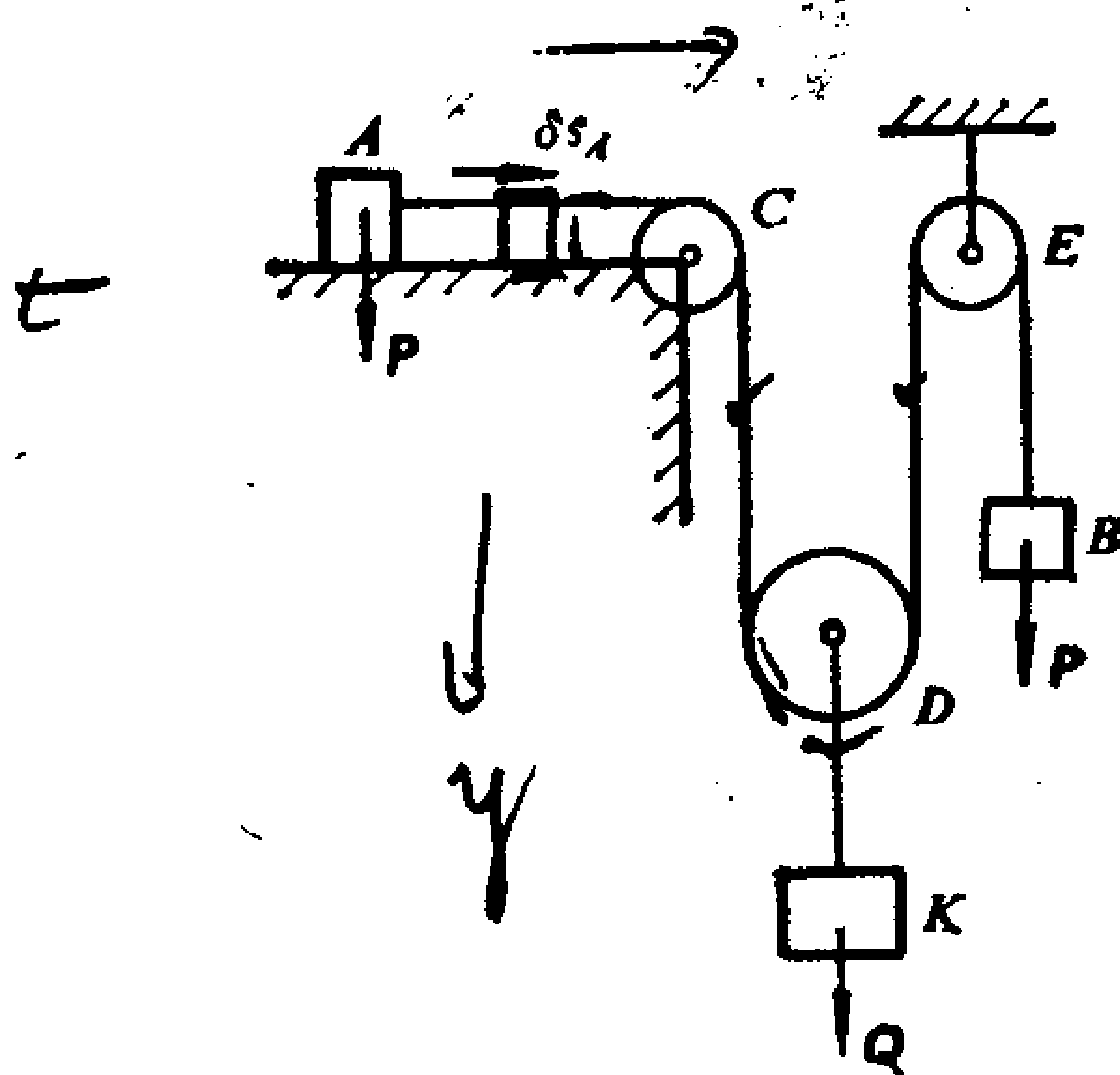
由此解得

$$\mathrm{tg}2\beta=-\frac{k_1\sin2\alpha}{k_2+k_1\cos2\alpha}$$

例2-10 两重量相等的重物A与B分别系于一无重且不可伸长的绳之两端，此绳自A起平行于水平面延伸，绕过定滑轮C再分别绕过动滑轮D、定滑轮E，另端挂上重物B，重物K重Q挂在D上，求重物A与B中每一重物的重量P以及重物A对水平面的摩擦系数。

［解］ 系统存在摩擦，将摩擦力视为主动力，仍可用虚位移原理解系统的平衡问题。系统有两个自由度。

令重物B保持不动，重物A沿水平面有向右方向的虚位



例2-10图

移δs_A，则重物K有铅垂向下的虚位移$\delta S_K=\frac{\delta S_A}{2}$根据虚位移原理

$$Q\delta S_K-F\delta S_A=0 \tag{1}$$

且

$$F=Pf \tag{2}$$

再令重物A保持不动，重物B有铅垂向下的虚位移δS_B，则重物K有向上的虚位移$\delta S_K=\delta S_B/2$，根据虚位移原理

$$-Q\delta S_K+P\delta S_B=0 \tag{3}$$

由(3)式得

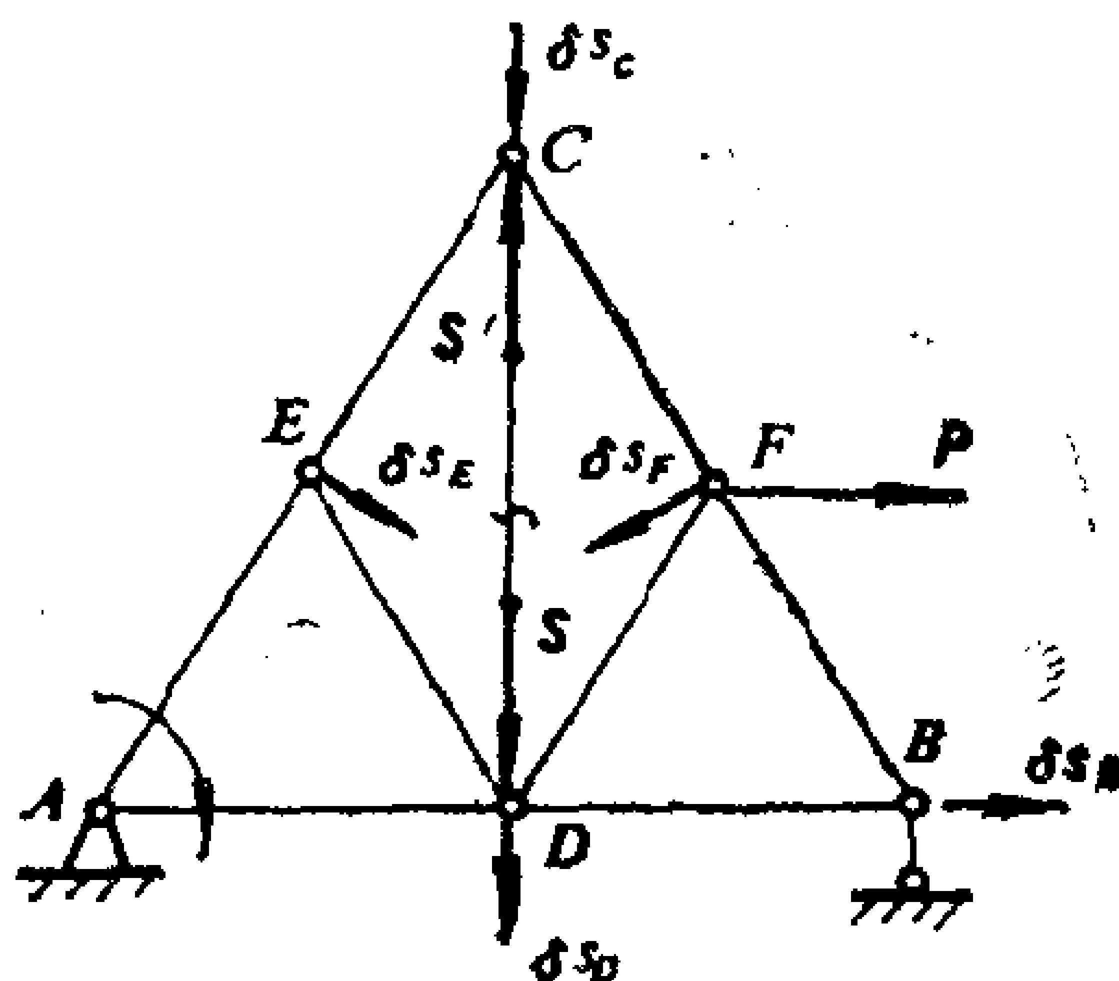
$$P=\frac{\delta S_K}{\delta S_B}Q=\frac{Q}{2}$$

代入(2)，(1)得$f=1$

例2-11 图示平面桁架，ABC为等边三角形，D、E、F分别为三边的中点，求CD杆的内力。

[解] 将CD杆截断，代之内力$\boldsymbol{S}$和$\boldsymbol{S}'$，视为主动力

令D点有铅垂向下的虚位移δS_D，则相应E、B有虚位移



例2-11图

δS_E和δS_B。因ΔBDF作平面运动，由速度瞬心定理知B点是瞬心，所以$\delta S_B=0$，F点虚位移δS_F如图示。再由速度投影定理，得C点是杆EC和杆FC的共同瞬心，所以$\delta s_C=0$。

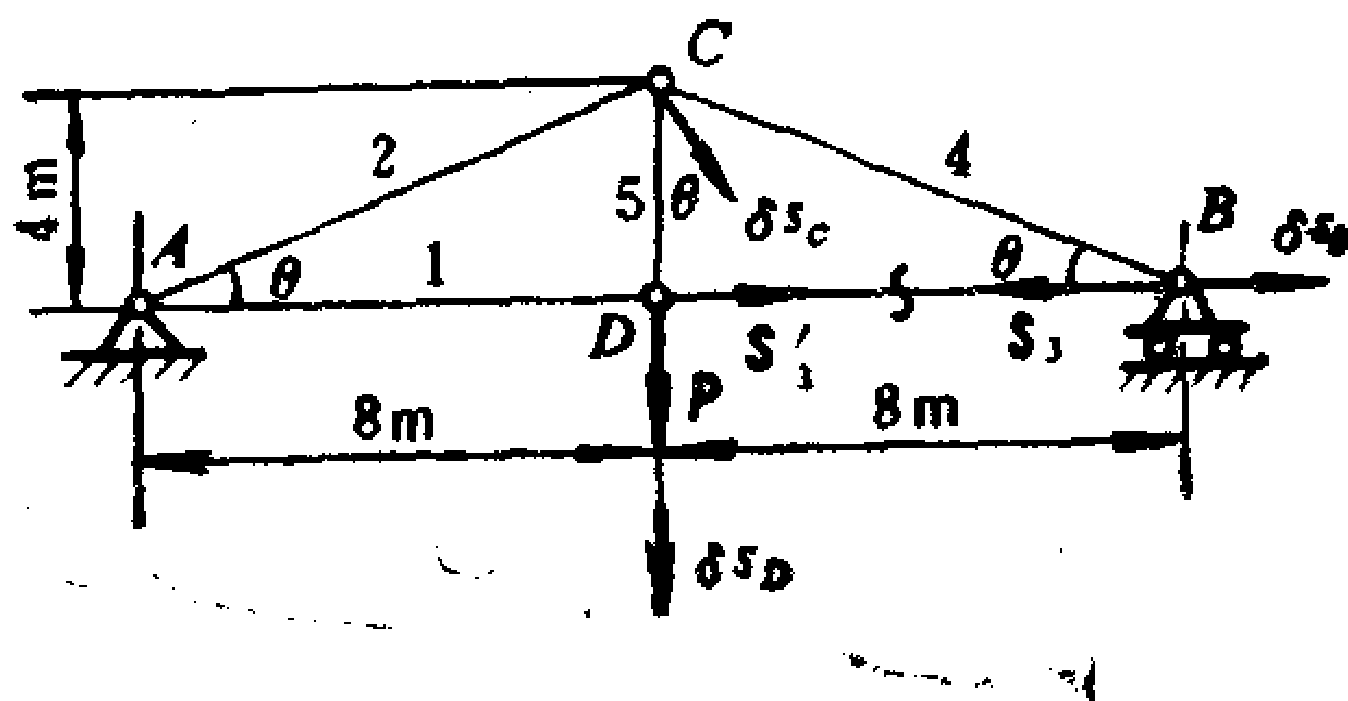
根据虚位移原理

$$S\cdot\delta S_D-P\cos 30^\circ\delta S_F=0$$

因 $\quad \delta S_B=\delta S_D=\delta S_F$

得 $\quad S=\dfrac{\delta S_F}{\delta S_D}P\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}P \qquad CD$杆受压力

例2-12 求图示桁架中杆3的内力，已知$AD=DB=8\text{m}$，$DC=4\text{m}$，$P=30\text{kN}$。



例2-12图

［解］ 将3杆截断代之以内力$\boldsymbol{S}_3$和$\boldsymbol{S}'_3$，如图示。

令：D点有铅垂向下的虚位移δS_D，则B点相应有水平向右的虚位移δS_B。

根据虚位移原理

$$P\delta S_D - S_3\delta S_B = 0 \tag{1}$$

由运动学知，由于三角架ACD作定轴转动，则

$$\frac{\delta S_C}{AC} = \frac{\delta S_D}{AD} \qquad \text{且}\delta S_C\text{应与杆}AC\text{相垂直}$$

由于杆BC作平面运动，根据速度投影定理有

$$\delta S_C\cos(90° - 2\theta) = \delta S_B\cos\theta$$

于是，

$$\delta S_B = \frac{AC}{AD}2\sin\theta\delta S_D = 2\mathrm{tg}\theta\delta S_D$$

代入(1)式

$$(P - S_3\cdot 2\mathrm{tg}\theta)\delta S_D = 0$$

$\because \delta S_D \neq 0$，得

$$S_3 = \frac{1}{2}P\mathrm{ctg}\theta$$

由几何关系知

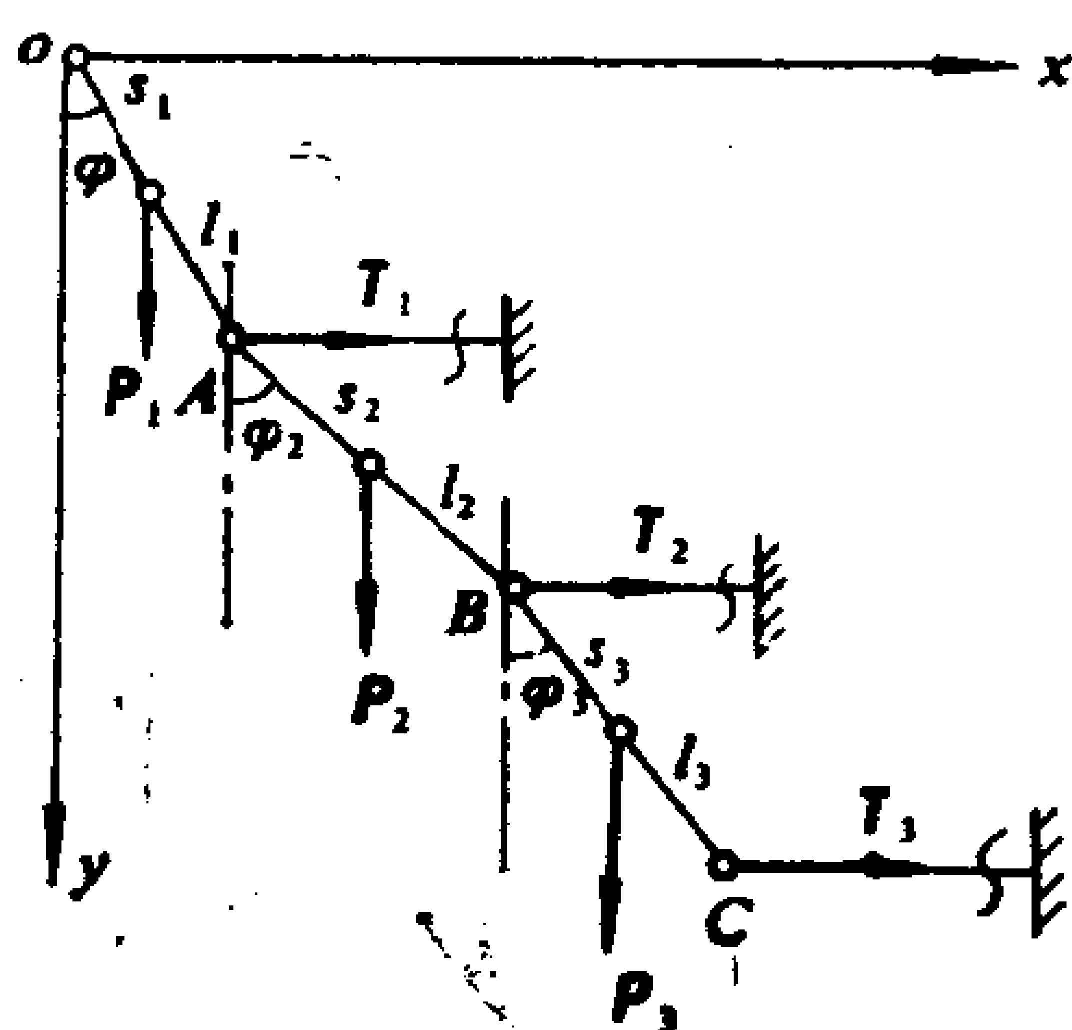
$$\mathrm{ctg}\theta = \frac{AD}{CD} = \frac{8}{4} = 2$$

代入上式，得

$$S_3 = P = 30\mathrm{kN}$$

例12-13 三杆系统如图，各杆重心距其上端为S_1、S_2、S_3，各杆长为l_1，l_2，l_3，重为P_1，P_2，P_3。在、A、B、C处水平地引出三条绳子，平衡时杆与铅垂线夹角为φ_1，φ_2，φ_3。试求各绳张力T_1，T_2，T_3。

［解］ 将三条绳子截断代之绳子张力T_1、T_2、T_3，如图



例2-13图

示。根据虚位移原理直角坐标形式

$$\sum_{i=1}^{N}(F_{ix}\delta x_i+F_{iy}\delta y_i)=0 \qquad (1)$$

又

$$y_1=S_1\cos\varphi_1, \qquad \delta y_1=-S_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1$$

$$x_A=l_1\sin\varphi, \qquad \delta x_A=l_1\cos\varphi_1\delta\varphi_1$$

$$y_2=l_1\cos\varphi_1+s_2\cos\varphi_2,$$

$$\delta y_2=-l_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1-S_2\sin\varphi_2\delta\varphi_2$$

$$x_B=l_1\sin\varphi_1+l_2\sin\varphi_2,$$

$$\delta x_B=l_1\cos\varphi_1\delta\varphi_1+l_2\cos\varphi_2\delta\varphi_2$$

$$y_3=l_1\cos\varphi_1+l_2\cos\varphi_2+S_3\cos\varphi_3$$

$$\delta y_3=-l_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1-l_2\sin\varphi_2\delta\varphi_2-S_3\sin\varphi_3\delta\varphi_3$$

$$x_C=l_1\sin\varphi_1+l_2\sin\varphi_2+l_3\sin\varphi_3$$

$$\delta x_C=l_1\cos\varphi_1\delta\varphi_1+l_2\cos\varphi_2\delta\varphi_2+l_3\cos\varphi_3\delta\varphi_3$$

$$F_{1y}=P_1,\ F_{2y}=P_2,\ F_{3y}=P_3,\ F_{Ax}=T_1$$

$$F_{Bx}=T_2,\ F_{cx}=T_3$$

将以上诸式代入(1)，得

$$T_1\delta x_A+T_2\delta x_B+T_3\delta x_C+P_1\delta y_1+P_2\delta y_2$$
$$+P_3\delta y_3=0$$

或

$$(T_1l_1\cos\varphi_1+T_2l_1\cos\varphi_1+T_3l_1\cos\varphi_1-P_1S_1\sin\varphi_1$$
$$-P_2l_1\sin\varphi_1-P_3l_1\sin\varphi_1)\ \delta\varphi_1+\ (T_2l_2\cos\varphi_2$$
$$+T_3l_2\cos\varphi_2-P_2S_2\sin\varphi_2-P_3l_2\sin\varphi_2)\ \delta\varphi_2$$
$$+(T_3l_3\cos\varphi_3-P_3S_3\sin\varphi_3)\delta\varphi_3=0$$

因$\delta\varphi_1$，$\delta\varphi_2$，$\delta\varphi_3$彼此独立，于是得

$$T_1l_1\cos\varphi_1+T_2l_1\cos\varphi_1+T_3l_1\cos\varphi_1-P_1S_1\sin\varphi_1$$
$$-P_2l_1\sin\varphi_1-P_3l_1\sin\varphi_1=0 \tag{2}$$

$$T_2l_2\cos\varphi_2+T_3l_2\cos\varphi_2-P_2S_2\sin\varphi_2-P_3l_2\sin\varphi_2$$
$$=0 \tag{3}$$

$$T_3l_3\cos\varphi_3-P_3\sin\varphi_3S_3=0 \tag{4}$$

由(4)解得

$$T_3=\frac{S_3}{l_3}P_3\mathrm{tg}\varphi_3 \tag{5}$$

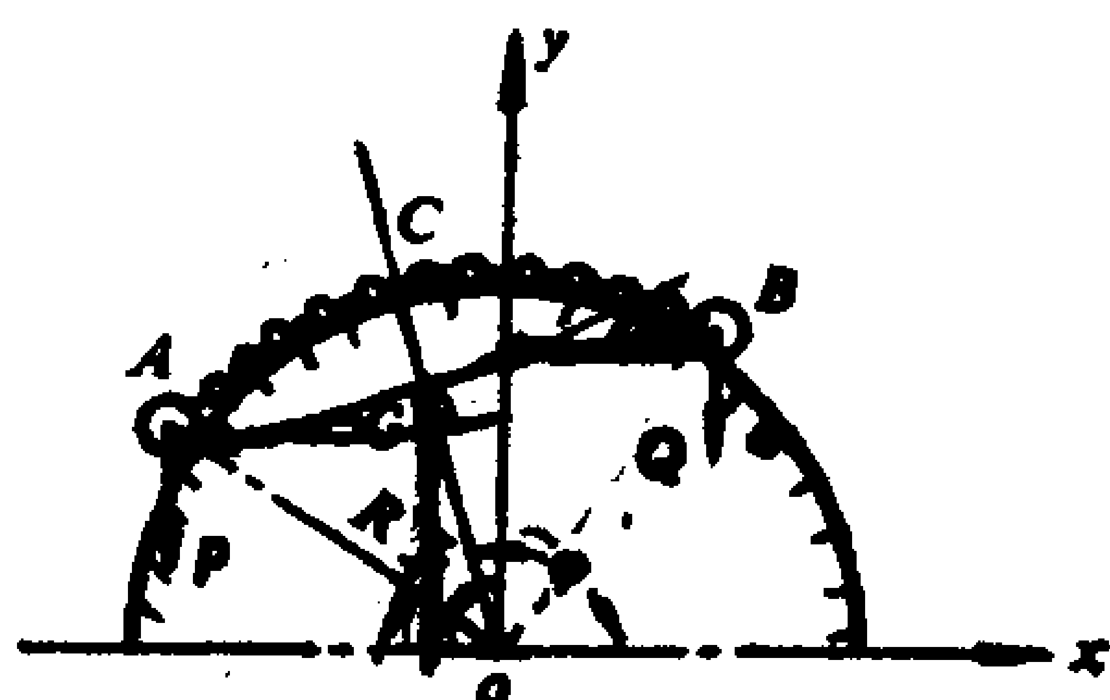
将(5)代入(3)，得

$$T_2=P_3\mathrm{tg}\varphi_2+P_2\frac{S_2}{l_2}\mathrm{tg}\varphi_2-\frac{S_3}{l_3}P_3\mathrm{tg}\varphi_3 \tag{6}$$

将(5)、(6)代入(2)，得

$$T_1=\frac{S_1}{l_1}P_1\mathrm{tg}\varphi_1+P_2\mathrm{tg}\varphi_1+P_3\mathrm{tg}\varphi_1$$
$$-(P_3+P_2\frac{S_2}{l_2})\mathrm{tg}\varphi_2$$

例2-14 线密度为ρ的均质重链，其两端固连着重量分别为P和Q的小球A和B，链条放在半径为R的光滑圆柱面上，如图所示。圆柱轴线水平放置，链条所在平面与圆柱轴线垂直，$\angle AoC=\alpha$，C为链条的中点，求平衡时oC线与水平线夹角φ。



例2-14图

[解] 应用虚位移原理直角坐标形式$\sum\limits_{i=1}^{N} F_{iy}\delta y_i=0$求解。均质链重$P_{AB}=\rho g\cdot 2R\alpha$

重心 $y_G=oG\sin(180°-\varphi)=\dfrac{R\sin\alpha}{\alpha}\sin\varphi$

小球A重心 $y_A=R\sin[180°-(\alpha+\varphi)]=R\sin(\alpha+\varphi$

小球B重心 $y_B=R\sin(\varphi-\alpha)$

坐标y_G、y_A、y_B的变分为

$$\delta y_G=\frac{R\sin\alpha}{\alpha}\cos\varphi\delta\varphi$$

$$\delta y_A=R\cos(\alpha+\varphi)\delta\varphi$$

$$\delta y_B=R\cos(\varphi-\alpha)\delta\varphi$$

将以上诸式代入原理的坐标形式

$$-P_{AB}\delta y_G-P\delta y_A-Q\delta y_B=0$$

或

$$\left[-\rho g\cdot 2R\alpha\frac{R\sin\alpha}{\alpha}\cos\varphi-PR\cos(\varphi+\alpha)\right.$$

$$\left.-QR\cos(\varphi-\alpha)\right]\delta\varphi=0$$

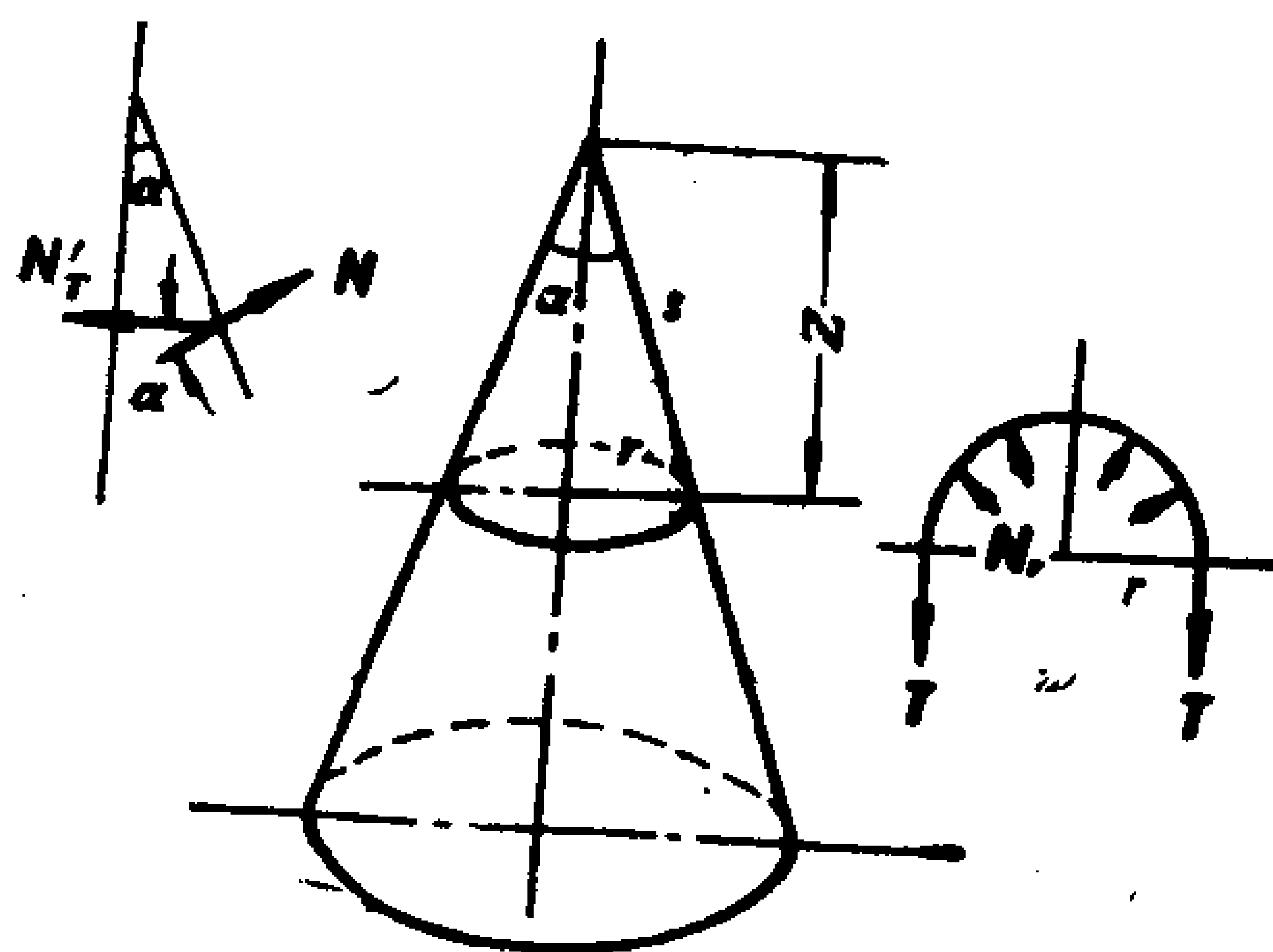
因$\delta\varphi\neq0$，得

$$2\rho gR^2\sin\alpha\cos\varphi+PR\cos(\varphi-\alpha)+QR\cos(\varphi+\alpha)=0$$

化简得

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{(P+Q)\cos\alpha+2\rho gR\sin\alpha}{(Q-P)\sin\alpha}$$

例2-15 重W的橡皮圈水平地套在半顶角为α的粗糙直立正圆锥面上，摩擦角为ε，求证平衡时橡皮圈中的张力在$\frac{W}{2\pi}\mathrm{ctg}(\alpha+\varepsilon)$与$\frac{W}{2\pi}\mathrm{ctg}(\alpha-\varepsilon)$之间。



例2-15图

［解］ 橡皮圈在正圆锥面上平衡，其所受约束是非理想约束，现将摩擦力作为主动力，则原约束仍可认为理想约束，可以应用虚位移原理求解。现分别计算橡皮圈的张力T，重力W和摩擦力F作的虚功。

设橡皮圈在锥面上的平衡位置离顶端的高度为z，橡皮圈内的张力T。我们有

$$r=z\operatorname{tg}\alpha$$

其变分

$$\delta r=\operatorname{tg}\alpha\delta z$$

橡皮圈对锥面上产生均布压力 N'_T（与锥面对橡皮圈产生的均布反力大小相等）。经过计算，橡皮圈内张力T与均布反力N'_T有如下关系

$$T=N'_T r$$

1° 张力T作的虚功

$$\delta A_T=T\cdot 2\pi\delta r=2\pi T\operatorname{tg}\alpha\delta z$$

2° 橡皮圈重力W作的虚功

$$\delta A_W=W\delta z$$

为计算摩擦力F作的虚功，先计算摩擦力F。

$$\text{法向反力}N=N_T+N_W=2\pi rN'_T\cos\alpha+\frac{W}{2\pi r}\sin\alpha\cdot 2\pi r=2\pi T\cos\alpha+W\sin\alpha$$

$$\text{摩擦力}F=N\operatorname{tg}\varepsilon=(2\pi T\cos\alpha+W\sin\alpha)\operatorname{tg}\varepsilon$$

$$\text{斜边}S=\frac{z}{\cos\alpha}$$

其变分

$$\delta S=\delta\left(\frac{z}{\cos\alpha}\right)=\frac{\delta z}{\cos\alpha}$$

3° 摩擦力F作的虚功

$$\delta A_F=F\delta S=\operatorname{tg}\varepsilon(2\pi T\cos\alpha+W\sin\alpha)\frac{\delta z}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\varepsilon(2\pi T+W\operatorname{tg}\alpha)\delta z$$

橡皮圈在锥面上平衡，因圈内张力变化，导致橡皮圈在锥面有向上或向下滑动的趋势，而引起摩擦力方向的改变，现分别考虑如下。

1° 若摩擦力方向沿锥面向下，根据虚位移原理

$$\sum \delta A = -\delta A_T + \delta A_W + \delta A_F = 0$$

即

$$\left[-2\pi T \operatorname{tg}\alpha + W + \operatorname{tg}\varepsilon(2\pi T\cos\alpha + W\sin\alpha)\frac{1}{\cos\alpha}\right]$$

$$\delta z = 0$$

因$\delta z \neq 0$得

$$T = \frac{W}{2\pi}\left(\frac{1+\operatorname{tg}\varepsilon\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varepsilon}\right) = \frac{W}{2\pi}\operatorname{ctg}(\alpha-\varepsilon)$$

2° 若擦摩力方向沿锥面向上

$$\sum \delta A = -\delta A_T + \delta A_W - \delta A_F = 0$$

即$$\left[-2\pi T \operatorname{tg}\alpha + W - \operatorname{tg}\varepsilon(2\pi T\cos\alpha + W\cos\alpha)\frac{1}{\cos\alpha}\right]$$

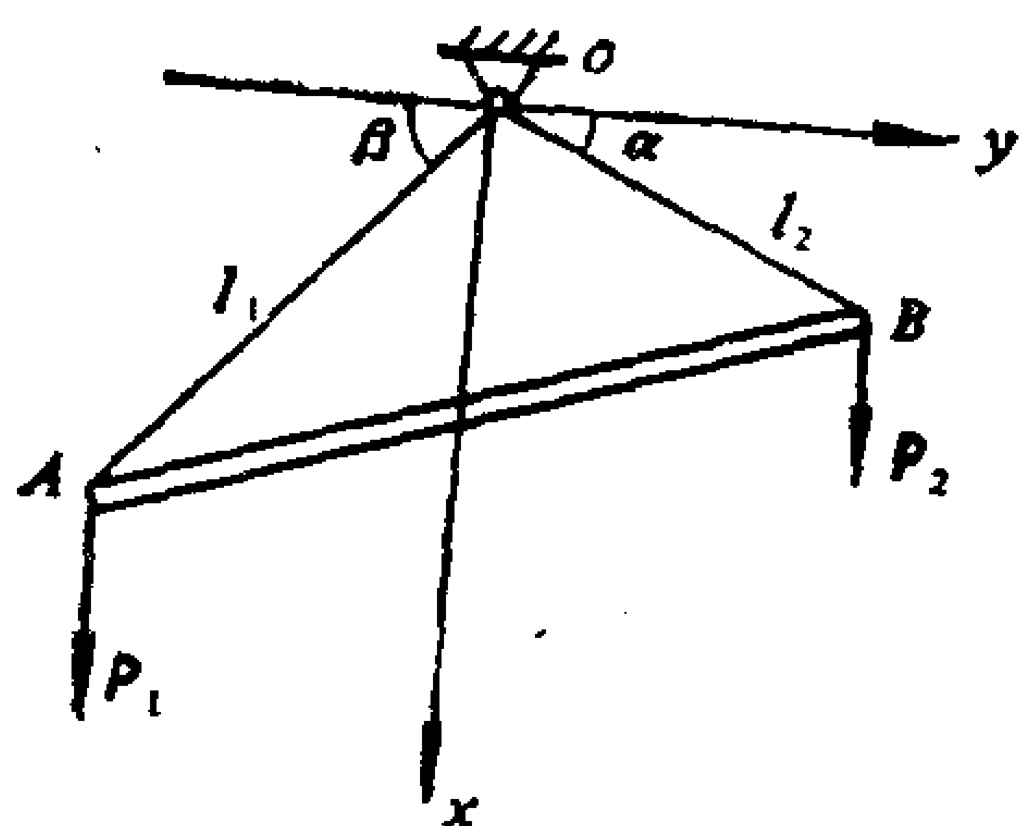
$$\cdot \delta z = 0$$

因 $\delta z \neq 0$，得

$$T = \frac{W}{2\pi}\left(\frac{1-\operatorname{tg}\varepsilon\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varepsilon}\right) = \frac{W}{2\pi}\operatorname{ctg}(\alpha+\varepsilon)$$

平衡时

$$\frac{W}{2\pi}\operatorname{ctg}(\alpha-\varepsilon) \leqslant T \leqslant \frac{W}{2\pi}\operatorname{ctg}(\alpha+\varepsilon)$$



例2-16图

例2-16 一不可伸长的绳跨过一极小滑车，下面悬一无重量的杆。在杆的两端紧缚两重物P_1和P_2。绳长L。杆长l，求该系统的平衡位置。

［解］ 设$oA=l_1$，$oB=l_2$，由题意$L=l_1+l_2$ (1)

$$x_A=l_1\sin\beta,\quad \delta x_A=\delta l_1\sin\beta+l_1\cos\beta\delta\beta$$
$$x_B=l_2\sin\alpha,\quad \delta x_B=\delta l_2\sin\alpha+l_2\cos\alpha\delta\alpha$$

根据虚位移原理

$$P_1\delta x_A+P_2\delta x_B=0$$

即

$$P_1(\delta l_1\sin\beta+l_1\cos\beta\delta\beta)+P_2(\delta l_2\sin\alpha+l_2\cos\alpha\delta\alpha)=0 \quad (2)$$

由(1)变分，有

$$\delta l_1+\delta l_2=0 \quad 或\delta l_1=-\delta l_2$$

代入(2)，得

$$P_1(\delta l_1\sin\beta+l_1\cos\beta\delta\beta)+P_2(-\delta l_1\sin\alpha+l_2\cos\alpha\delta\alpha)=0$$

或

$$(P_1\sin\beta-P_2\sin\alpha)\delta l_1+P_1l_1\cos\beta\delta\beta+P_2l_2\cos\alpha\delta\alpha=0 \quad (3)$$

由题意

$$l^2=l_1^2+l_2^2+2l_1l_2\cos(\alpha+\beta) \quad (4)$$

将(4)变分，得

$$l_1\delta l_1+l_2\delta l_2+\delta l_1\cdot l_2\cos(\alpha+\beta)+l_1\delta l_2\cos(\alpha+\beta)$$

$$-l_1 l_2 \sin(\alpha+\beta)\cdot(\delta\alpha+\delta\beta)=0$$

化简后，得

$$\delta l_1=\frac{l_1 l_2 \sin(\alpha+\beta)(\delta\alpha+\delta\beta)}{(l_1-l_2)[1-\cos(\alpha+\beta)]} \tag{5}$$

将(5)代入(3)，得

$$(P_1\sin\beta-P_2\sin\alpha)\frac{l_1 l_2 \sin(\alpha+\beta)(\delta\alpha+\delta\beta)}{(l_1-l_2)[1-\cos(\alpha+\beta)]}$$

$$+P_1 l_2\cos\beta\,\delta\beta+P_2 l_2\cos\alpha\,\delta\alpha=0$$

或

$$\left\{\frac{(P_1\sin\beta-P_2\sin\alpha)l_1 l_2\sin(\alpha+\beta)}{(l_1-l_2)[1-\cos(\alpha+\beta)]}+P_2 l_2\cos\alpha\right\}\cdot\delta\alpha$$

$$+\left\{\frac{(P_1\sin\beta-P_2\sin\alpha)l_1 l_2\sin(\alpha+\beta)}{(l_1-l_2)[1-\cos(\alpha+\beta)]}\right.$$

$$\left.+P_1 l_1\cos\beta\right\}\delta\beta=0$$

因$\delta\alpha$，$\delta\beta$ 彼此独立，由此得

$$\frac{(P_1\sin\beta-P_2\sin\alpha)l_1 l_2\sin(\alpha+\beta)}{(l_1-l_2)[1-\cos(\alpha+\beta)]}+P_2 l_2\cos\alpha=0 \tag{6}$$

$$\frac{(P_1\sin\beta-P_2\sin\alpha)l_1 l_2\sin(\alpha+\beta)}{(l_1-l_2)[1-\cos(\alpha+\beta)]}+P_1 l_1\cos\beta=0 \tag{7}$$

由(6)，(7)得

$$P_2 l_2\cos\alpha=P_1 l_1\cos\beta \tag{8}$$

展开(6)，并代入(8)，化简后，得

$$(P_1+P_2)\cos\beta\left(\frac{P_1 l_1}{P_2 l_2}-1\right)=0$$

因$(P_1+P_2)\neq 0$，若$\cos\beta\neq 0$则

$$P_1 l_1=P_2 l_2$$

即

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{l_1}{l_2}=\frac{OA}{OB}$$

由(8)得　$\cos\alpha=\cos\beta$

即　　$\alpha=\beta$

若　　$\cos\beta=0$

则$\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$。

由(4)得　　$l=\pm(l_1-l_2)$

且　　$l_1=L-l_2$

于是　　$y_A=y_B=0$

$$x_A=\frac{1}{2}(L+l)\ ,\qquad x_B=\frac{1}{2}(L-l)$$

或　　$$x_A=\frac{1}{2}(L-l)\ ,\qquad x_B=\frac{1}{2}(L+l)$$

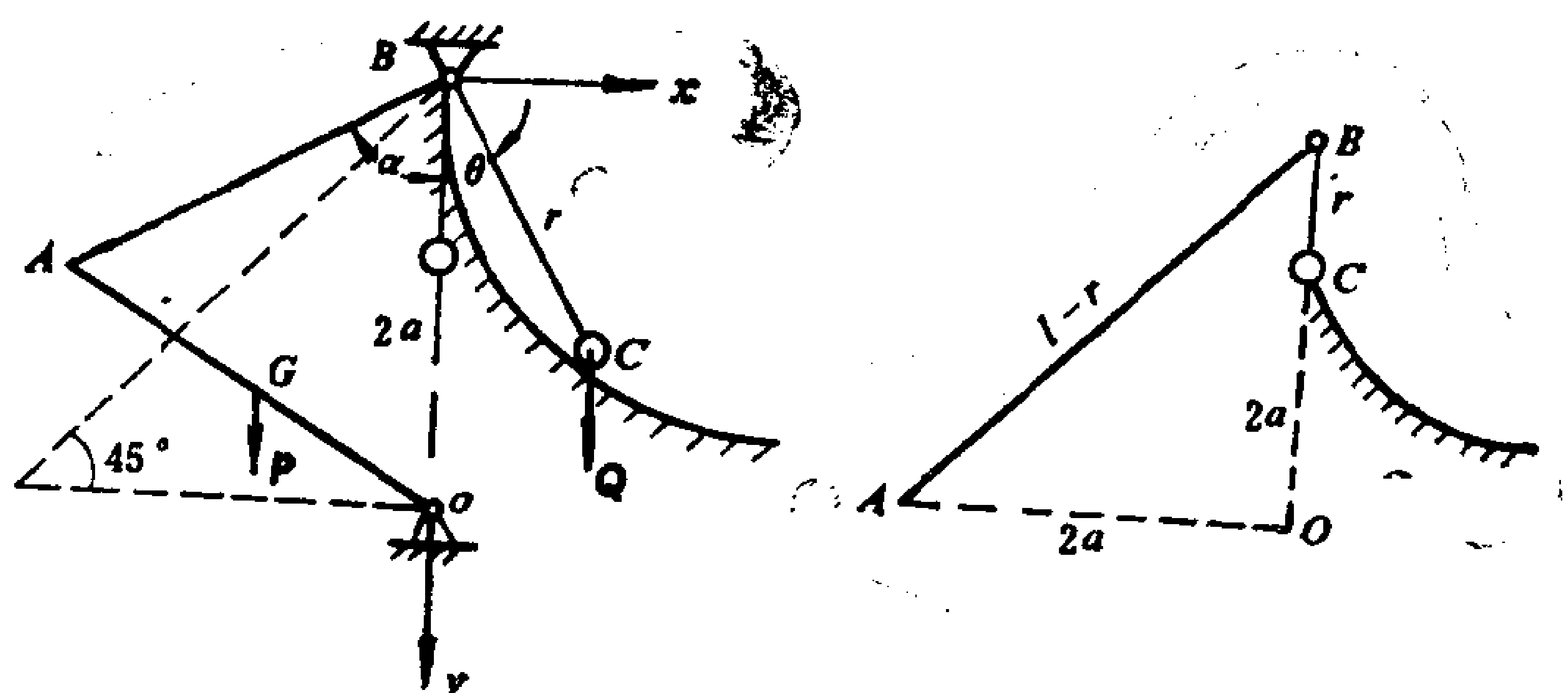
例2-17　图示吊桥OA是一均质薄板形状，其重量是P，长度是$2a$。在薄板边缘的中点上结有粗绳，绳长l。这绳跨过一小滑车，滑车位于点O铅垂上方相距$2a$处。绳的另一端C系有一平衡锤，这锤沿曲线导板无摩擦地滑动。求使该系统能随遇平衡的导板的形状和平衡锤Q的重量

[解]　取极坐标r，θ，如图示，有

$$y_C=r\cos\theta$$

$$\delta y_C=\cos\theta\delta r-r\sin\theta\delta\theta$$

$$y_G=2a-a\cos(180^\circ-2\alpha)=2a+a\cos2\alpha$$



例2-17图

因

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{(2a)^2-\left(\frac{(l-r)}{2}\right)^2}}{2a}$$

$$\cos\alpha=\frac{\frac{l-r}{2}}{2a}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=-1+\frac{(l-r)^2}{8a^2}$$

所以

$$y_a=2a+a\left(-1+\frac{(l-r)^2}{8a^2}\right)=a+\frac{(l-r)^2}{8a}$$

$$\delta y_a=-\frac{l-r}{4a}\delta r$$

根据虚位移原理

$$Q\delta y_c+P\delta y_a=0$$

即

$$Q(\delta r\cos\theta-r\sin\theta\delta\theta)-P\frac{l-r}{4a}\delta r=0$$

或

$$\left(Q\cos\theta - P\frac{l-r}{4a}\right)\delta r + Q(-\sin\theta r)\delta\theta = 0 \quad (1)$$

因δr，$\delta\theta$彼此独立，于是得

$$Q\cos\theta - P\frac{(l-r)}{4a} = 0 \quad 得\ Q\cos\theta = P\frac{(l-r)}{4a} \quad (2)$$

$$Qr\sin\theta = 0$$

因 $\quad Qr \neq 0$

则 $\quad \sin\theta = 0$，得$\theta = 0°$。代入(2)

$$Q = P\frac{l-r}{4a} = \frac{P}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

将(3)代入(1)，并消去P，得

$$\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}} + \frac{l-r}{4a}\right)\delta r - \frac{1}{\sqrt{2}}(r\sin\theta)\delta\theta = 0$$

或

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\delta(r\cos\theta) + \frac{l}{4a}\ \delta r = \frac{1}{8a}\delta r^2$$

将δ改为d，积分得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}r\cos\theta + \frac{lr}{4a} + c = \frac{r^2}{8a} \quad (4)$$

当$\theta = 0°$时，$r = l - \sqrt{8a^2}$。代入(4)，得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(l - \sqrt{8a^2}) + \frac{l}{4a}(l - \sqrt{8a^2}) + c = \frac{1}{8a}(l - \sqrt{8a^2})^2$$

解得

$$c = 3a - \frac{l^2}{8a} - \frac{l}{\sqrt{2}}$$

代入(4)

$$\frac{r^2}{8a}=\frac{1}{\sqrt{2}}r\cos\theta+\frac{lr}{4a}+3a-\frac{l^2}{8a}-\frac{l}{\sqrt{2}}$$

或

$$r^2=2(l+2\sqrt{2}\,a\cos\theta)r+24a^2-4\sqrt{2}\,al-l^2$$

例2-18 半径为R的光滑金属丝圆周固定在铅垂平面内。质量为m的小圆环用刚度为c的弹簧与圆圈上的最高点A联结，并在圆周上滑动；弹簧未变形时长为l_0。试求小圆环的平衡位置并研究其稳定性。



例2-18图

［解］ 取B点为重力势能零点，弹簧的自由端为弹簧势能零点。

重力势能 $V_1=2mgR\sin^2\varphi$

弹簧势能$V_2=\frac{1}{2}c(2R\cos\varphi-l_0)^2$

系统势能

$$V=V_1+V_2=2mgR\sin^2\varphi+\frac{1}{2}c(2R\cos\varphi-l_0)^2$$

系统平衡条件$\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0$，即

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi}=4mgR\sin\varphi\cos\varphi+c(2R\cos\varphi-l_0)(-2R\sin\varphi)$$
$$=2R(2mg\cos\varphi-2cR\cos\varphi+cl_0)\sin\varphi=0 \qquad (1)$$

因 $2R\neq0$，$\sin\varphi=0$，$\varphi=0°$，或

$$2mg\cos\varphi-2cR\cos\varphi+cl_0=0$$

即 $$\cos\varphi=\frac{cl_0}{2(cR-mg)}$$

研究平衡位置的稳定性。有

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=4mgR\cos 2\varphi-4cR^2\cos 2\varphi+2Rcl_0\cos\varphi \qquad (2)$$

当$\varphi=0$时，

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=2R(2mg-2cR+cl_0)>0$$

即 $$cl_0>2(cR-mg)$$

系统稳定。

当 $\varphi=\cos^{-1}\dfrac{cl_0}{2(cR-mg)}$时，因

$$\cos 2\varphi=(2\cos^2\varphi-1)=\left[2\left(\frac{cl_0}{2(cR-mg)}\right)^2-1\right]$$

$$=\left[\frac{c^2l_0^2}{2(cR-mg)^2}-1\right]$$

代入(2)式，经化简得

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=\frac{4(cR-mg)^2-c^2l_0^2}{(cR-mg)}>0$$

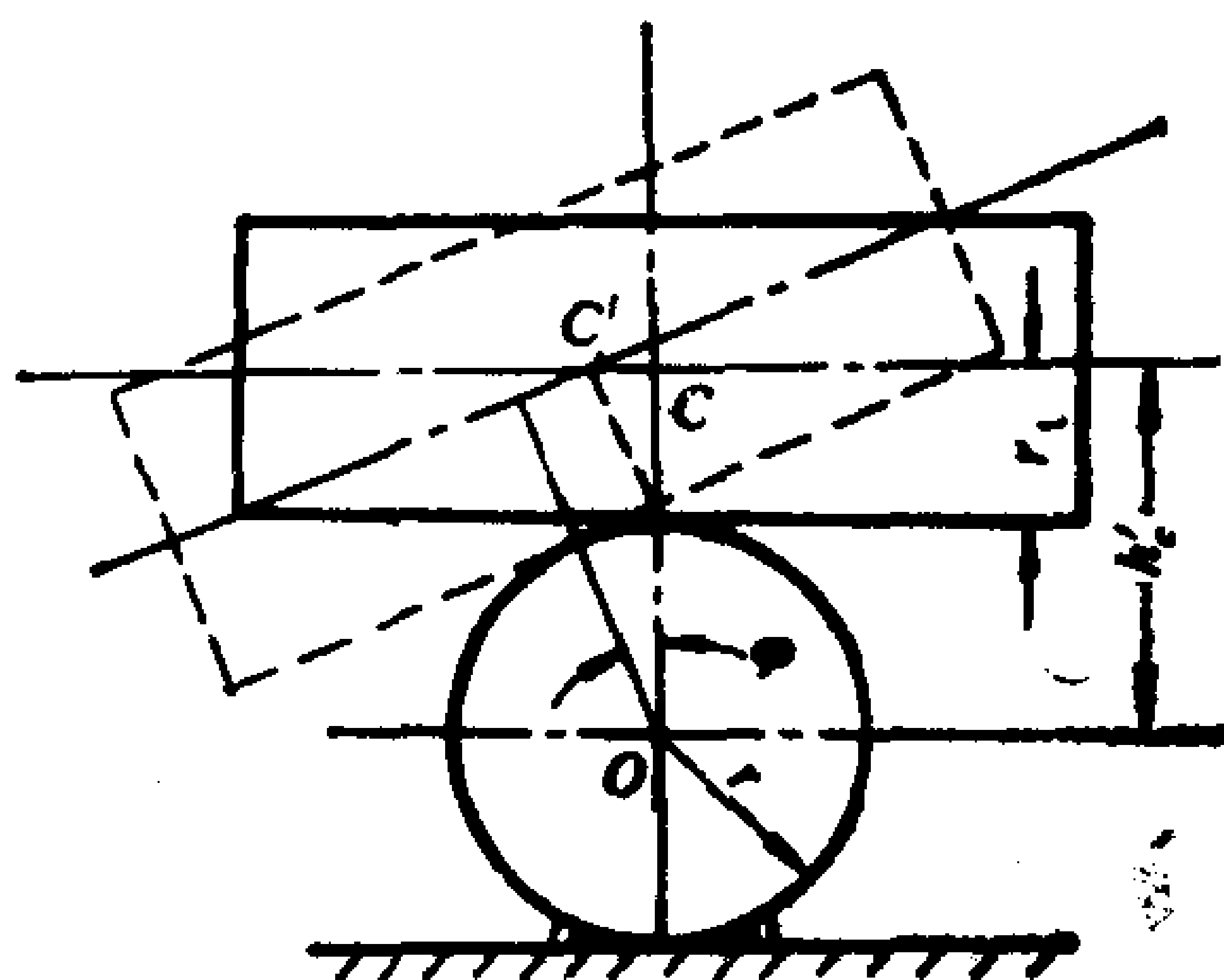
设$CR\neq mg$

$$c^2l_0^2<4(cR-mg)^2 \text{或} cl_0<2(cR-mg)$$

系统稳定

例2-19 固定圆柱体半径为r，其轴水平，在其上放一半径为r_1的均匀圆柱体，其轴亦水平，且与第一个圆柱的轴相垂直，试判断平衡的稳定性。

[解] 取o点为势能零点。上圆柱体在固定圆柱体上滚转一小转角φ，其重心c运动到c'，如图示。重力势能为



例2-19图

$$V=Ph_{c'}=P[(r+r_1)\cos\varphi+r\varphi\sin\varphi]$$

平衡条件为 $\frac{dV}{d\varphi}=0$，即

$$-P(r+r_1)\sin\varphi+Pr\sin\varphi+Pr\varphi\cos\varphi=0$$

或

$$-r_1\sin\varphi+r\varphi\cos\varphi=0 \tag{1}$$

得 $\operatorname{tg}\varphi=\frac{r}{r_1}\varphi$，因此 $\varphi=0$。

研究平衡位置 $\varphi=0$的稳定性。我们有

$$\frac{d^2V}{d\varphi^2}=-r_1\cos\varphi+r\cos\varphi-r\varphi\sin\varphi$$

若 $\left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0}=-r_1+r>0$，即$r_1<r$，稳定，

若 $\left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0}=-r_1+r<0$，即$r_1>r$，不稳定

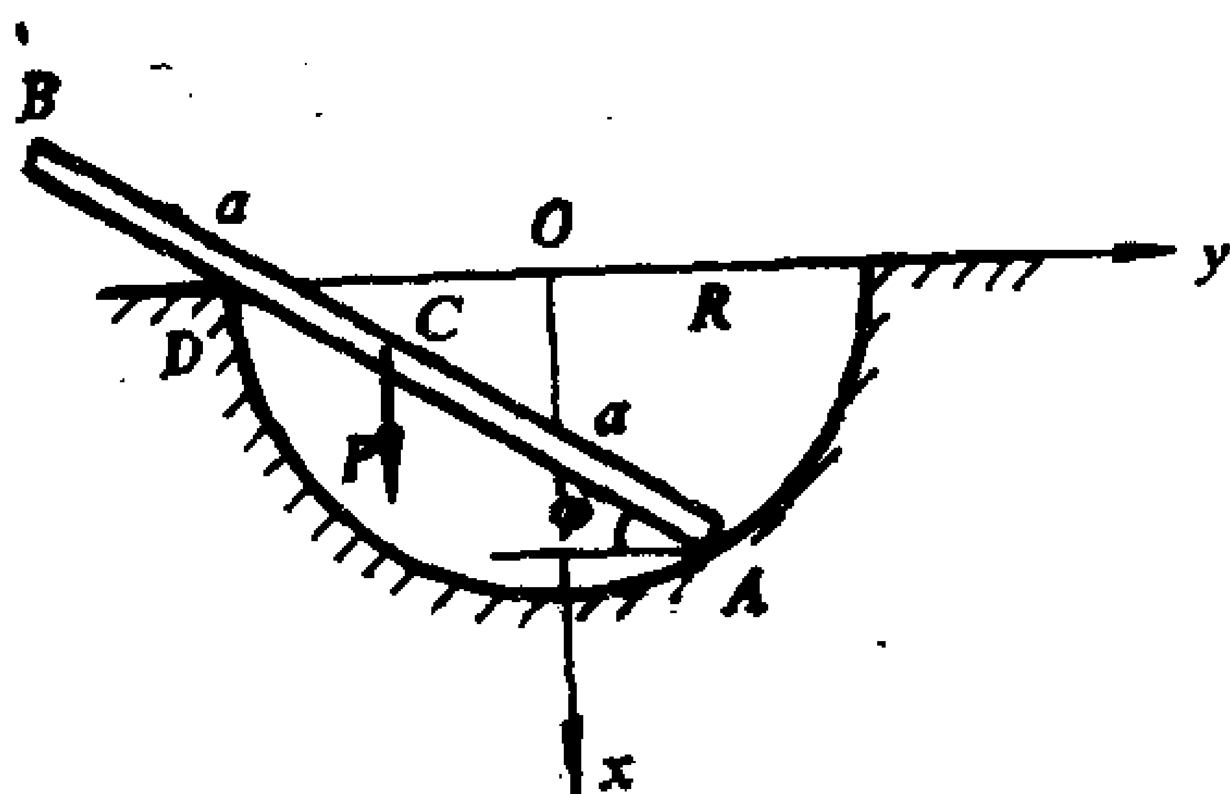
若 $\frac{d^2V}{d\varphi^2}_{\varphi=0}=-r_1+r=0$，即$r_1=r$，不确定

再进一步求导，有

$$\left.\frac{d^3V}{d\varphi^3}\right|_{\substack{\varphi=0\\ r_1=r}}=0,\ \left.\frac{d^4V}{d\varphi^4}\right|_{\substack{\varphi=0\\ r_1=r}}=r_1-3r<0 \qquad \text{不稳定}$$

由此得出$r_1\geqslant r$，系统平衡不稳定。

例2-20 一均质杆AB，长$2a$，依于曲线导板上，导板形状是一半径为R的半圆，不计摩擦，求其平衡位置并讨论其稳定性。



例2-20图

［解］ 取o点为势能零点，转角φ为广义坐标。

设杆AB重为P，因

$$x_c=AD\sin\varphi-AC\sin\varphi$$

$$=2R\cos\varphi\sin\varphi-a\sin\varphi$$

重力势能 $V=-Px_c=-P(R\sin2\varphi-a\sin\varphi)$

平衡条件$\dfrac{dV}{d\varphi}=0$，即

$$-P(2R\cos2\varphi-a\cos\varphi)=0$$

或 $$2R\cos2\varphi-a\cos\varphi=0 \tag{1}$$

化简（1）

$$2R(\cos^2\varphi-1)-a\cos\varphi=4R(\cos^2\varphi$$

$$-\frac{a}{4R}\cos\varphi-\frac{1}{2})$$

$$=4R\left[\left(\cos\varphi-\frac{a}{8R}\right)^2-\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{a}{8R}\right)^2\right]=0\right.$$

因 $4R\neq0$，得

$$\cos\varphi-\frac{a}{8R}=\sqrt{\frac{1}{2}+\left(\frac{a}{8R}\right)^2} \quad (2)$$

即

$$\cos\varphi=\frac{1}{8R}\left[a+\sqrt{32R^2+a^2}\right]$$

判定平衡位置的稳定性。我们有

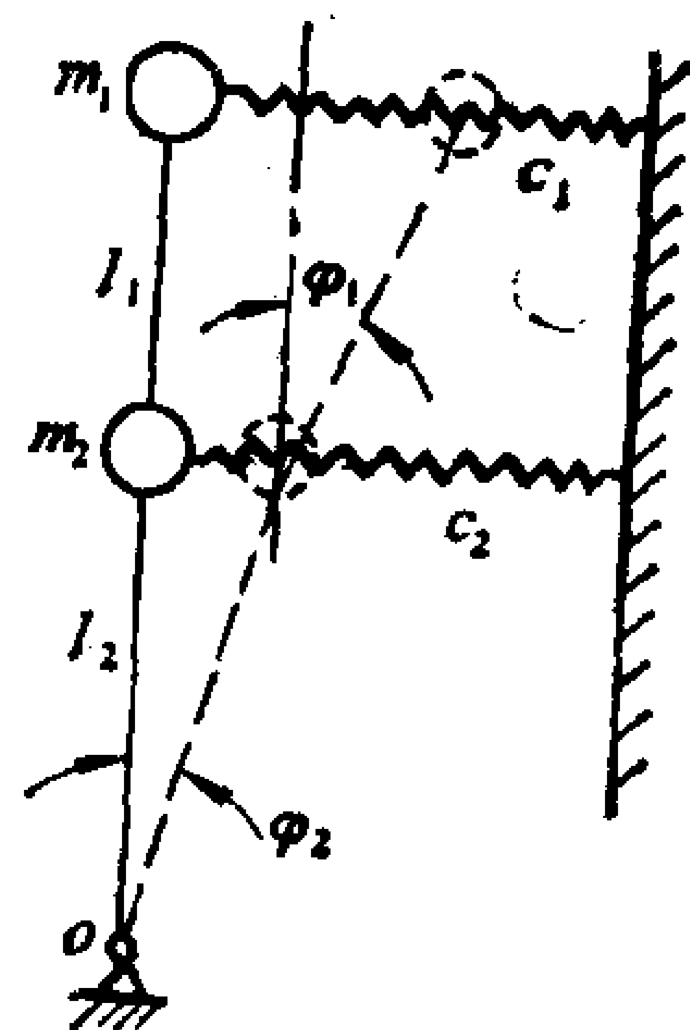
$$\frac{d^2V}{d\varphi^2}=-P(-4R\sin2\varphi+a\sin\varphi)$$

$$=P\sin\varphi(8R\cos\varphi-a) \quad (3)$$

$$\left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\cos\varphi=\frac{1}{8R}(a+\sqrt{32R^2+a^2})}=8R\left[\frac{1}{8R}(a+\sqrt{32R^2+a^2})\right]-a>0$$

即 $\sqrt{32R^2+a^2}>0$，系统平衡是稳定的。

例12-21 图为双摆，此摆可概略地表示为两个质量分别为 m_1，m_2，并用长为l_1，l_2的杆相联。当摆在铅垂位置时而弹簧均不受力，又刚度为 c_1，c_2。试讨论平衡的稳定性。



例2-21图

［解］ 取 o 点为重力势能零点，摆在铅垂位置为弹簧势能零点。系统位置用广义坐标φ_1、φ_2表示如图，因

$$V_{m1}=m_1g(l_2\cos\varphi_2+l_1\cos\varphi_1)$$

$$V_{m2}=m_2gl_2\cos\varphi_2$$

$$V_{c1}=\frac{1}{2}c_1(l_2\varphi_2+l_1\varphi_1)^2$$

$$V_{c2}=\frac{1}{2}c_2(l_2\varphi_2)^2$$

系统势能

$$\begin{aligned}V&=V_{m1}+V_{m2}+V_{c1}+V_{c2}\\&=m_1g(l_2\cos\varphi_2+l_1\cos\varphi_1)+m_2gl_2\cos\varphi_2\\&\quad+\frac{1}{2}c_1(l_2\varphi_2+l_1\varphi_1)^2+\frac{1}{2}c_2l_2^2\varphi_2^2\end{aligned}\tag{1}$$

平衡条件为

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi_1}=0,\quad \frac{\partial V}{\partial\varphi_2}=0$$

即

$$-m_1gl_1\sin\varphi_1+c_1(l_2\varphi_2+l_1\varphi_1)l_1=0\tag{2}$$

$$\begin{aligned}&-m_2gl_2\sin\varphi_2-m_1gl_2\sin\varphi_2+c_2l_2^2\varphi_2+c_1(l_2\varphi_2\\&+l_1\varphi_1)l_2=0\end{aligned}\tag{3}$$

由(2)、(3)式易见$\varphi_1=0$，$\varphi_2=0$。

判别平衡位置的稳定性。我们有

$$\frac{\partial^2V}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2}=c_1l_1l_2$$

$$\frac{\partial^2V}{\partial\varphi_1^2}=-m_1gl_1\cos\varphi_1+c_1l_1^2,$$

$$\left.\frac{\partial^2V}{\partial\varphi_1^2}\right|_{\varphi_1=\varphi_2=0}=-m_1gl_1+c_1l_1^2$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_2^2}=-m_2gl_2\cos\varphi_2-m_1gl_2\cos\varphi_2+c_2l_2^2+c_1l_2^2$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_2^2}\right|_{\varphi_1=\varphi_2=0}=-m_2gl_2-m_1gl_2+c_2l_2^2+c_1l_2^2$$

$$\Delta=\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1\partial \varphi_2}\right)^2-\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_2^2}\right]_{\varphi_1=\varphi_2=0}$$

$$=(c_1l_1l_2)^2-(-m_1gl_1+c_1l_1^2)(-m_2gl_2-m_1gl_2+c_2l_2^2+c_1l_2^2)$$

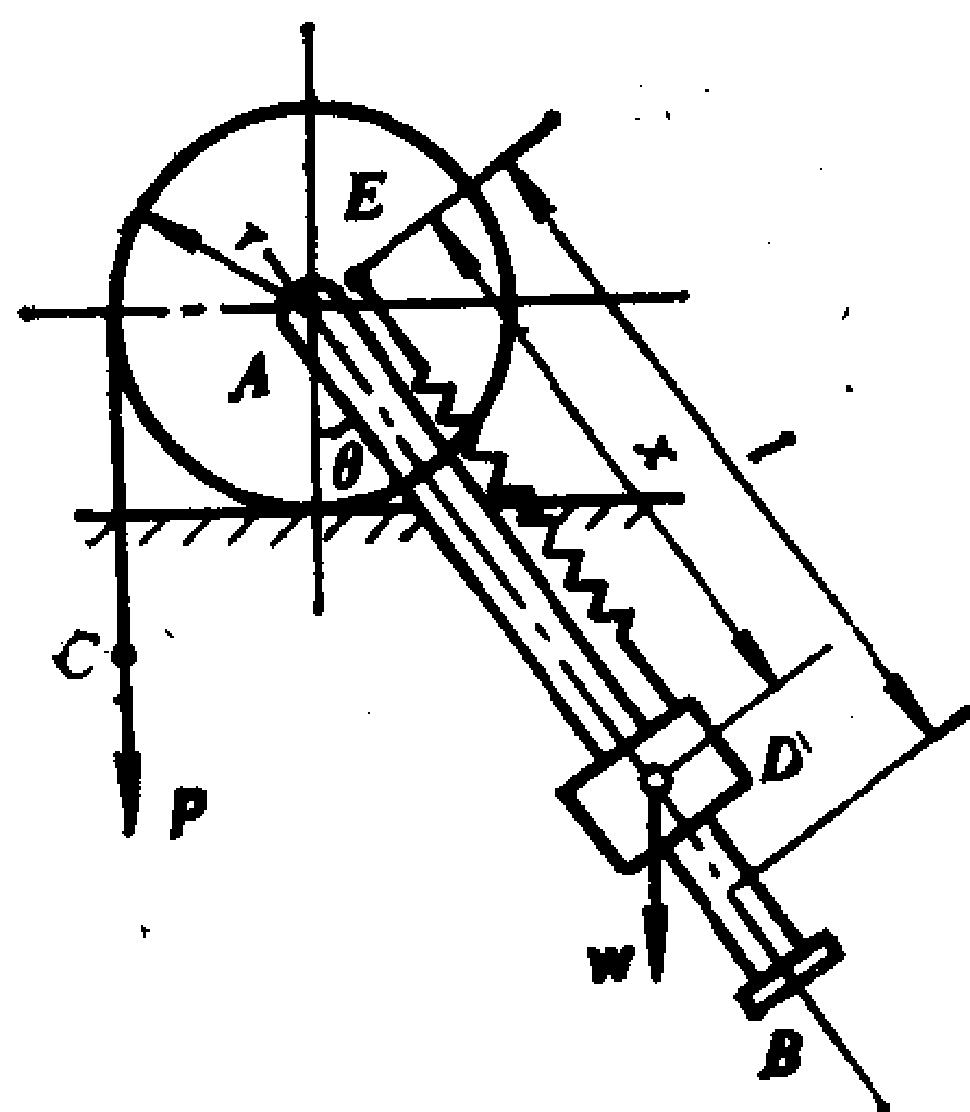
$$=l_1l_2[c_1^2l_1l_2-(-m_1g+c_1l_1)(-m_2g-m_1g+c_2l_2+c_1l_2)] \qquad (4)$$

当 $-m_1g+c_1l_1>0$，即$c_1l_1>m_1g$

$(c_1+c_2)l_2-(m_1+m_2)g>c_1^2l_1l_2$时

$\Delta<0$，$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1^2}>0$，系统平衡位置是稳定的。

例2-22 弹簧ED的刚度系数为k，当$x=l/2$时没有变形，忽略杆AB的重量，试导出系统平衡时θ必须满足的方程。若已知$P=350\text{N}$，$W=200\text{N}$，$r=3\text{cm}$，$l=16\text{cm}$，$k=50\text{N/cm}$，再求：相应于系统平衡位置的θ与x值。



例2-22图

［解］ 取θ，x为广义坐标。先令$\delta\theta\neq0$，$\delta x=0$，则有

$$Q_\theta=\frac{\sum\delta A_F^\theta}{\delta\theta}$$

$$=\frac{P\cdot 2r\delta\theta-W\sin\theta x\delta\theta-k\left(x-\frac{l}{2}\right)(AE+r\sin\theta)\delta\theta}{\delta\theta}$$

$$=2Pr-Wx\sin\theta-k\left(x-\frac{l}{2}\right)(AE+r\sin\theta) \qquad (1)$$

再令$\delta\theta=0$，$\delta x\neq0$，有

$$Q_x=\frac{\sum\delta A_F^x}{\delta x}=\frac{W\cos\theta\delta x-k\left(x-\frac{l}{2}\right)\delta x}{\delta x}$$

$$=W\cos\theta-k\left(x-\frac{l}{2}\right) \qquad (2)$$

系统平衡时，$Q_\theta=Q_x=0$，即(1)，(2)式分别为零。于是

$$2Pr-Wx\sin\theta-k\left(x-\frac{l}{2}\right)\left(\frac{r}{2}+r\sin\theta\right)=0 \qquad (3)$$

其中令$AE=r/2$，以及

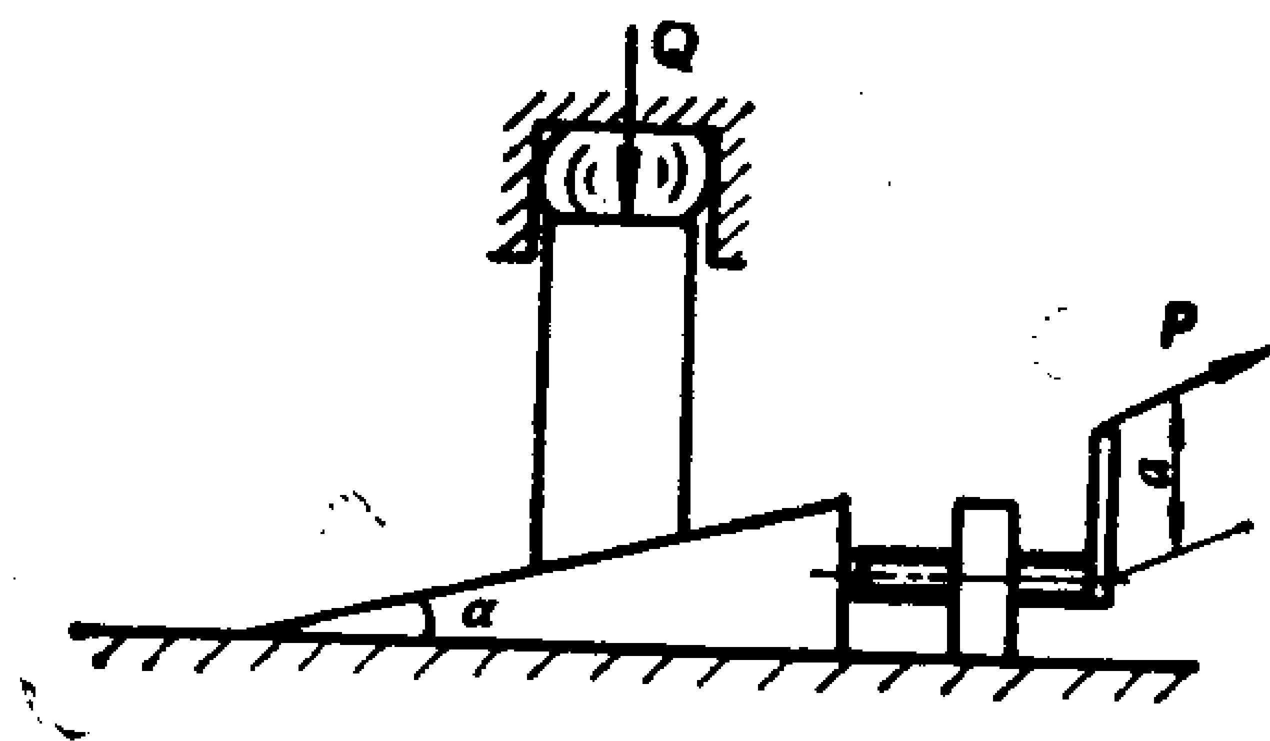
$$W\cos\theta-k\left(x-\frac{l}{2}\right)=0 \qquad (4)$$

解(3)，(4)式得$\theta=49.08°$，$x=10.62$ (cm)

三、习　题

2-1　楔式压榨机，力P垂直于手柄轴，手柄长a，螺距为h，楔尖顶角为α，试求平衡时力P与力Q之间的关系。

答：$Q=P\frac{2\pi a}{h\mathrm{tg}\alpha}$



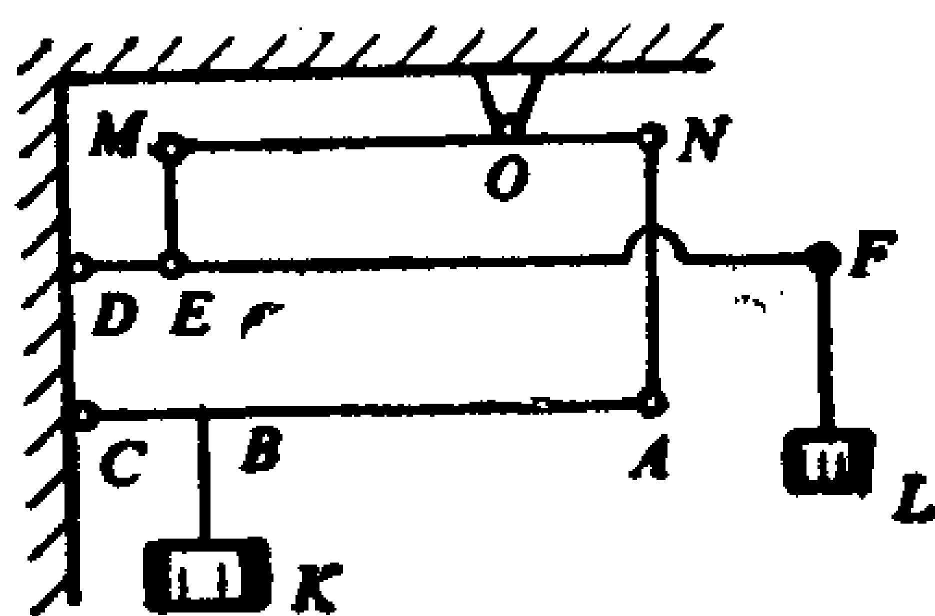
题2-1图

2-2 如图示，重物K与L用杆系相联而处于平衡状态。已知：$\frac{BC}{AC}=\frac{1}{10}$，$\frac{ON}{OM}=\frac{1}{3}$，$\frac{DE}{DF}=\frac{1}{10}$，试求重物重量之间的关系$\frac{P_l}{P_K}$。

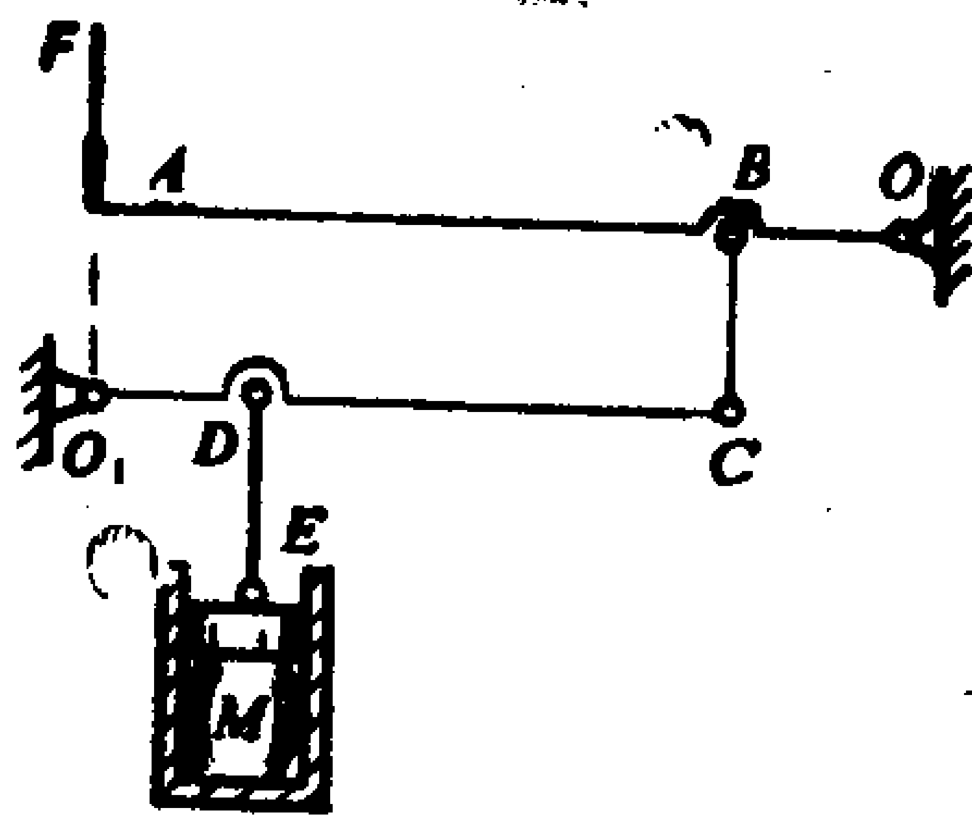
答：$P_l=\frac{1}{300}P_K$

2-3 力F铅垂地作用于杠杆AO上。$AO=6BO$，$CO_1=5DO_1$。若在所给位置上杠杆水平，杆BC与DE垂直，求物体M所受的挤压力P的大小。

答：$P=30F$



题2-2图



题2-3图

2-4 试求等速提升重为P(不计轴承摩擦）之重物所需的作用于O_1轴上的力矩。若已知$P=10\text{kN}$，鼓轮半径$r=$

20 cm，齿数$z_1=20$，$z_2=80$。

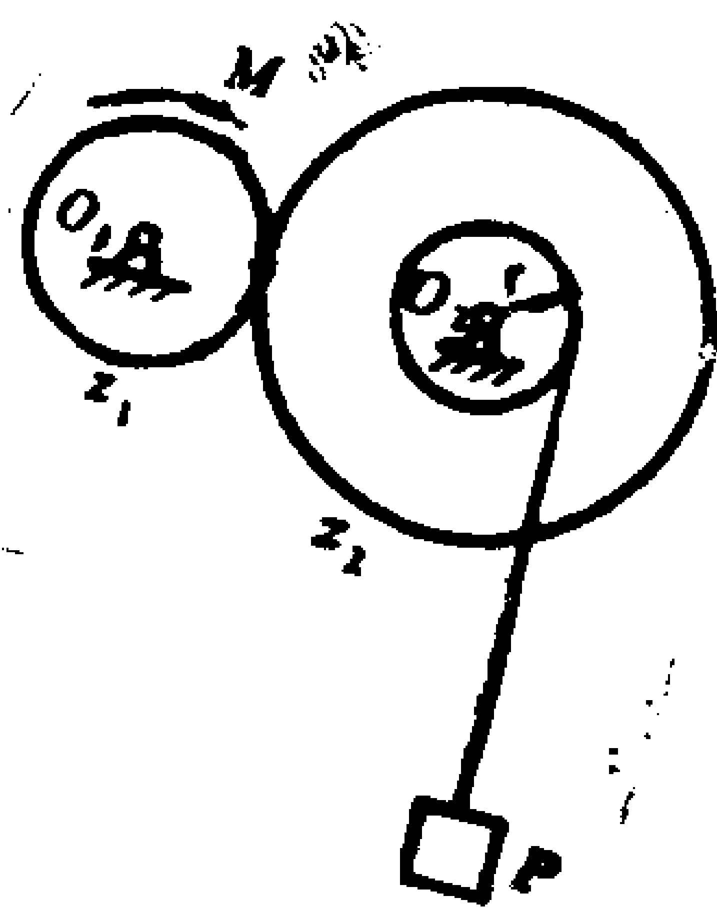
答：$M_1=0.5\text{kN}\cdot\text{m}$

2-5 图示为一铰车，为等速提升重为 Q 的货物，求垂直作用于手柄A点上的P力。鼓轮直径$d=30\text{cm}$，手柄长$l=50\text{cm}$，机构上齿轮点数$z_1=125$，$z_2=25$，$z_3=63$，$z_4=21$。

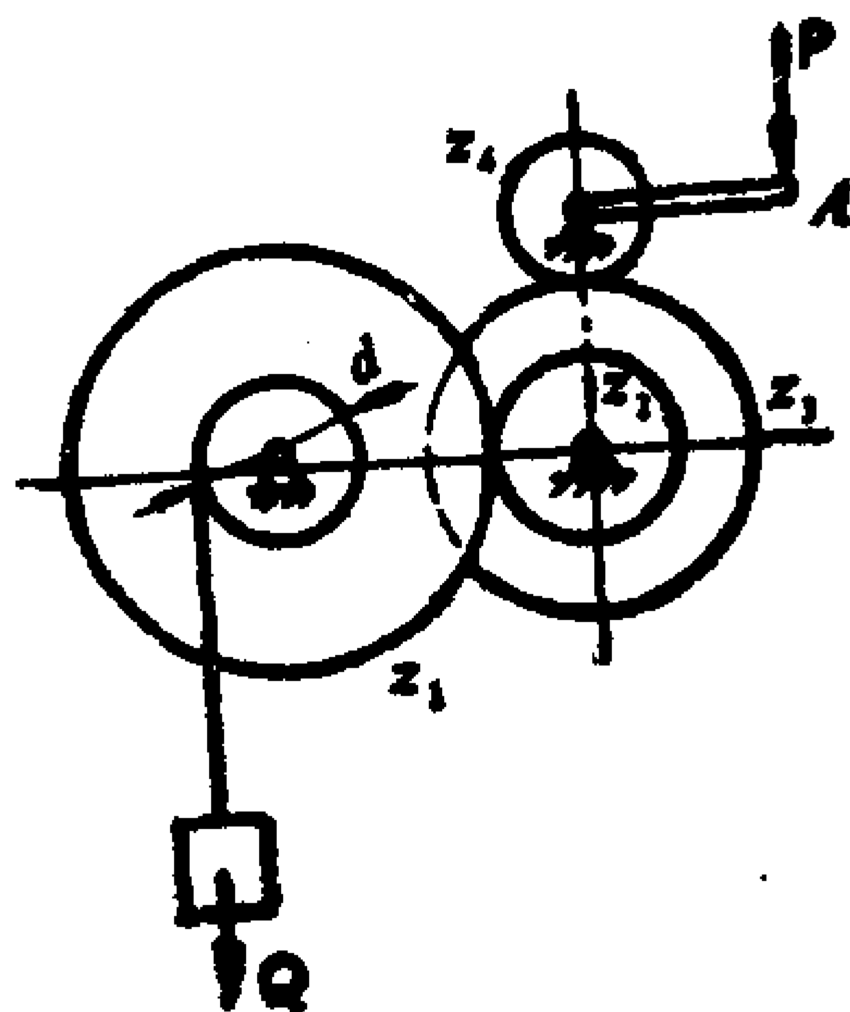
答：$P=0.02Q$

2-6 一滑轮组由一定滑轮 A 与 n 个动滑轮所组成。试求平衡时被举起的重物Q与作用于绳子一端的力 P 之比。

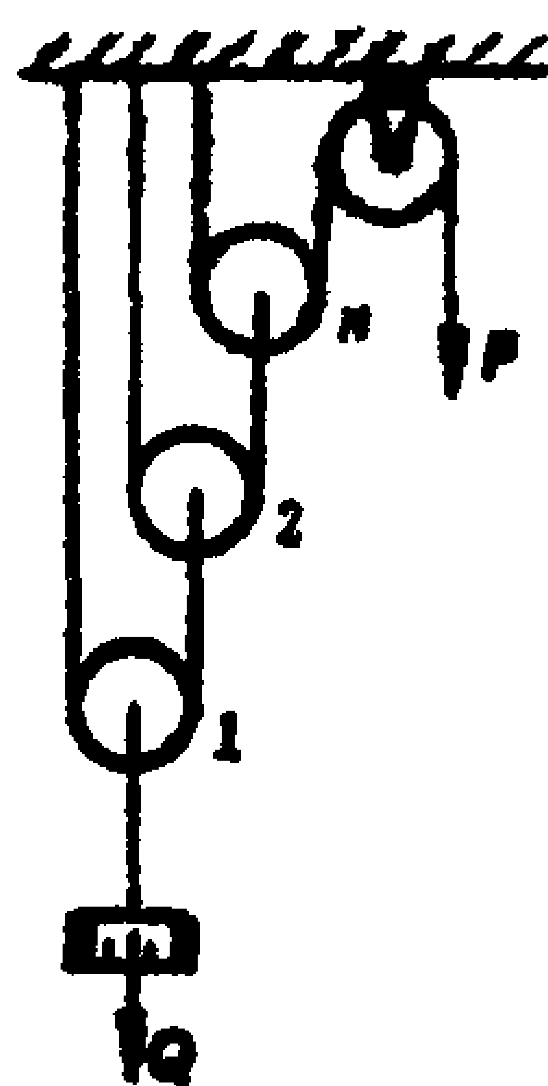
答：$\dfrac{Q}{P}=2n$



题2-4图



题2-5图



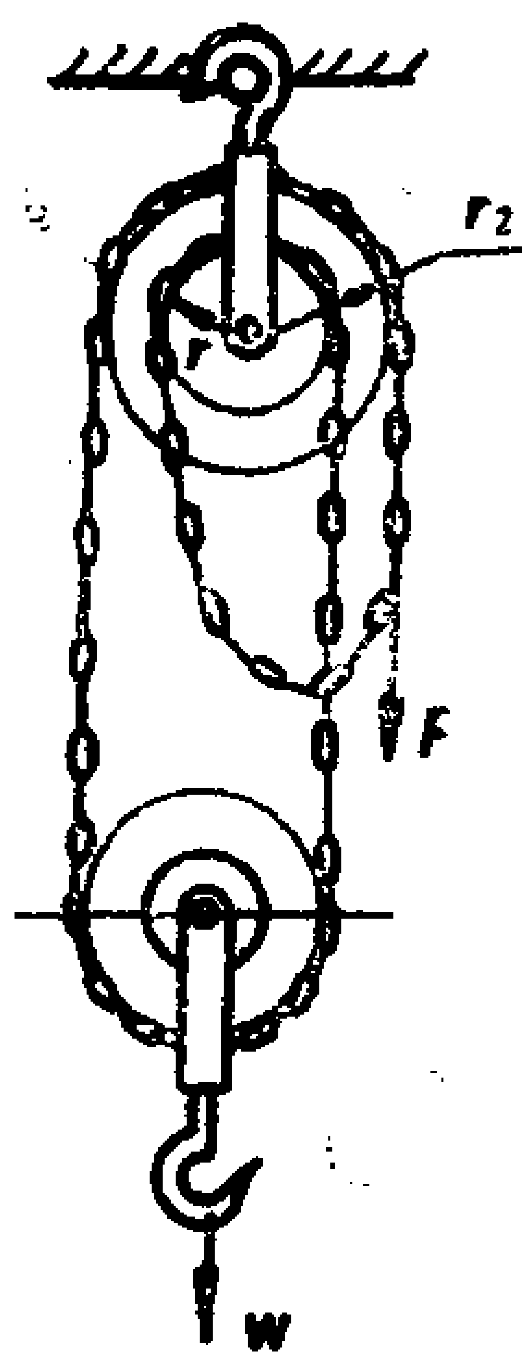
题2-6图

2-7 求图示差动滑车吊起重物W所需的力P。

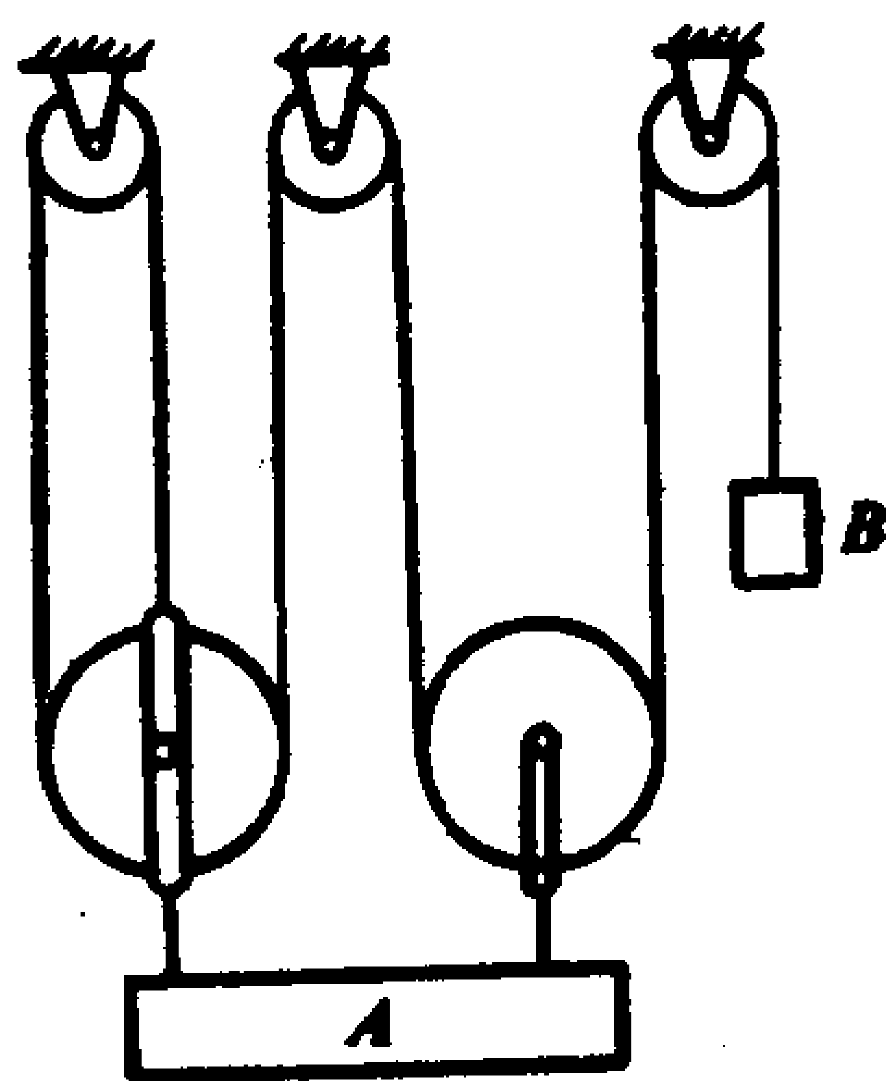
答：$P=W\dfrac{r_2-r_1}{2r_2}$

2-8 借助于滑轮组和绳索吊挂起来的重物A与B处于平衡。求物体重量P_A与P_B之间的关系。

答：$P_A=5P_B$



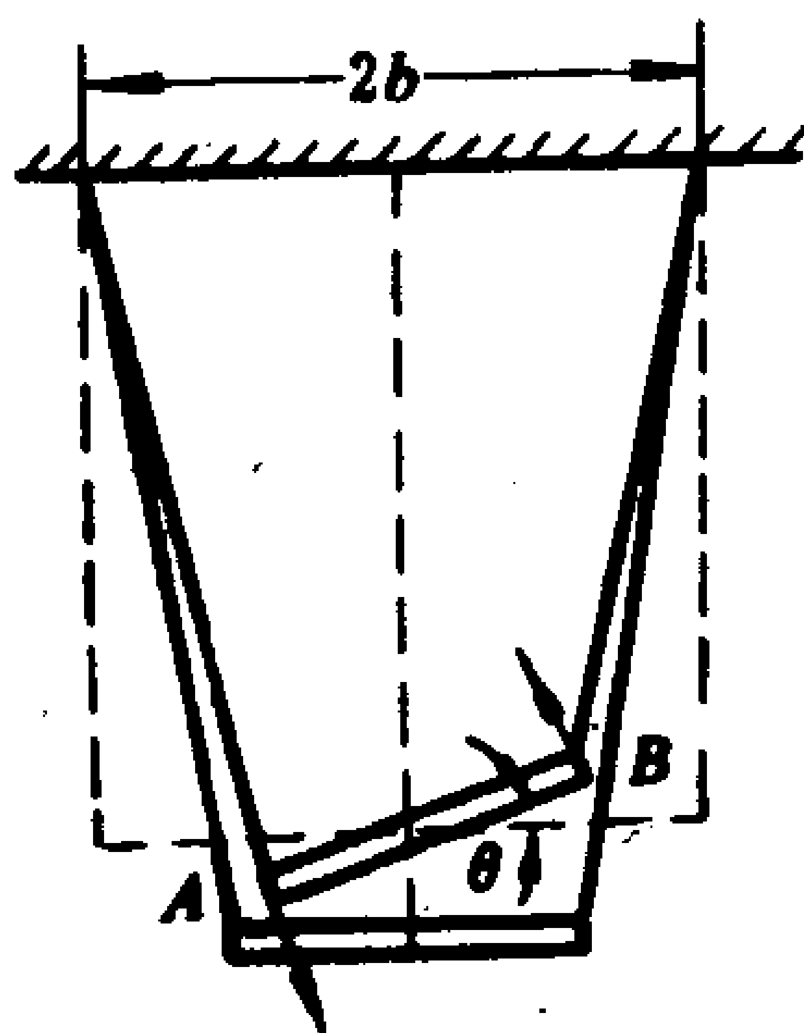
题2-7图



题2-8图

2-9　均质杆AB长$2a$，重Q，两端分别悬在长l的两绳上，两绳上端悬点在同一水平线上，且相距为$2b$。若杆上加一力偶，其矩为M，求确定这杆平衡位置的角θ。

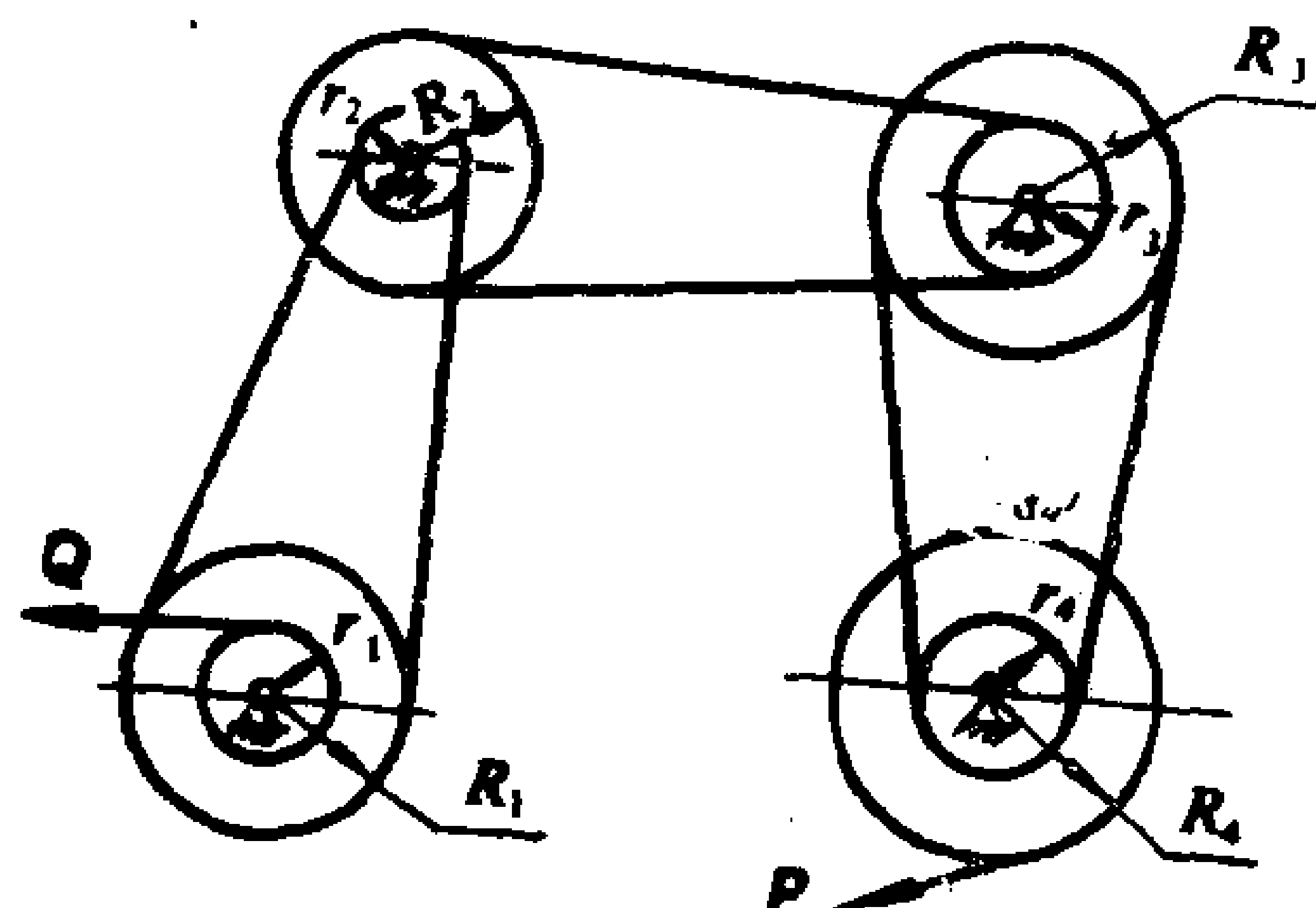
答：$M\sqrt{l^2-(a-b)^2-4ab\sin^2\frac{\theta}{2}}=Qab\sin\theta$



题2-9图

2-10　试求必需加在半径为R_4的皮带轮上的力P，以便

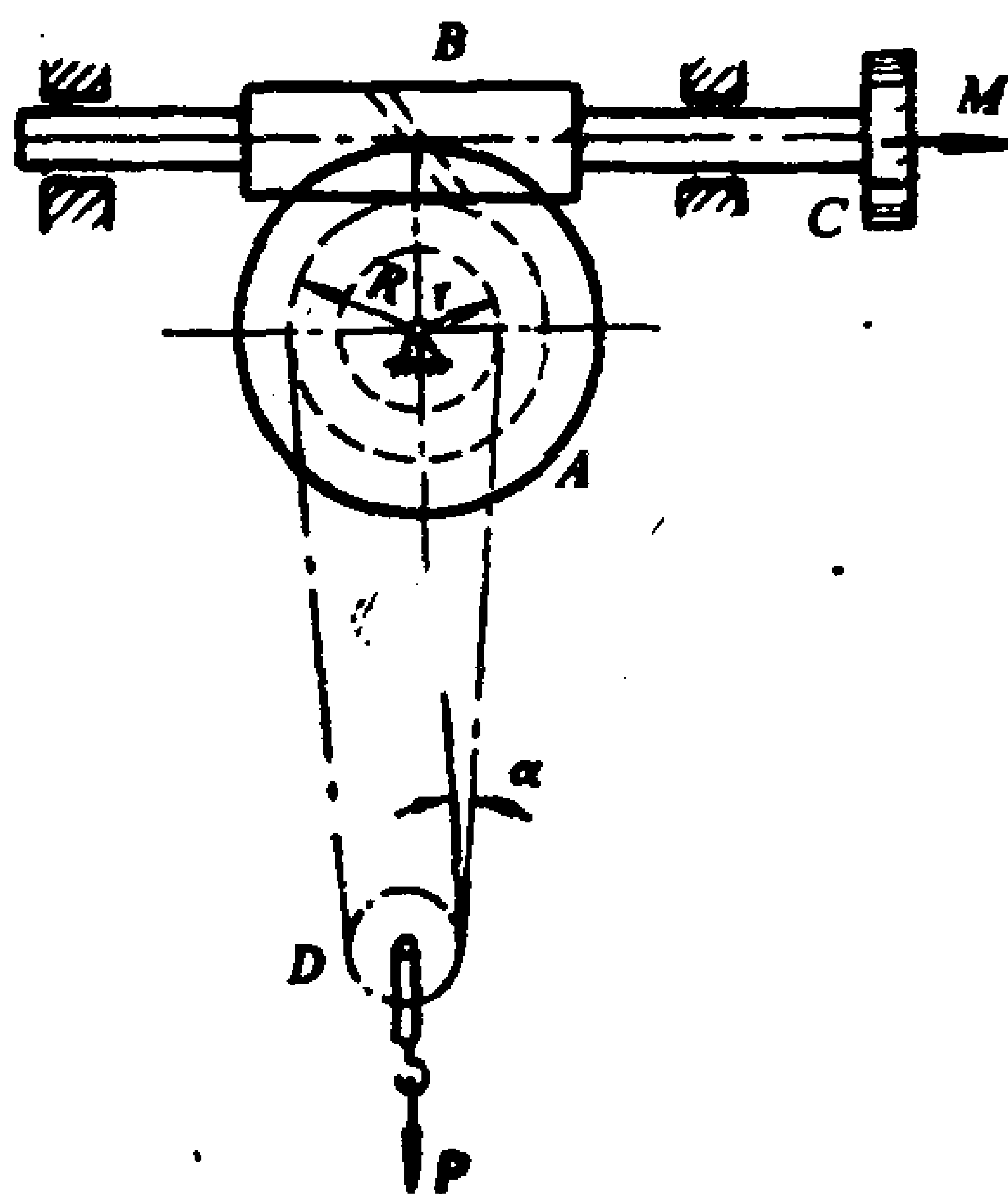
通过三重皮带传动能克服作用在半径为r_1的皮带轮上的阻力Q，设每一对同轴之轮均紧密相连。已知皮带轮之半径等于R_1，R_2，R_3，R_4及r_1，r_2，r_3，r_4，略去皮带质量及轴承中的滑动摩擦。



题2-10图

答：$P=Q\dfrac{r_1r_2r_3R_4}{R_1R_2R_3r_4}$

2-11　差动铰盘A由单线蜗杆B带动。铰盘齿数为n，定滑车的半径为R及r，右轮C上作用一力偶，其力偶矩为M。动滑车挂有重物，其重为P。求平衡时M与P的关系(α角很小不计)。

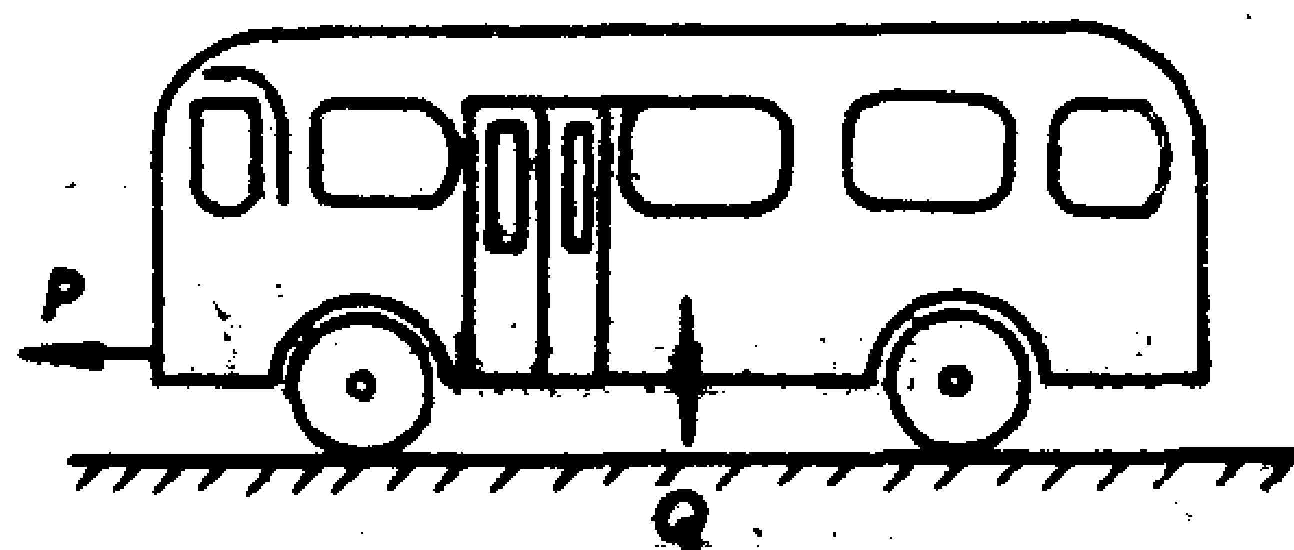


题2-11图

2-12　公共汽车重量$Q=13850$N，汽车空档时拖动它所需的力$P=250$ N，已知车轮半径$r=0.408$m。求车轮与路面间的滚动摩擦系数δ为多少厘米。设路面水平，前后轮的滚

动摩擦系数相等。

答：$\delta=0.74\text{cm}$



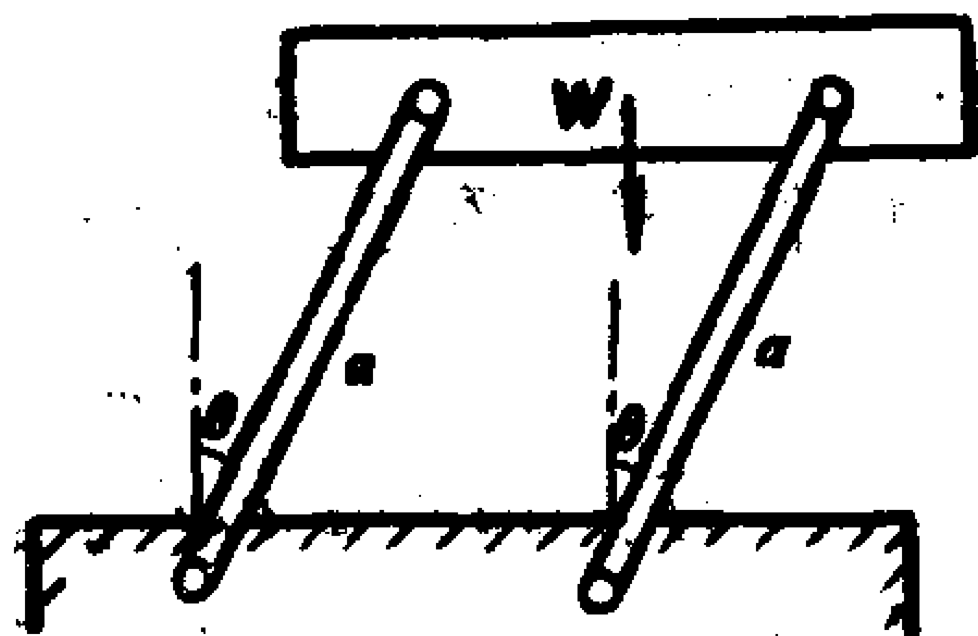
题2-12图

2-13　重W的物块由两杆和固连在基础上的扭簧支承。已知扭簧刚度系数为M_0，扭矩为$M=M_0\theta$，略去杆重，求平衡时杆的θ角。

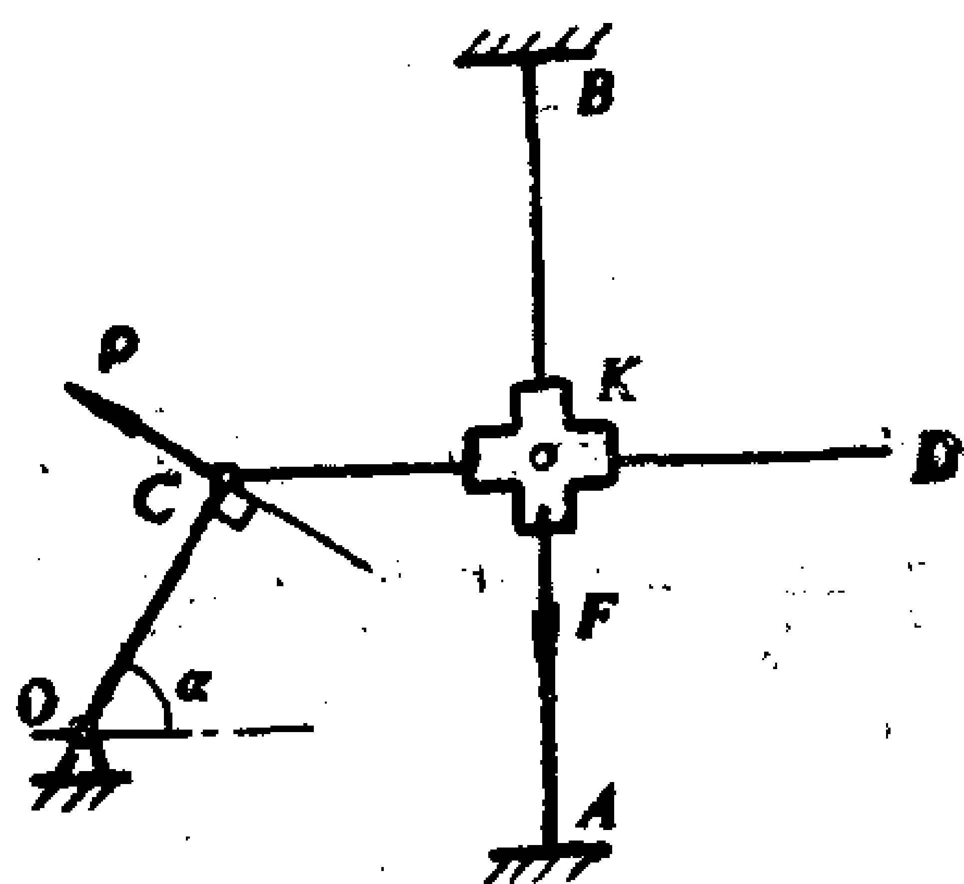
答：$\theta=\sqrt{6\left(1-\dfrac{M_0}{Wa}\right)}$，$M_0<Wa$

2-14　在十字形滑块K上沿杆AB方向作用力F，不计摩擦，求作用在C点且与曲柄OC垂直的平衡力P的大小。

答：$P=F\cos\alpha$



题2-13图



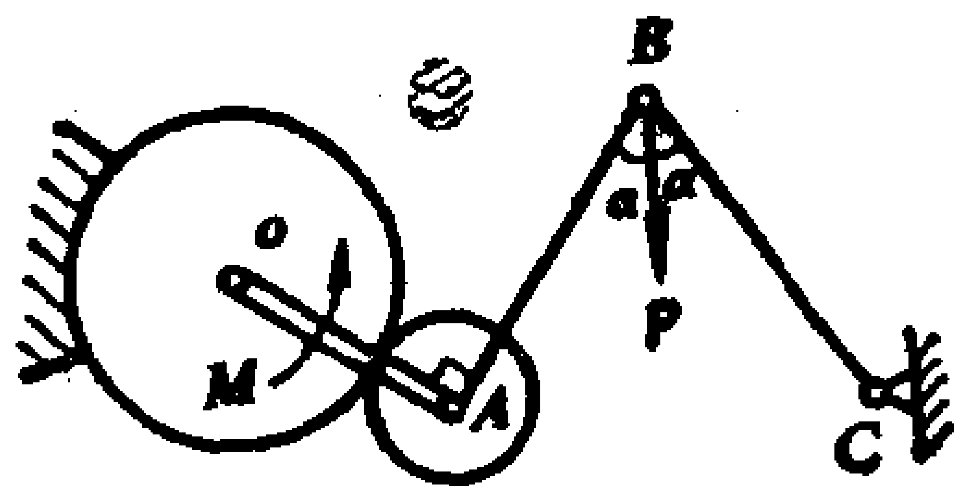
题2-14图

2-15　在位于水平面内的机构的B点上作用一力$\boldsymbol{P}$。为使机构在$AB\perp OA$，$\angle ABC=2\alpha$的位置上保持平衡，求作用于长为a的曲柄OA上的力矩M。

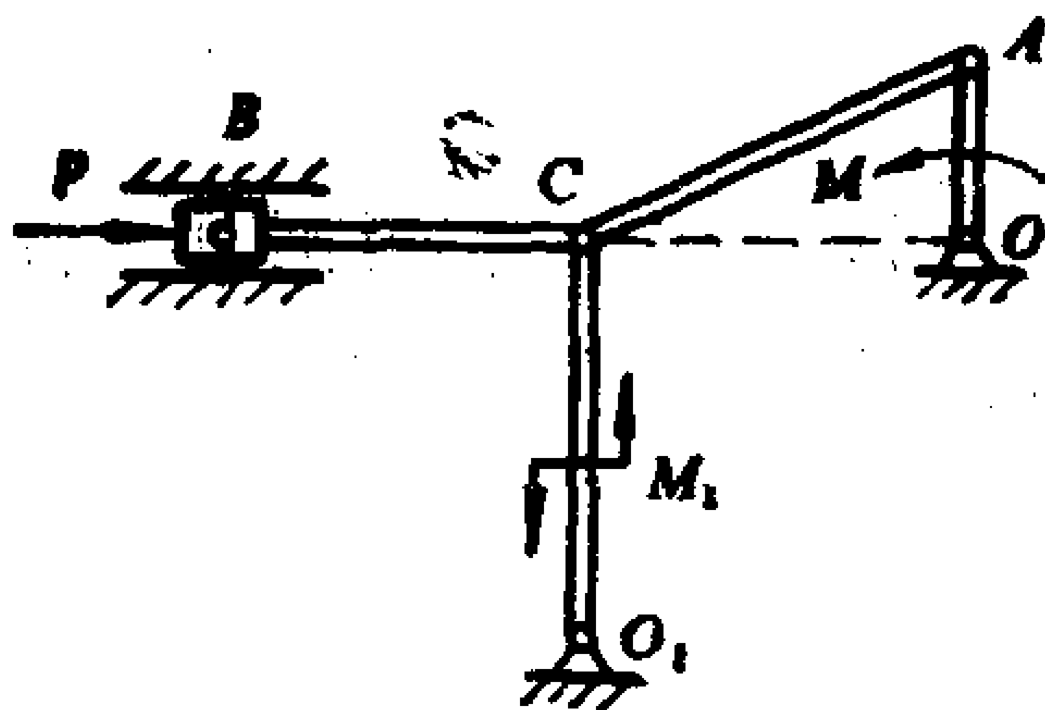
答：$M=\frac{1}{2}Pa\sec\alpha$

2-16　在机构的活塞B上施加一力$\boldsymbol{P}$。在曲柄O_1C上施加力矩$M_1=\frac{3}{2}Pr$，不计摩擦，曲柄长度$oA=r$，$O_1C=3r$，且都处于铅垂位置。试求使机构平衡而作用于曲柄oA上的力矩M。

答：$M=\frac{1}{2}Pr$



题2-15图



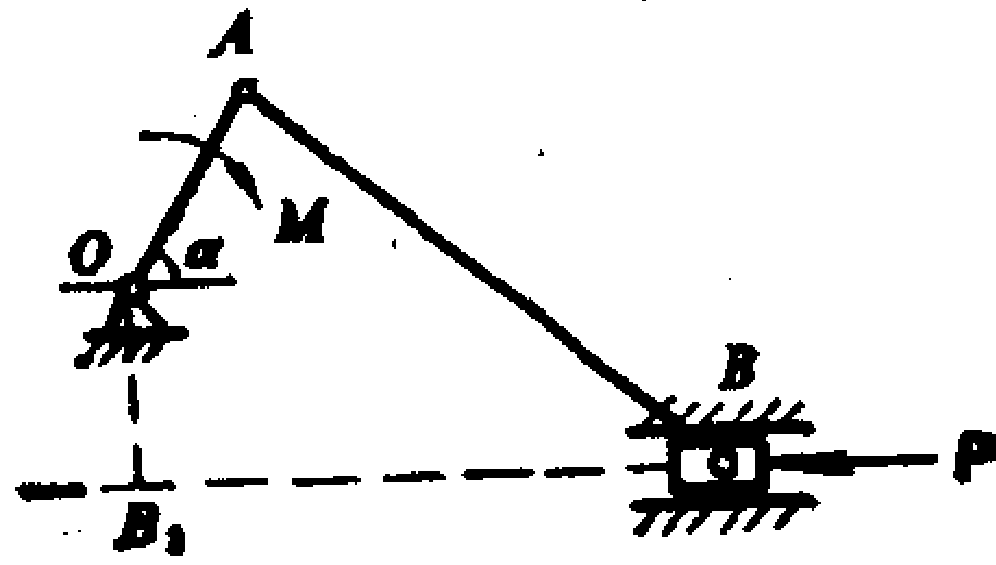
题2-16图

2-17　在侧向外伸曲柄连杆机构的滑块B上施加一力$\boldsymbol{P}$。当$\alpha=60°$，$\angle OAB=60°$时，使机构处于平衡。求作用于长为r的曲柄上的力矩M。

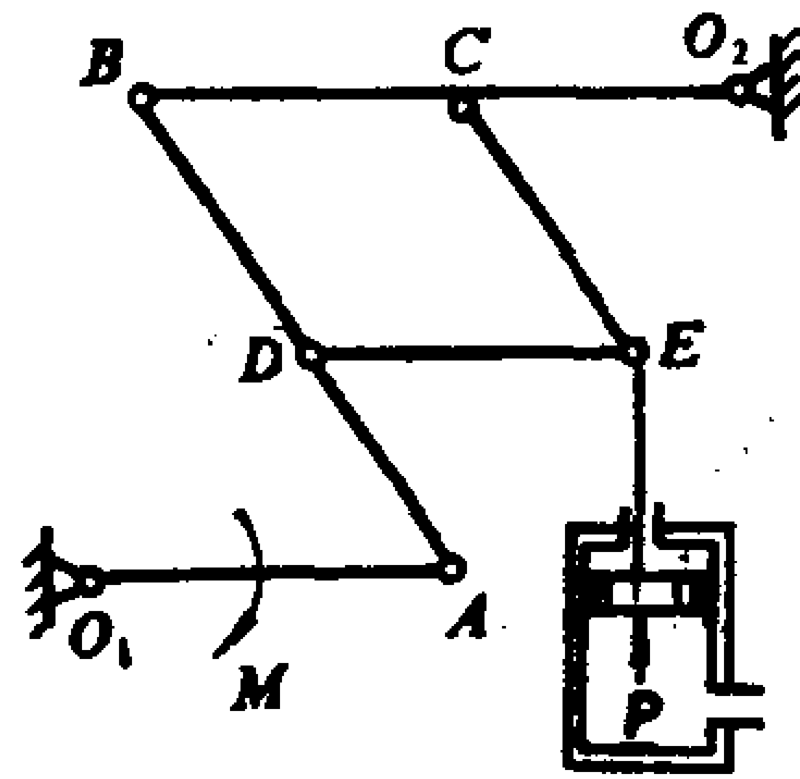
答：$M=Pr\sqrt{3}$

2-18　在图示机构中$O_1A=a$，$BC=DE=b$，$CO_2=c$、$BD=CE$。若$O_1A//BO_2$，求作用于活塞上的力P与平衡力矩M之间的关系。

答：$M=\dfrac{ac}{b+c}P$



题2-17图

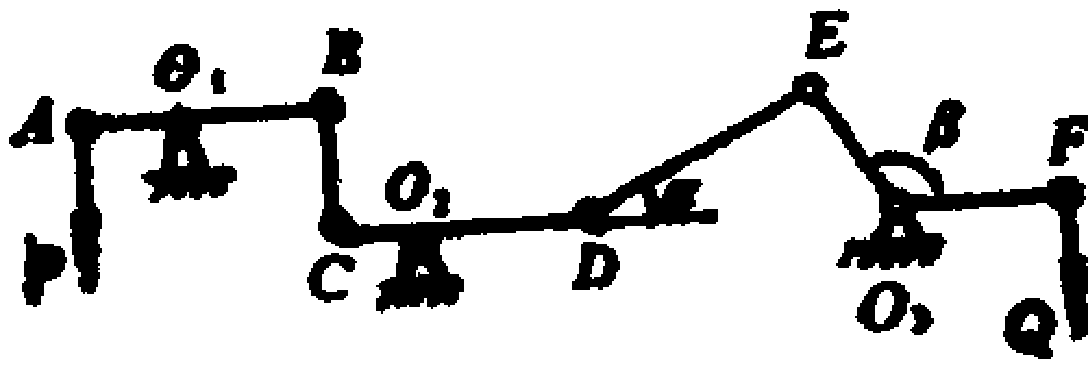


题2-18图

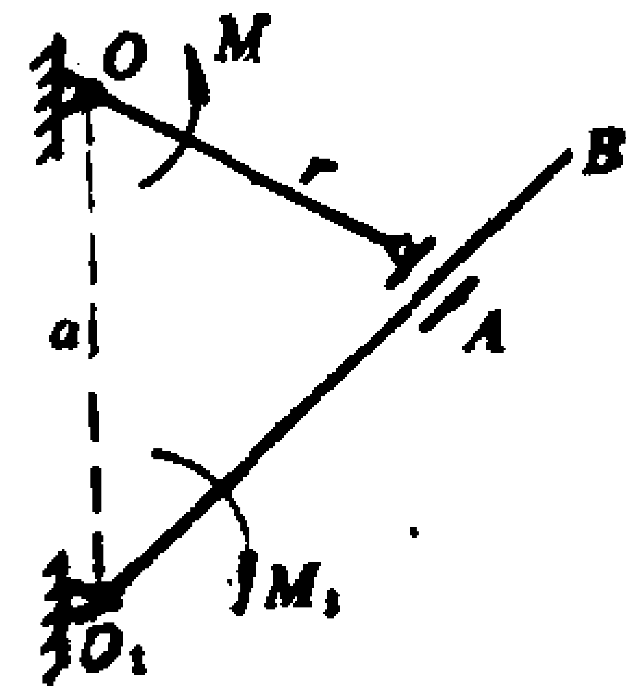
2-19 在图示杠杆机构中 $AO_1=a$，$O_1B=CO_2$，$O_2D=b$，$O_3E=c$，$O_3F=d$。在F点且与O_3F相垂直的方向上作用力$\boldsymbol{Q}$。当AB、CD与O_3F互相平行，$\angle\alpha=45^\circ$，而$\angle\beta=135^\circ$，为使机构处于平衡，试问作用于A点且与AB垂直的力$\boldsymbol{P}$应是多大？

答：$P=Q\dfrac{bd}{ac}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2-20 在连杆机构的曲柄OA上作用力矩M。$OA=r$，$O_1A=OO_1=a$。不计摩擦，求作用于连杆O_1B上的平衡力



题2-19图



题2-20图

矩M_1。

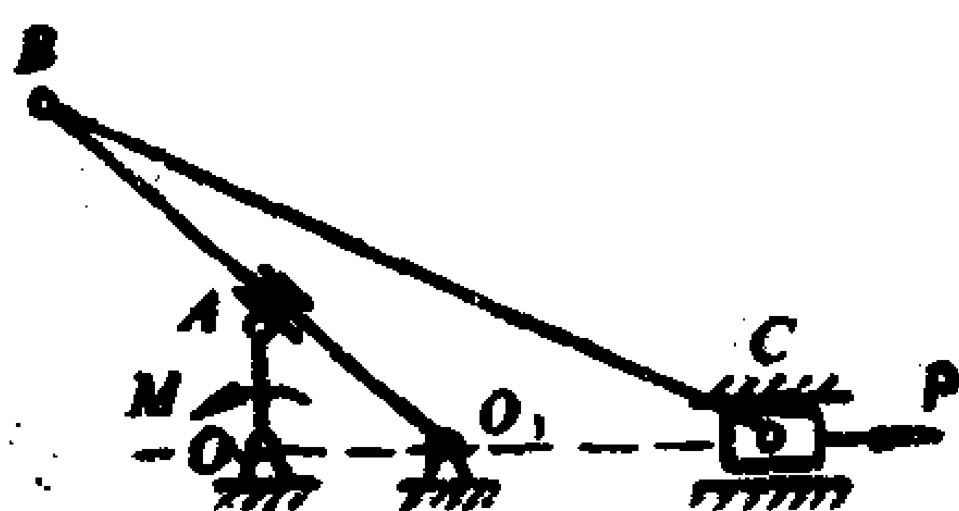
答：$M_1=2M\frac{a^2}{r^2}$

2-21 在曲柄OA上作用矩$M=6\text{N}\cdot\text{m}$的力偶。$OA=15\text{cm}$，$OO_1=20\text{cm}$、$O_1B=50\text{cm}$、$BC=78\text{cm}$。略去摩擦，当$OA\perp OO_1$时，为了使机构处于平衡，求作用在滑块C上P力的大小。

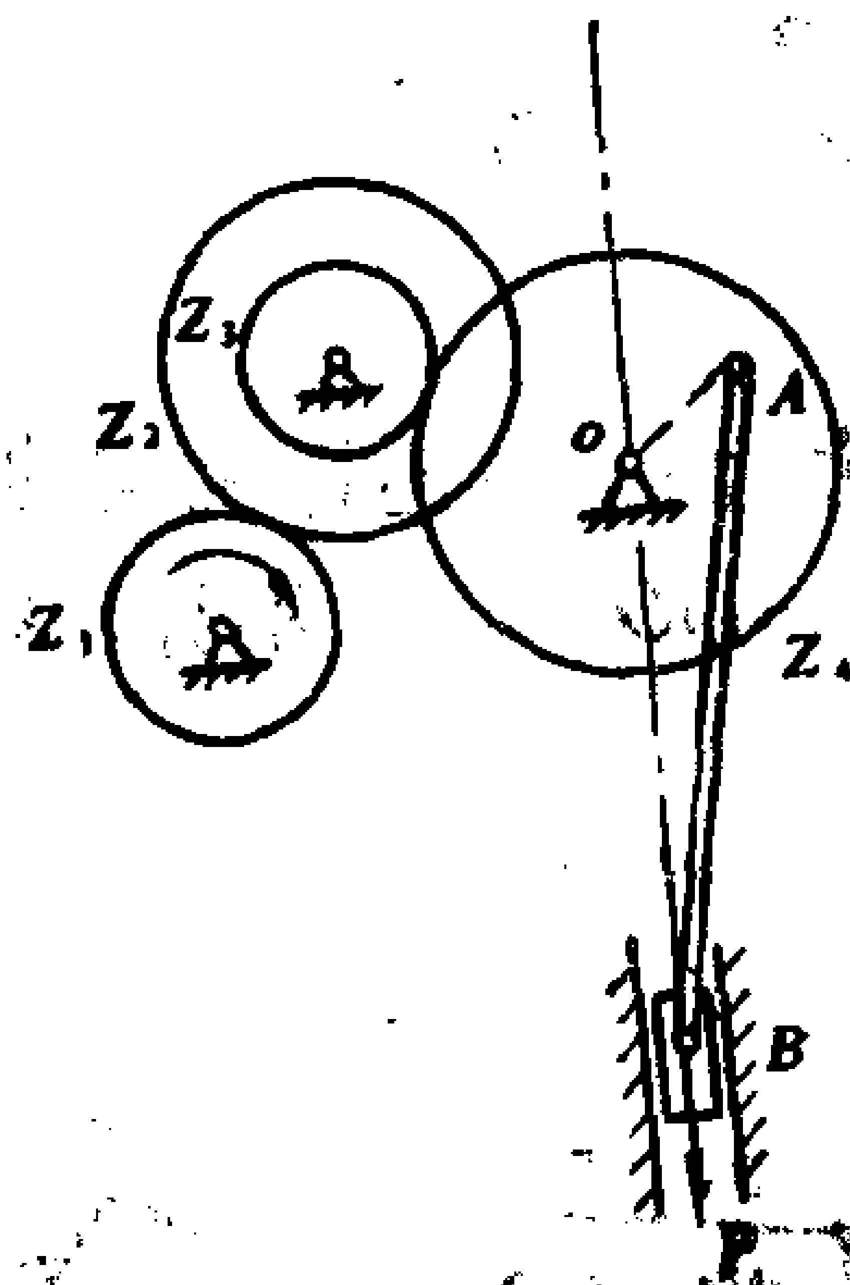
答：$P=125\text{N}$

2-22 图示为一由功率为13.5 kW的电机带动的冲床机构。主动轴的转数为350r/min，$OA=12\text{cm}$、$AB=60\text{cm}$、齿数$z_1=16$、$z_2=48$、$z_3=14$、$z_4=56$。求所给位置上的冲压力P。

答：$P=60.771\text{kN}$



题2-21图



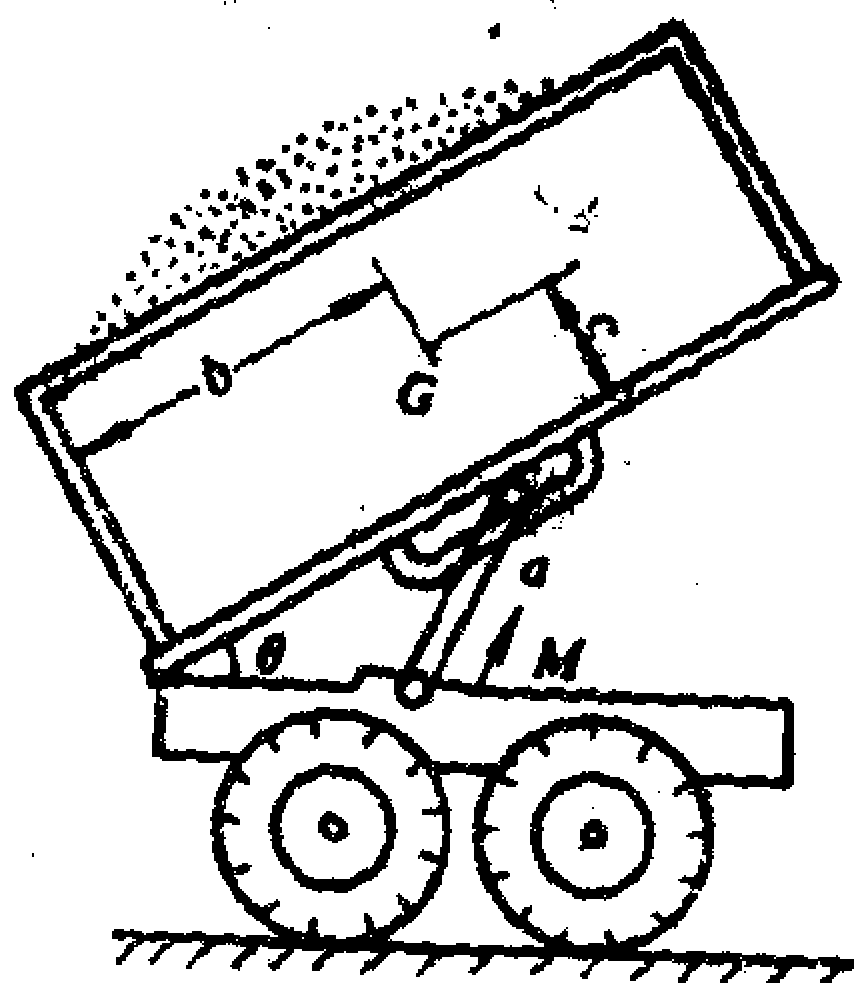
题2-22图

2-23 自动卸货卡车的载荷为W，重心在G，为了举起载荷，在举重杆端部作用一力偶M，试把M表示成θ的函数。

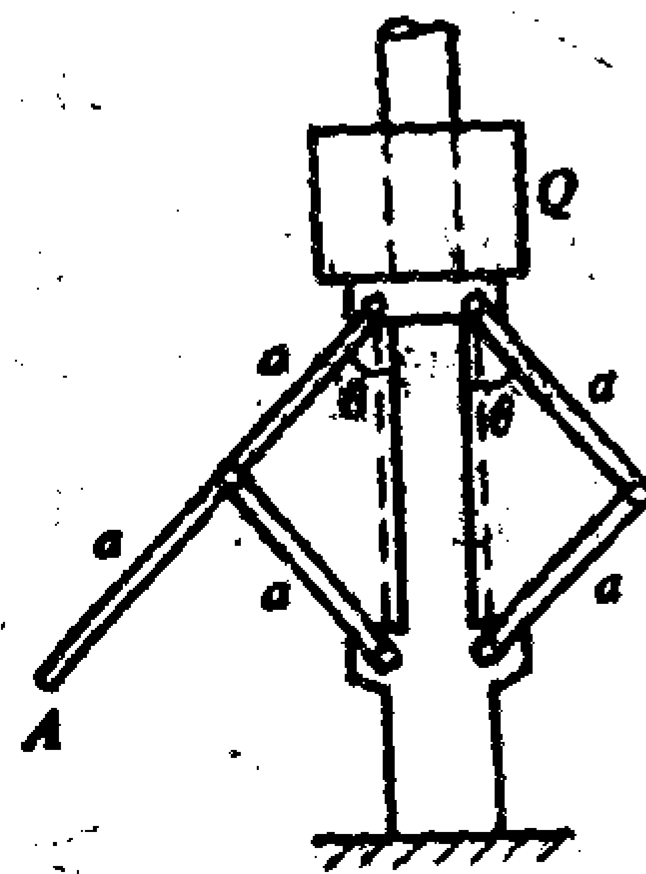
答：$M=(W/2)(b\cos\theta-c\sin\theta)$

2-24 对图示的杠杆机构，为使机构于任何位置θ都能支持住滑块W，求作用在A点的水平力，（杆重不计）。若在A点作用一向下力能否支持住W？若用一逆时针的力偶M来代替力，问M需多大？

答：$M=2Wa\sin\theta$



题2-23图



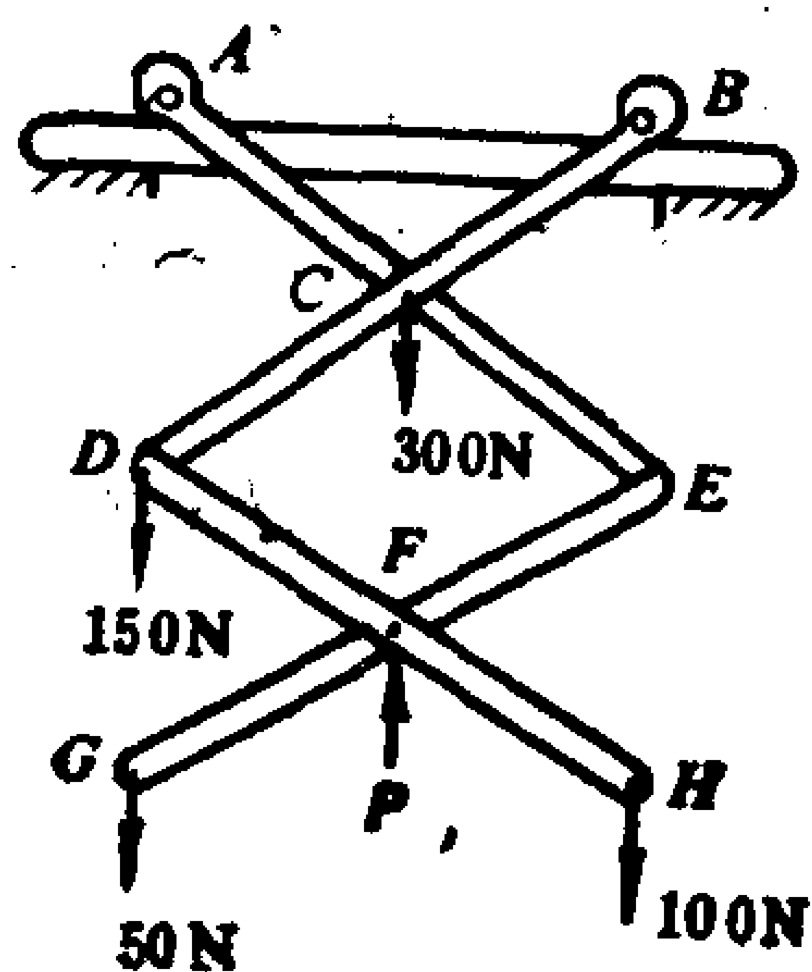
题2-24图

2-25 图示连杆机构，A、B轮可在水平杆上自由地滑动。求：为保持平衡所需之$\boldsymbol{P}$力的大小。

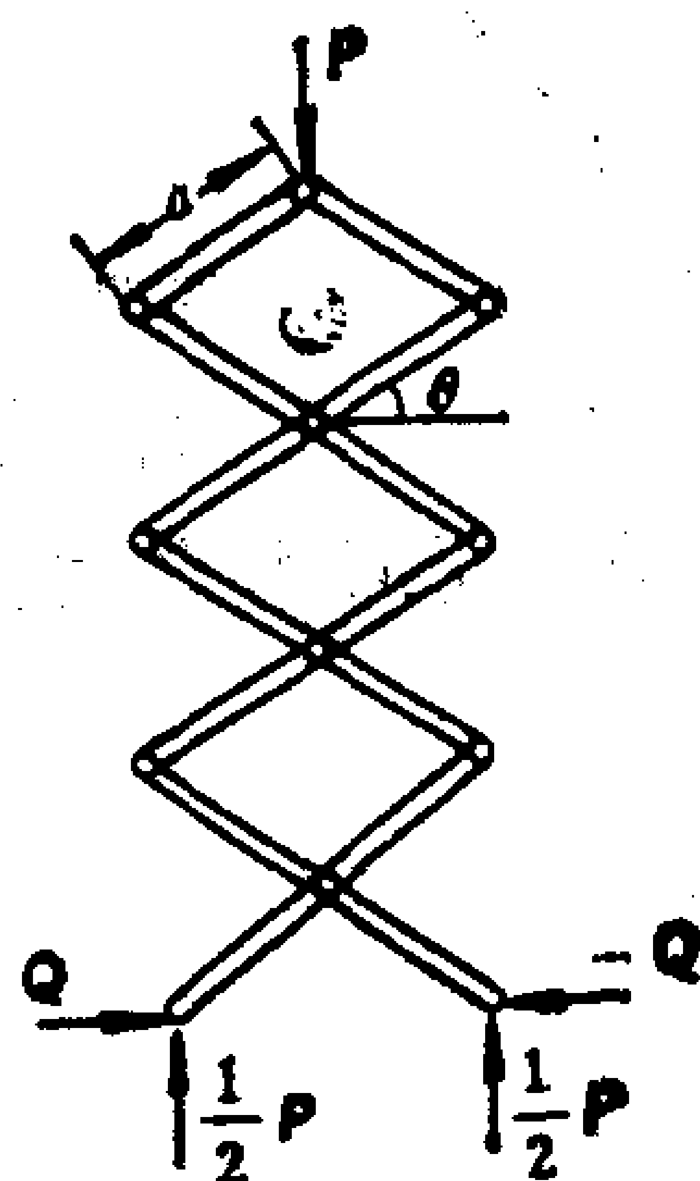
答：$P=400$N

2-26 惰钳由六根长杆和两根短杆组成，长杆长$2a$，短杆长a，杆与杆之间用铰链联结。它在顶部受力$\boldsymbol{P}$的作用，问下部力Q的大小应为多少才能使系统处于平衡状态？图中θ为已知角。

答：$Q=\frac{7}{2}P\text{tg}\theta$



题2-25图

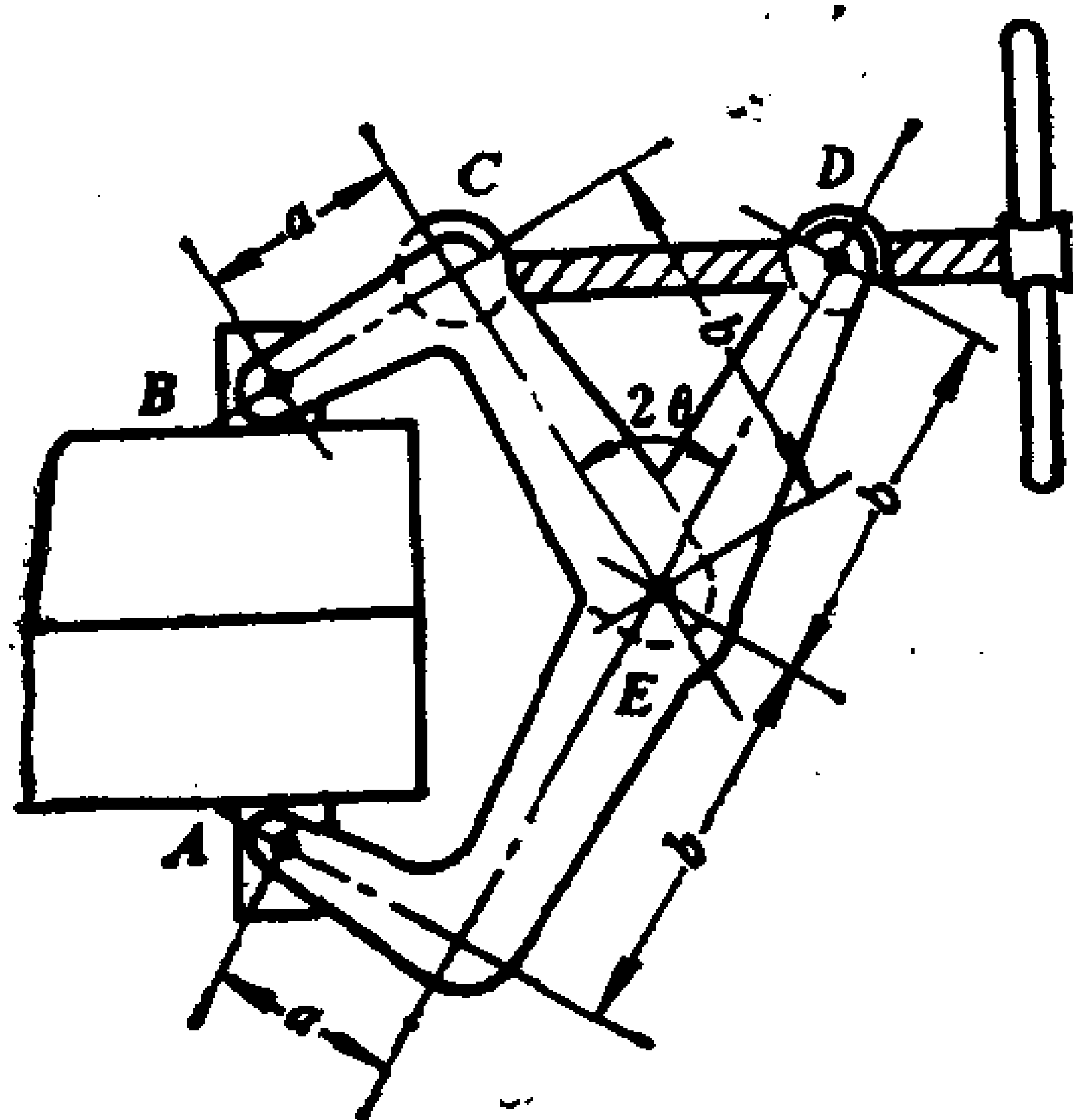


题2-26图

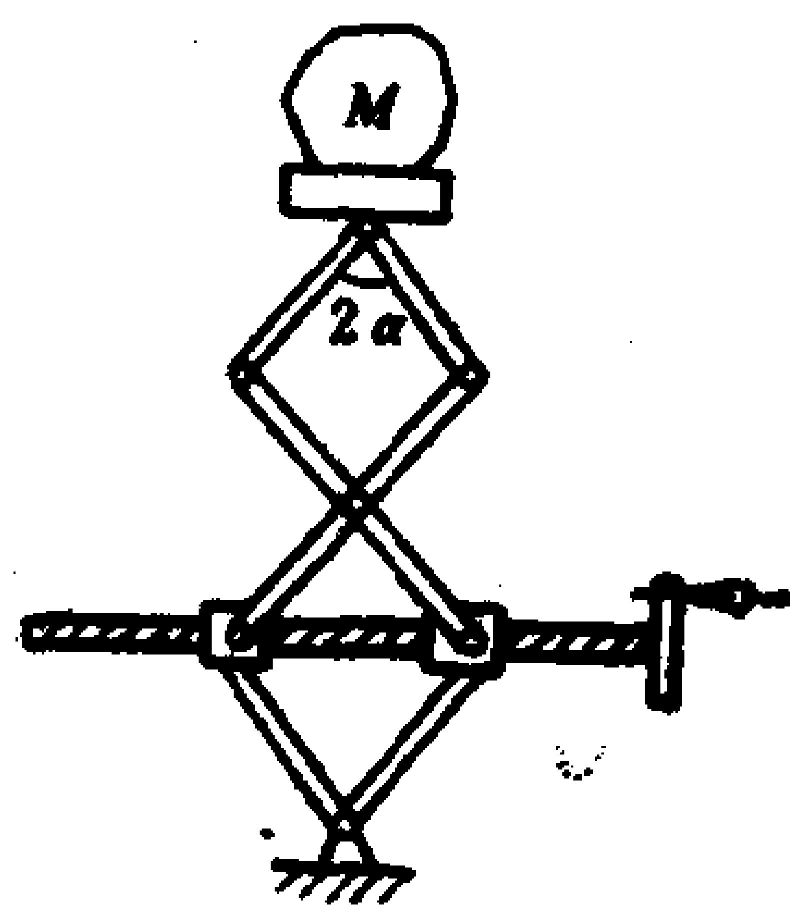
2-27 图示夹钳丝杆的螺距L，为了在开口上产生压力N，必需在手柄上作用多大的力偶？忽略螺丝的摩擦。（提示：取过E点的水平直线为固定参考）

答：$M=\frac{NL}{2\pi}\left(\frac{a}{b}+\operatorname{tg}\theta\right)$

2-28 重为P的货物M由螺距为h的千斤顶来提升，其中



题2-27图



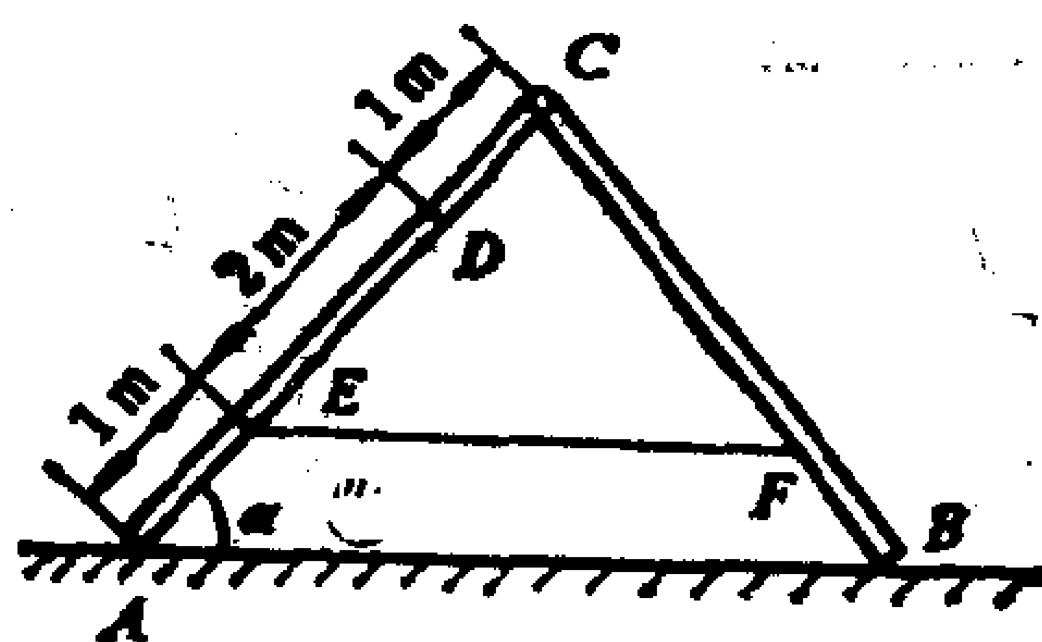
题2-28图

杆件构成两个相同的菱形，不计摩擦，设菱形的锐角为2α，求垂直作用于长度为a的手柄上的力F。

答：$F=\dfrac{2Ph}{\pi a}\text{tg}\alpha$

2-29　对称梯子搁在光滑的地板上。每半边梯子的重量为60N，在D点上站一重为800N的人。求绳索EF的张力与α角的关系。

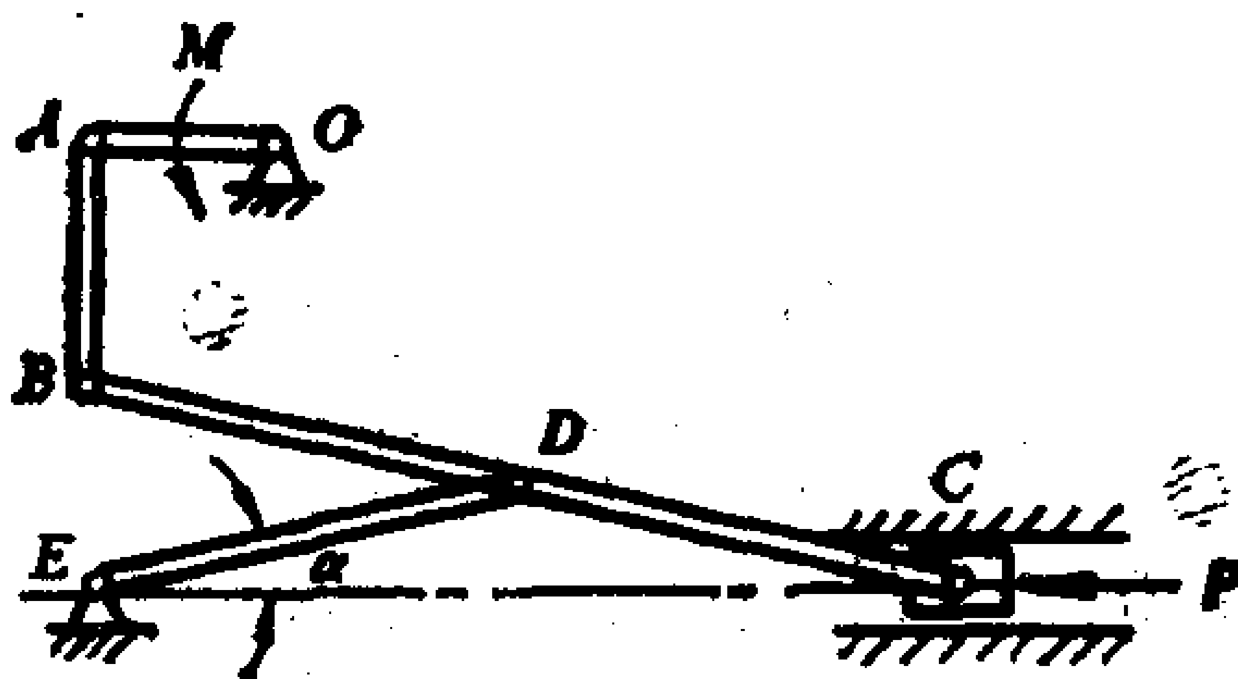
答：$T=440\text{ctg}\alpha$N



题2-29图

2-30　在曲柄连杆式压榨机的曲柄OA上作用一力偶，$M=500$N·m。若$OA=r=0.1$m，$BD=DC=ED=l=0.3$m。机构在水平面内，若$\angle OAB=90°$，$\angle DEC=\alpha=15°$，求水平压榨力P。

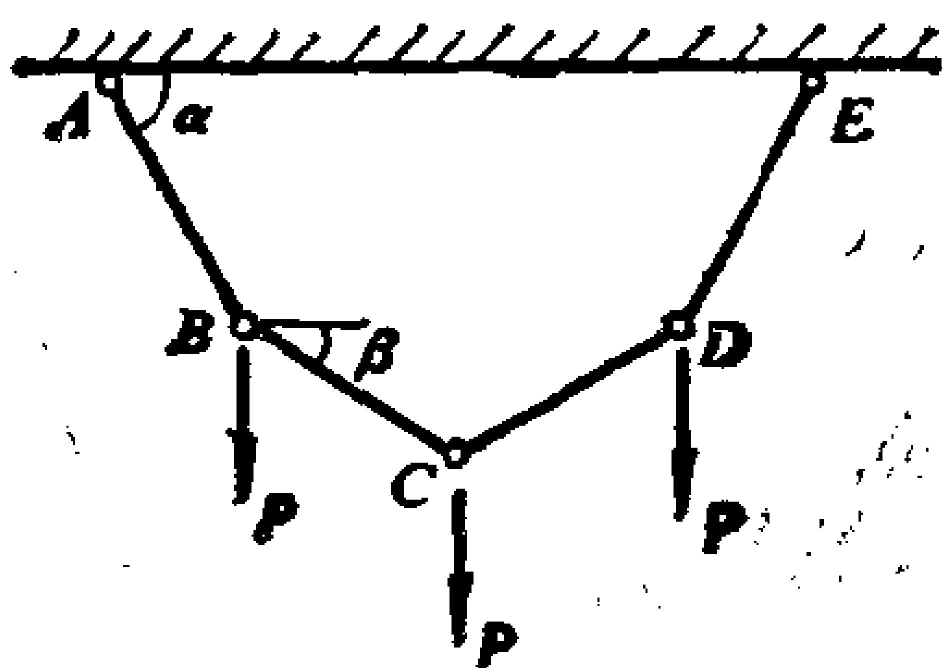
答：$P=13680$N



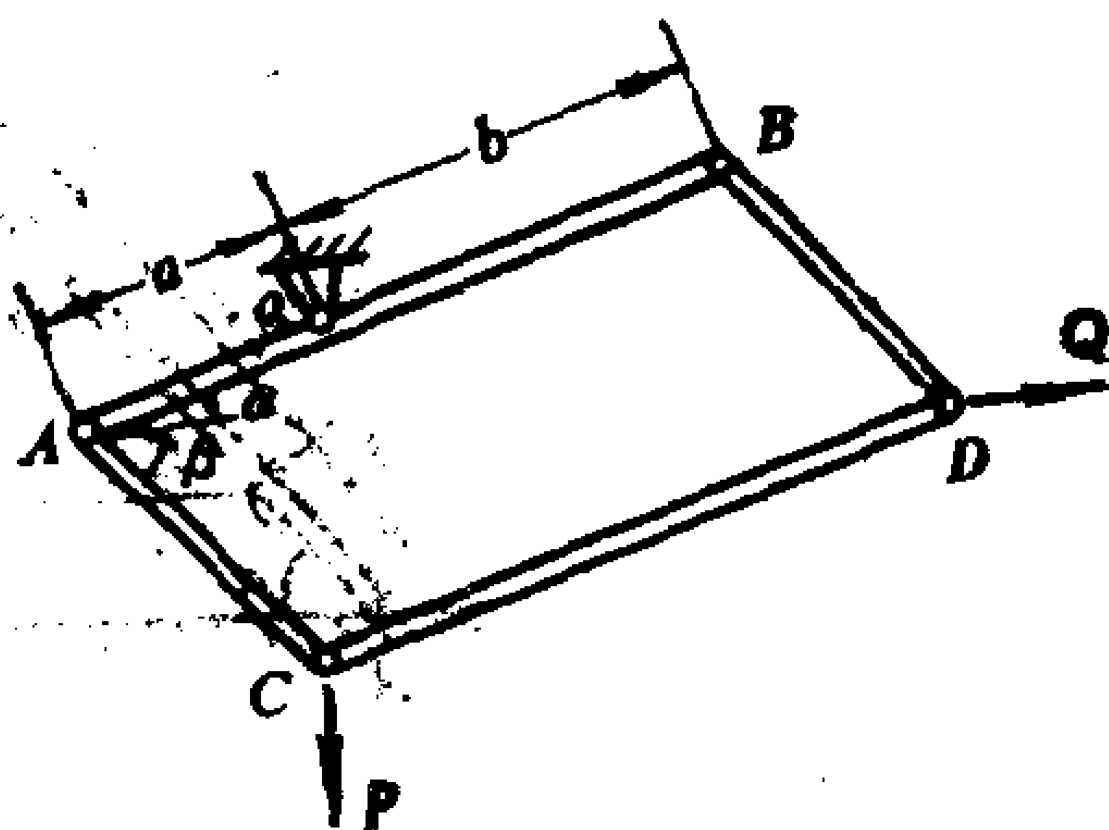
题2-30图

2-31 由四根等长杆构成系统。每根长l，$AE=2l$。若在B、C、D三点处皆作用一相等的铅垂力P，试求杆系处于平衡时α与β所满足的关系，略去杆重。

2-32 在铅垂平面内四杆机构中，$AB=CD$，$AC=BD$，杆AB可绕杆上O点转动，$OA=a$，$OB=b$，今在C点作用一铅垂力P，D处作用一水平力Q，使机构处于平衡。问此时AB、AC杆与水平绕夹角α、β各为多少？（略去杆重）



题2-31图

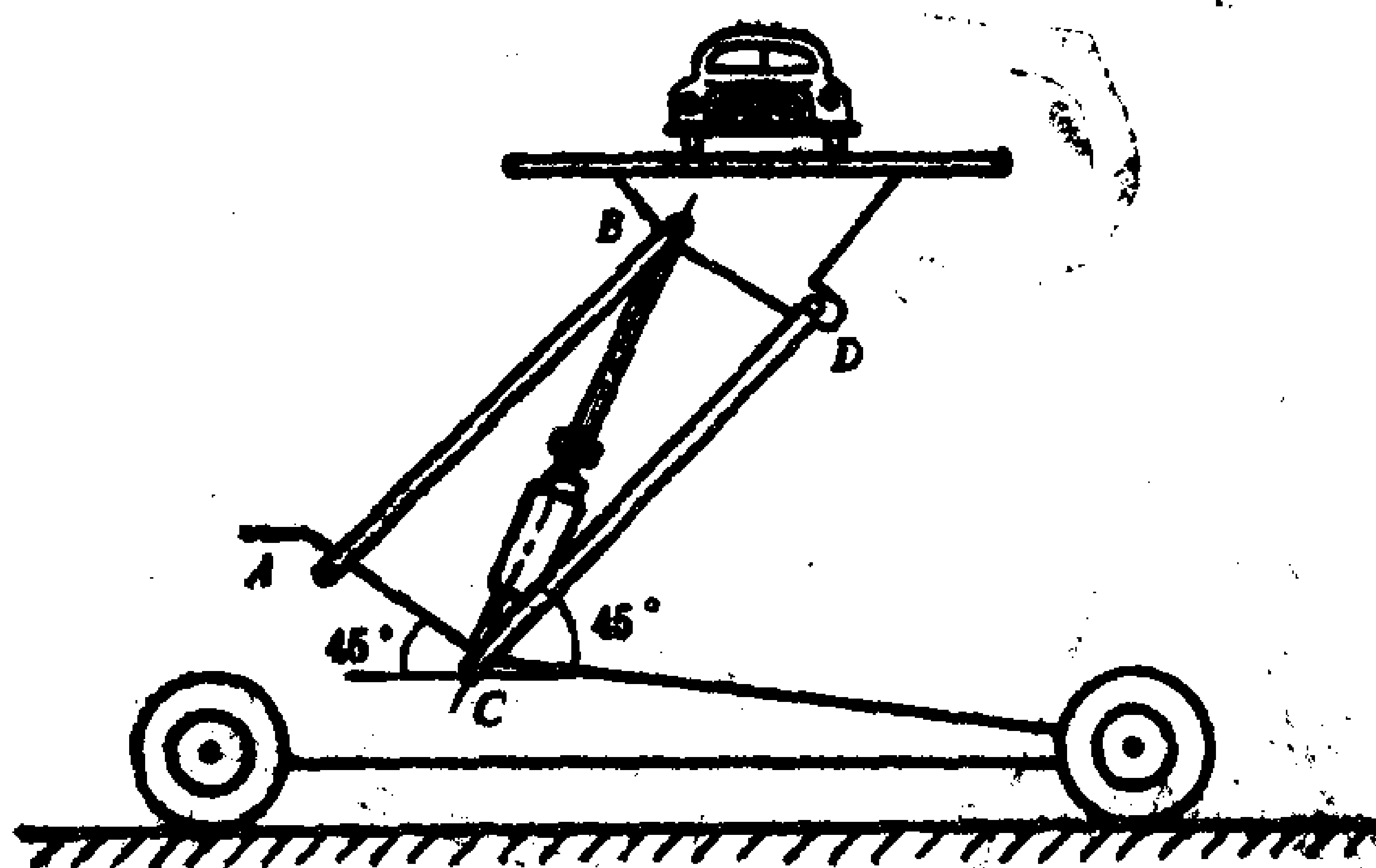


题2-32图

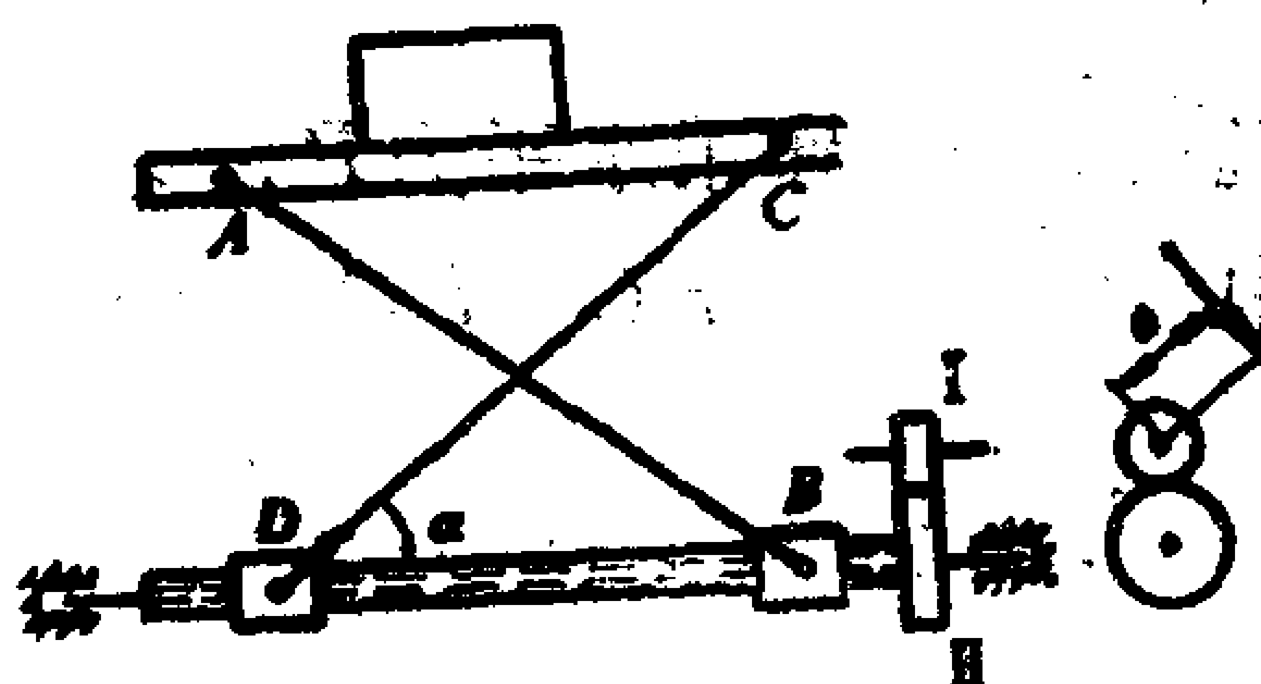
2-33 图示一移动式起重机，活动部分借两等长连杆AB、CD与底部相联。而$ABCD$构成一平行四边形。利用油压力作用在BC杆上而使汽车被举起。问当汽车重为10^4N时，油压力多大方能举起汽车。设此时CD与水平的夹角为45°，AC与水平的夹角亦为45°，$AB=CD=5$m，$AC=BD=1.7$m。

答：22000N

2-34 升降机如图示。当转动手柄时，套筒D、B借螺杠的作用向内靠近，致使平台上升。已知齿数$z_{\mathrm{I}}=12$，$z_{\mathrm{II}}=18$，螺距$h=0.6$cm，手柄长度$a=10$ cm，荷载重$Q=800$ N，力$\boldsymbol{P}$垂直于手柄。求当CD杆与水平成$\alpha=45°$时，托住荷载所需力P之值。



题2-33图



题2-34图

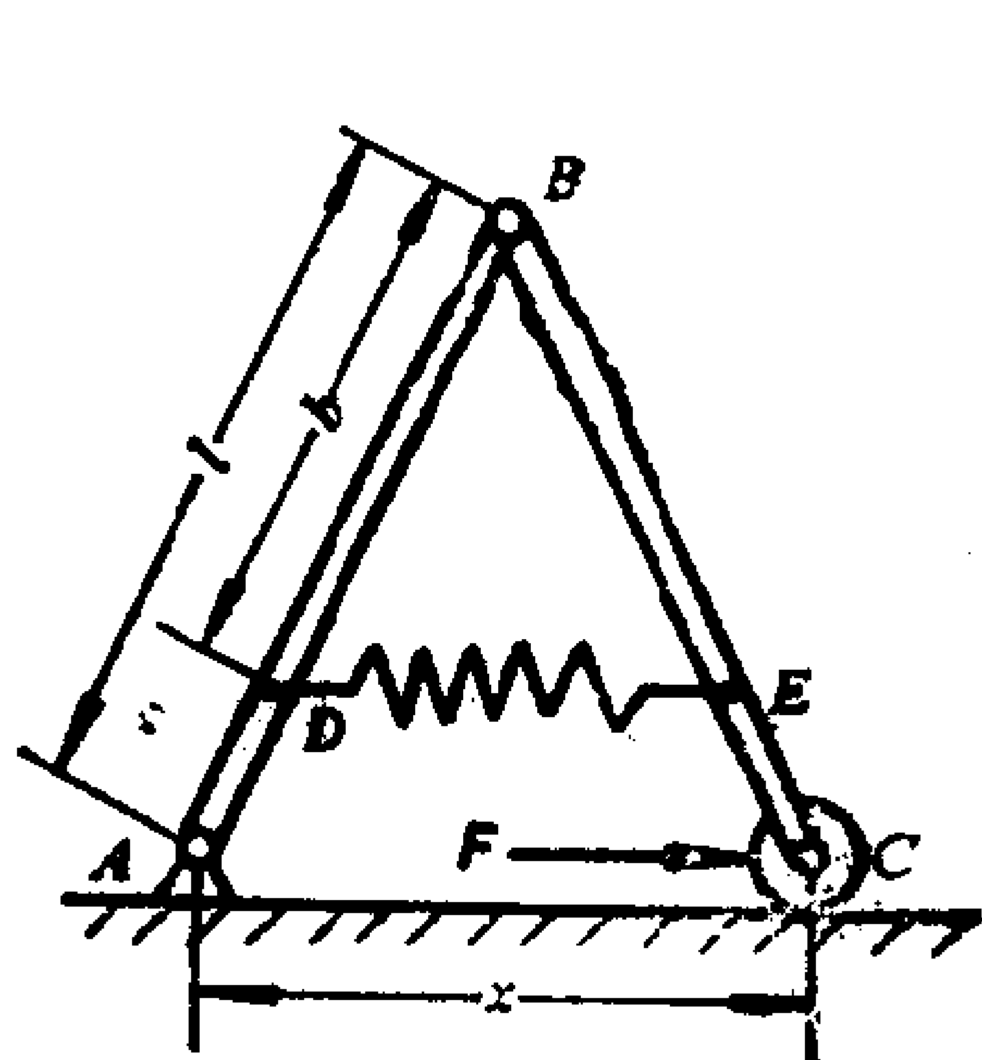
2-35 两等长杆AB和BC在B点用铰链联结，又在杆的D和E两点连一弹簧，弹簧的刚性系数为c，当距离$AC=a$时，弹簧内拉力为零。如在C点作用一水平力$\boldsymbol{F}$，杆系处于平衡，求距离AC之值。设$AB=l$，$BD=b$，杆重不计。

答：$AC=x=a+\dfrac{F}{c}\left(\dfrac{l}{b}\right)^2$

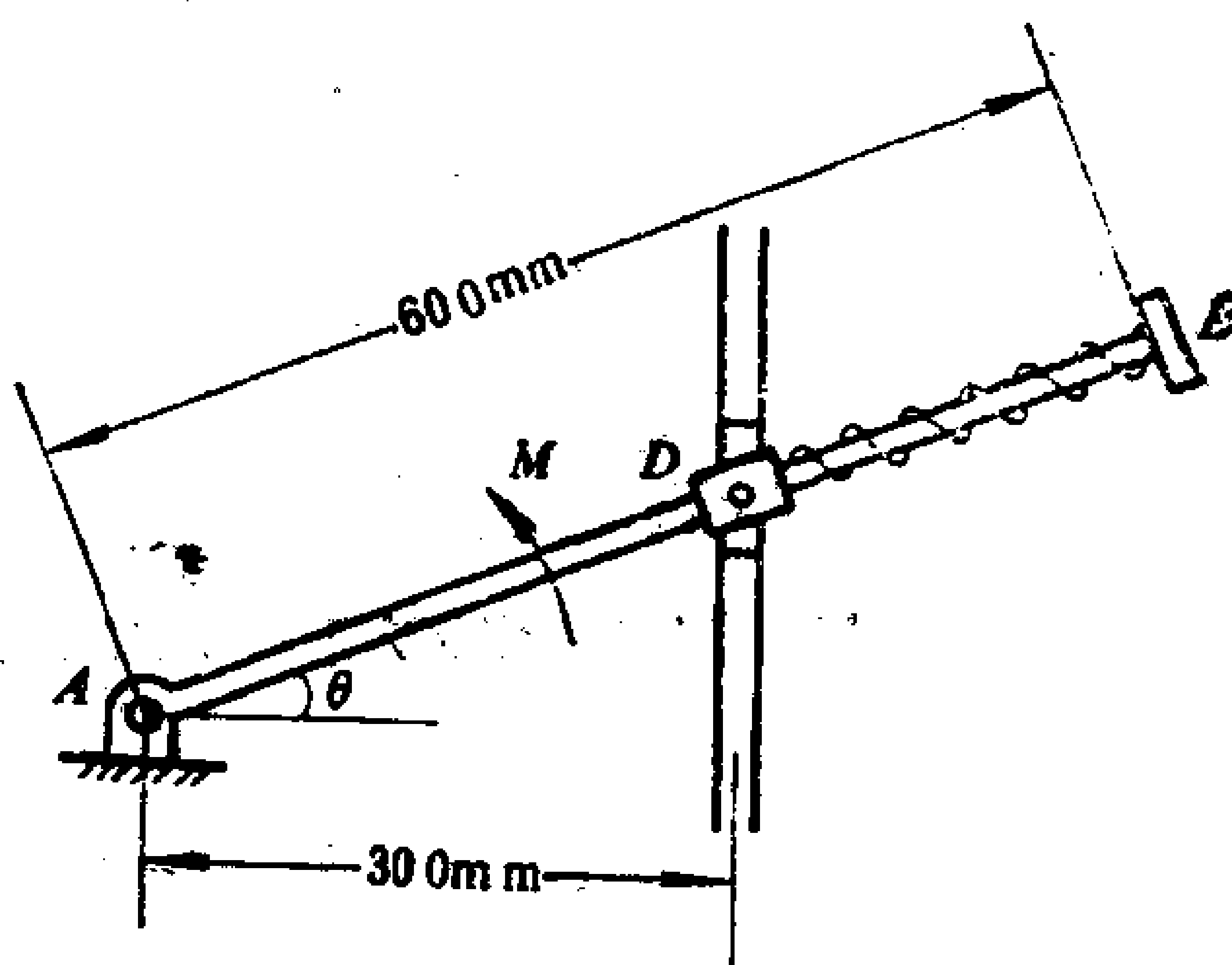
2-36 滑套D活套在光滑直杆AB上，并与一滑块铰接，而滑块则可沿光滑直槽滑动。已知在$\theta=0$位置弹簧不受力，弹簧的刚性系数为5kN/m，求在θ位置，为维持平衡应加力

矩M的大小。

答：$M_A=450\dfrac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\cos^3\theta}$ N．m



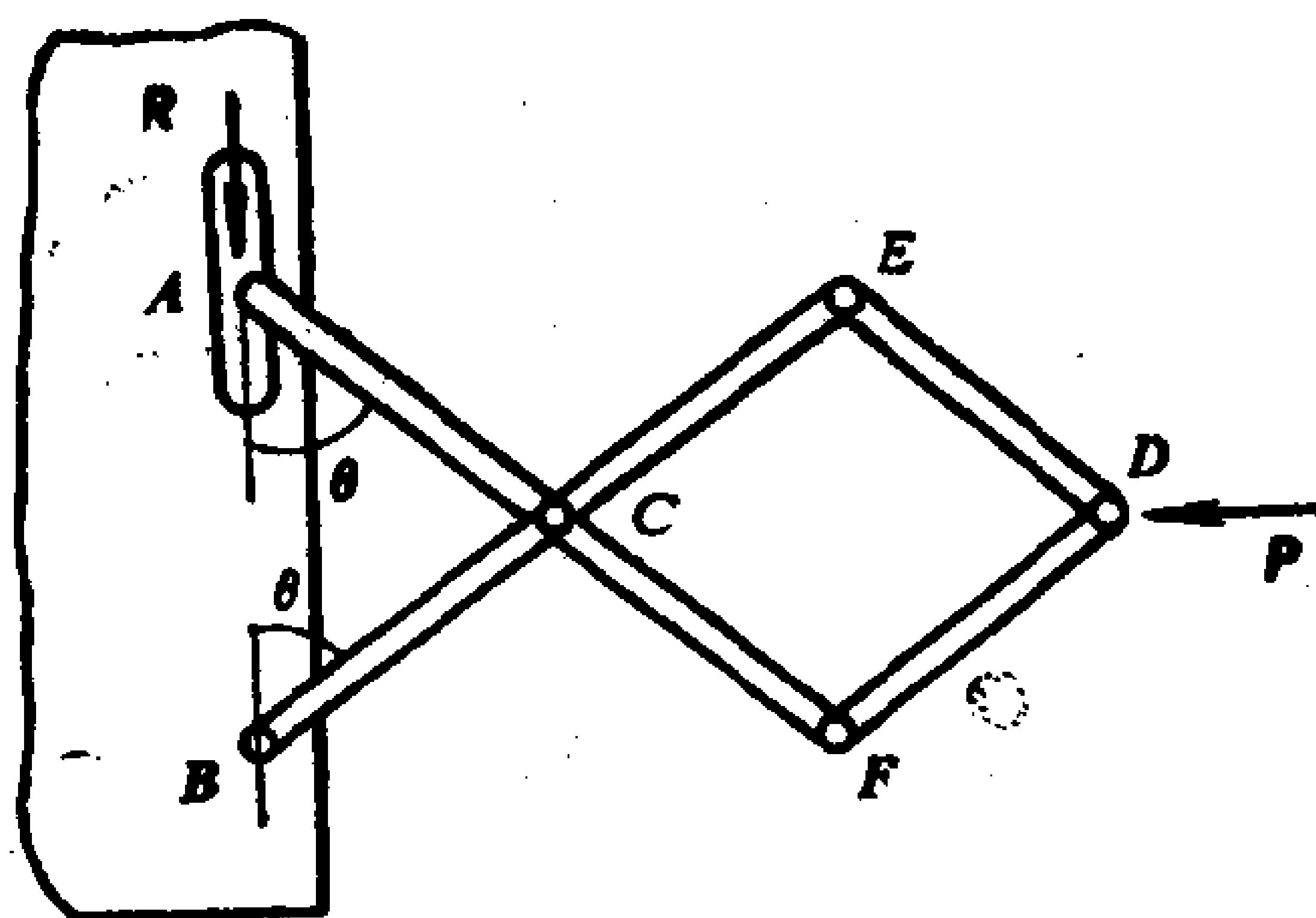
题2-35图



题2-36图

2-37 图示机构的D点作用水平力$\boldsymbol{P}$，求保持机构平衡的力$\boldsymbol{R}$的值。图中$AC=BC=EC=FC=DE=DF=l$。

答：$P=\dfrac{2}{3}R\mathrm{tg}\theta$



题2-37图

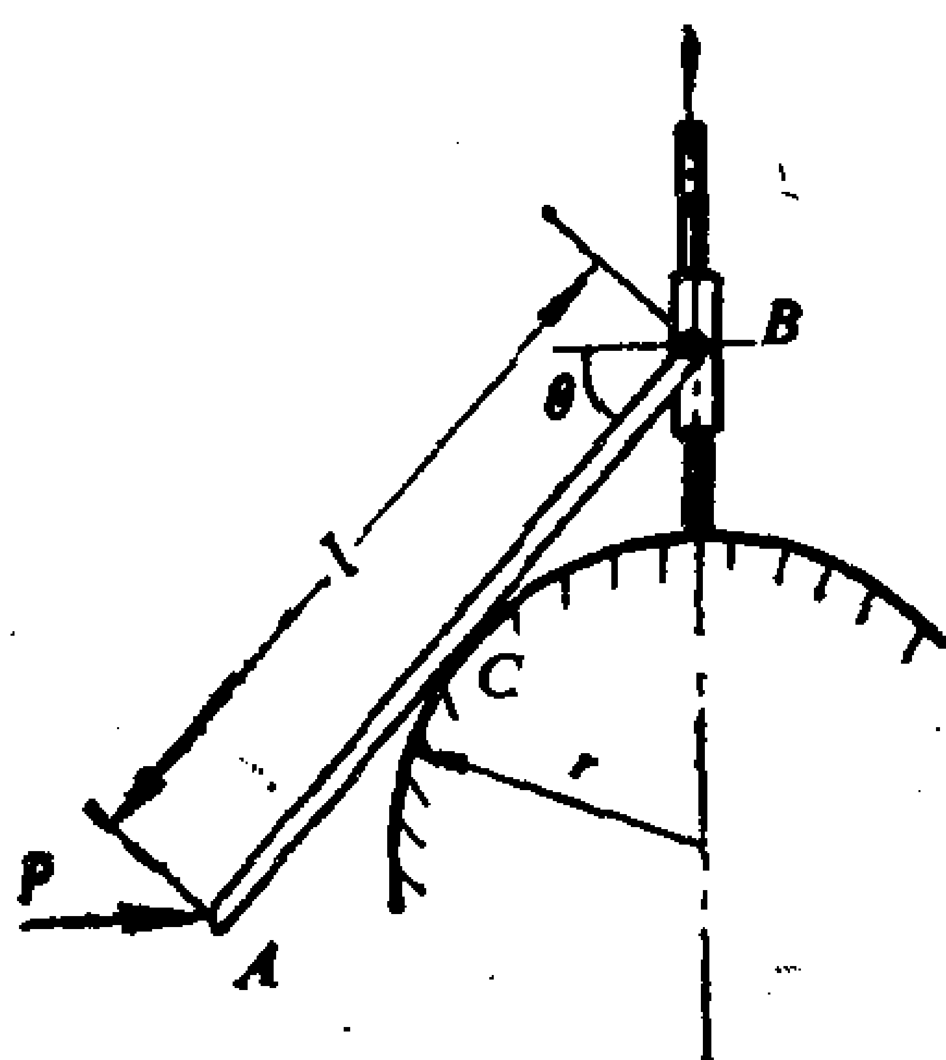
2-38 长为l的细杆联结在滑套B上，静止在半径为r的

光滑圆柱面上，设滑套可沿垂直杆自由滑动。试导出使系统保持平衡所需力Q的大小的表达式。

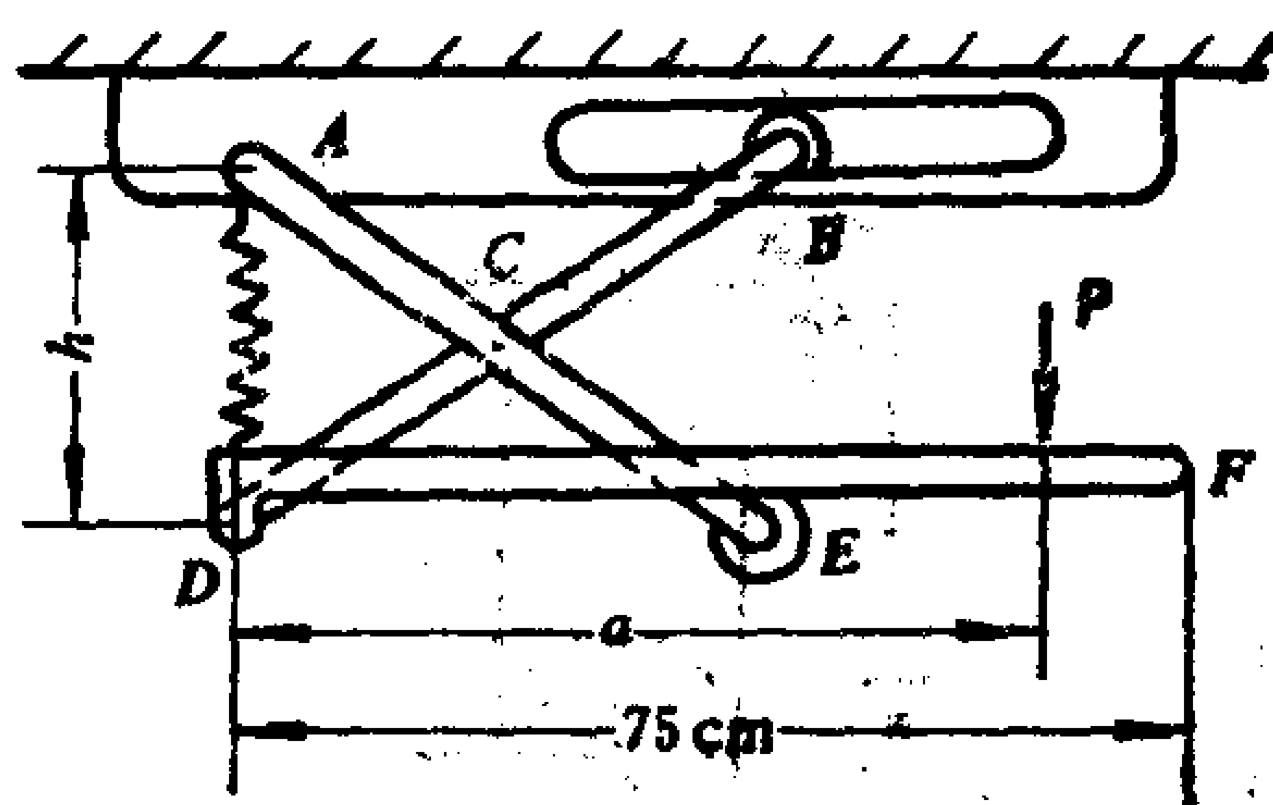
答：$Q=\dfrac{Pl}{r}\cos^2\theta$

2-39　图示系统中杆ACE与DCB长均为25cm，用销钉C在中点铰接起来，在DF上作用一大小为2000N的载荷，已知$h=15$cm，$a=30$cm，求：(1)弹簧AD的张力；(2)弹簧的原长。已知弹簧的刚度系数为400N/cm。

答：(1)2000N；(2)10cm



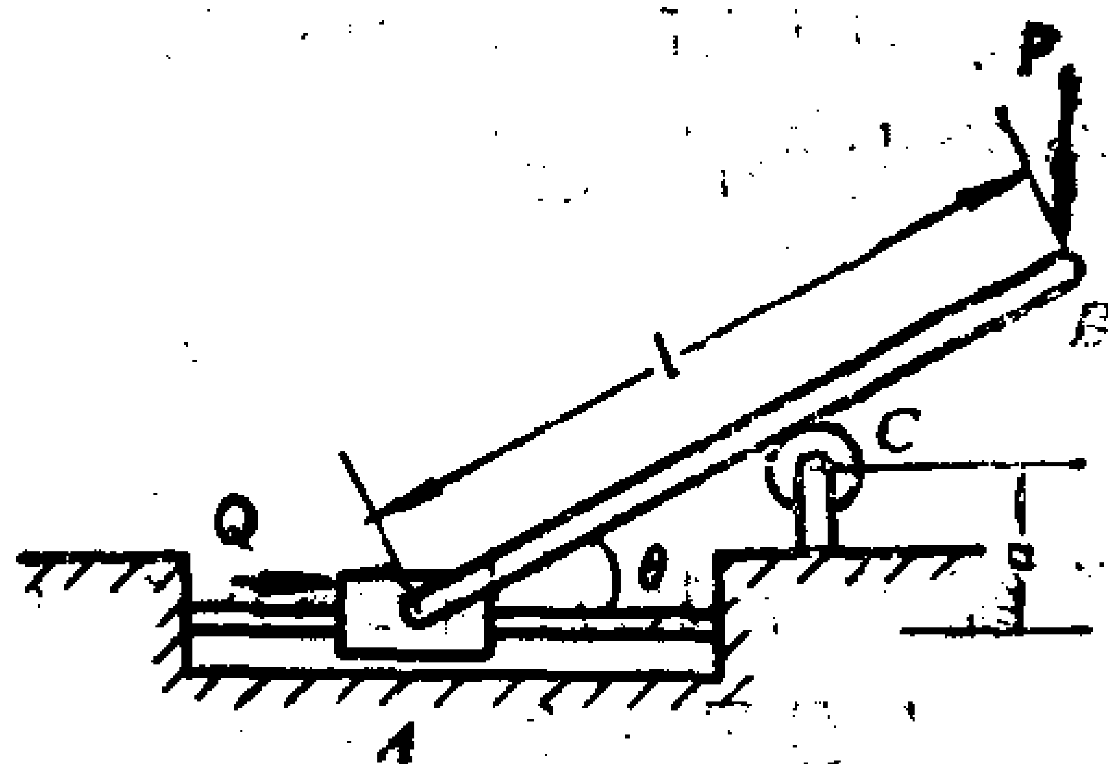
题2-38图



题2-39图

2-40　图示杆AB的一端A与套筒固联，AB杆搁在C处的轮子上，略去摩擦，试导出为了保持平衡所需水平力Q大小的表达式。

答：$Q=P\dfrac{l}{a}\cos\theta\sin^2\theta$



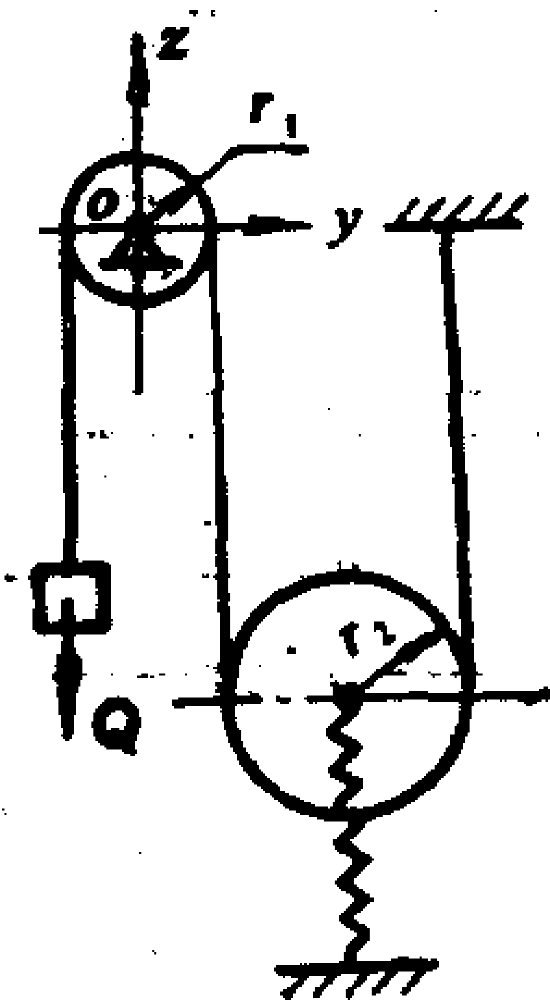
题2-40图

2-41 已知半径为r_2的轮重$P=200$N，$Q=200$N，弹簧刚性系数为$c=100$N/cm，试求平衡时弹簧的变形量h。

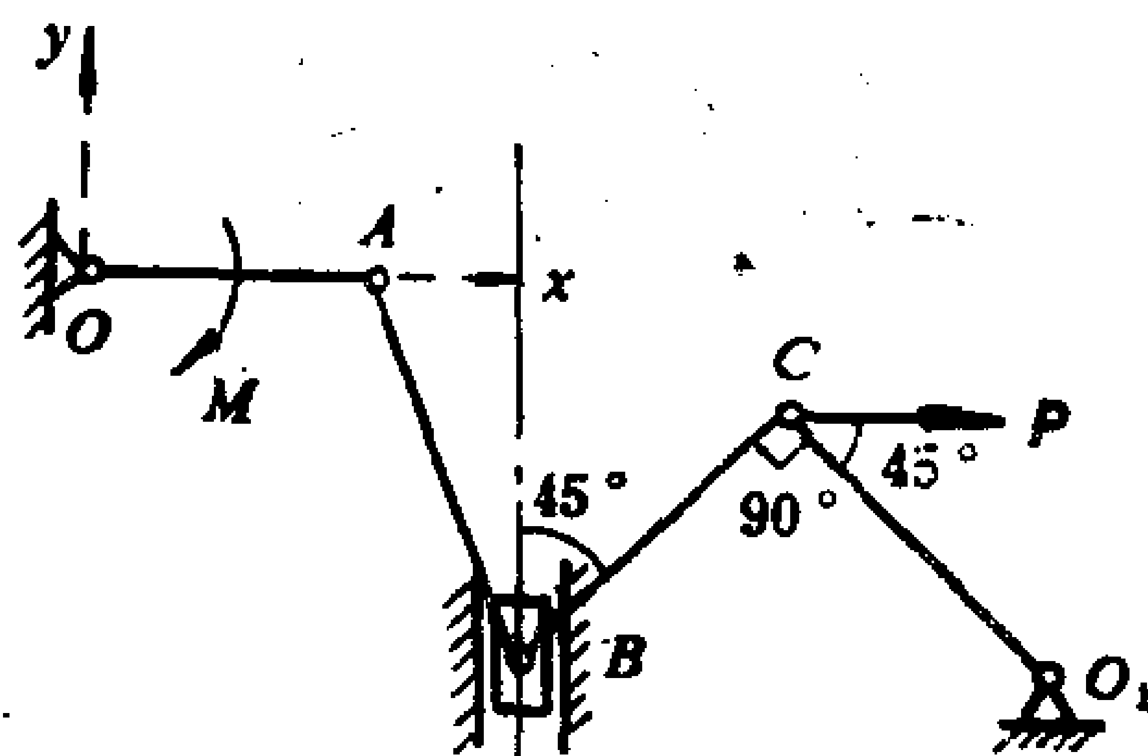
答：$h=2$cm，被拉伸

2-42 已知图示机构处于平衡。$OA=40$cm，力偶距$M=200$N·m。试求力$\boldsymbol{P}$的大小。

答：$P=10$N



题2-41图



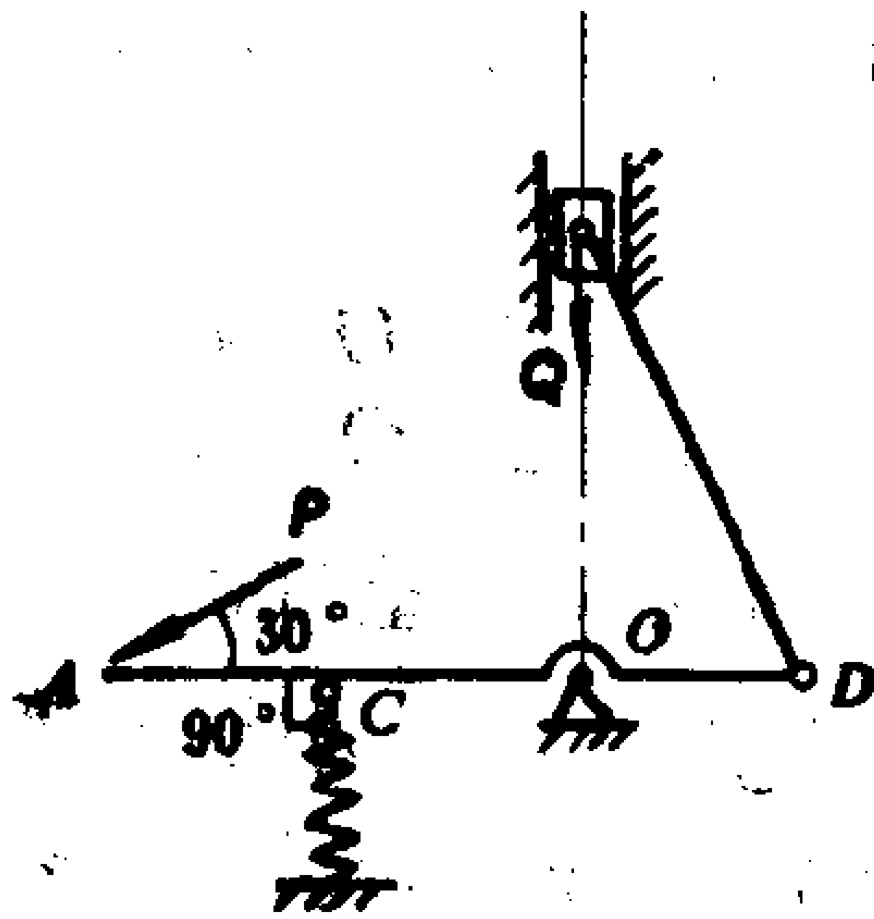
题2-42图

2-43 如图，不计各杆自重及各处摩擦。已知$AC=OC=OD$，$Q=3\times10^3$N，弹簧刚性系数$c=250$N/cm，弹簧变形(被压缩)$h=3$cm。试求P多大时才能平衡？

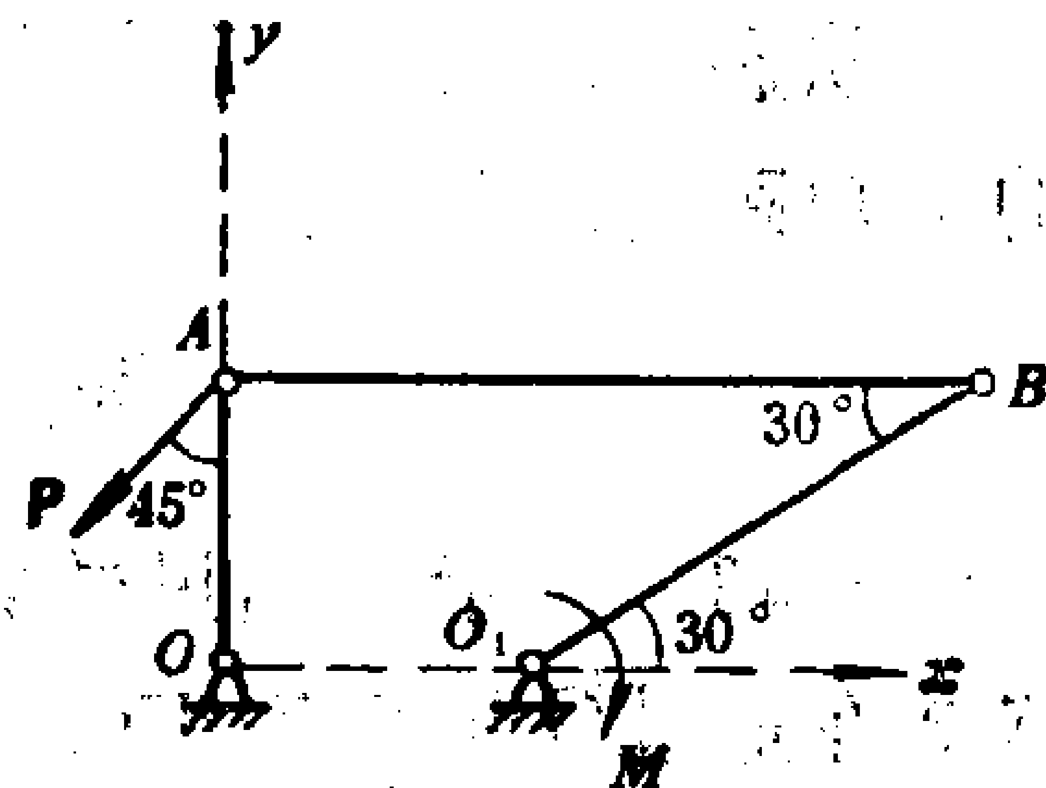
答：$P=3750\text{N}$

2-44 机构在图示位置处于平衡。已知$OA=40\text{cm}$，$M=400\text{N}\cdot\text{m}$，试求$\boldsymbol{P}$的大小。

答：$P=\sqrt{2}\ \text{kN}$



题2-43图

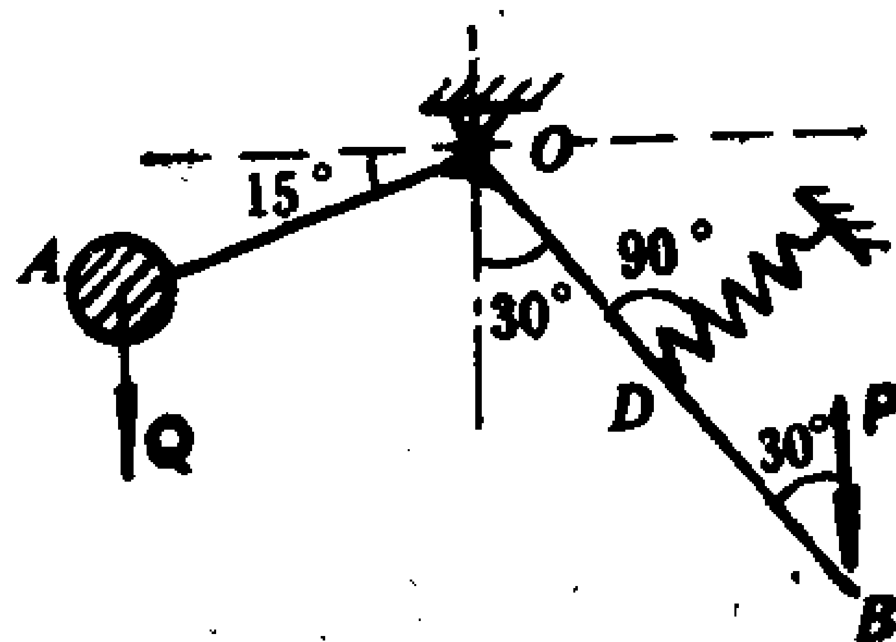


题2-44图

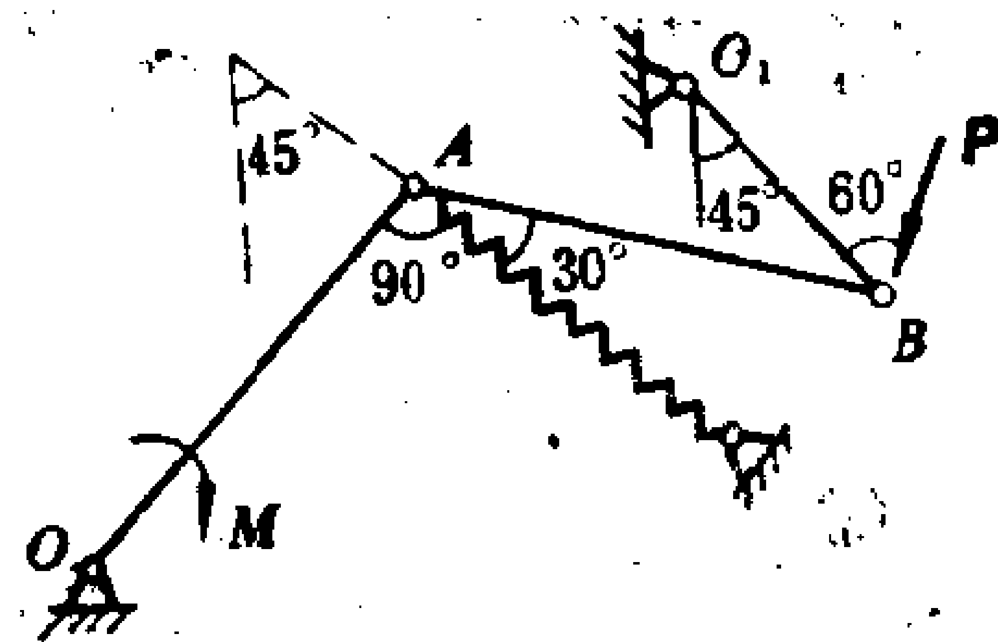
2-45 图示为系统平衡位置。已知$OD=DB=\frac{4}{5}OA$，$Q=400\text{N}$，弹簧刚性系数为$c=120\ \text{N/cm}$，弹簧被拉伸$h=3\text{cm}$，不计杆AO和BO的重量。试求力$\boldsymbol{P}$的大小。

答：$P\doteq 843\text{N}$

2-46 图示机构处于平衡状态。已知$OA=25\text{cm}$，$P=500\text{N}$，$M=120\text{Nm}$，弹簧被拉伸$h=2\text{cm}$。试求弹簧的刚性



题2-45图



题2-46图

系数c。

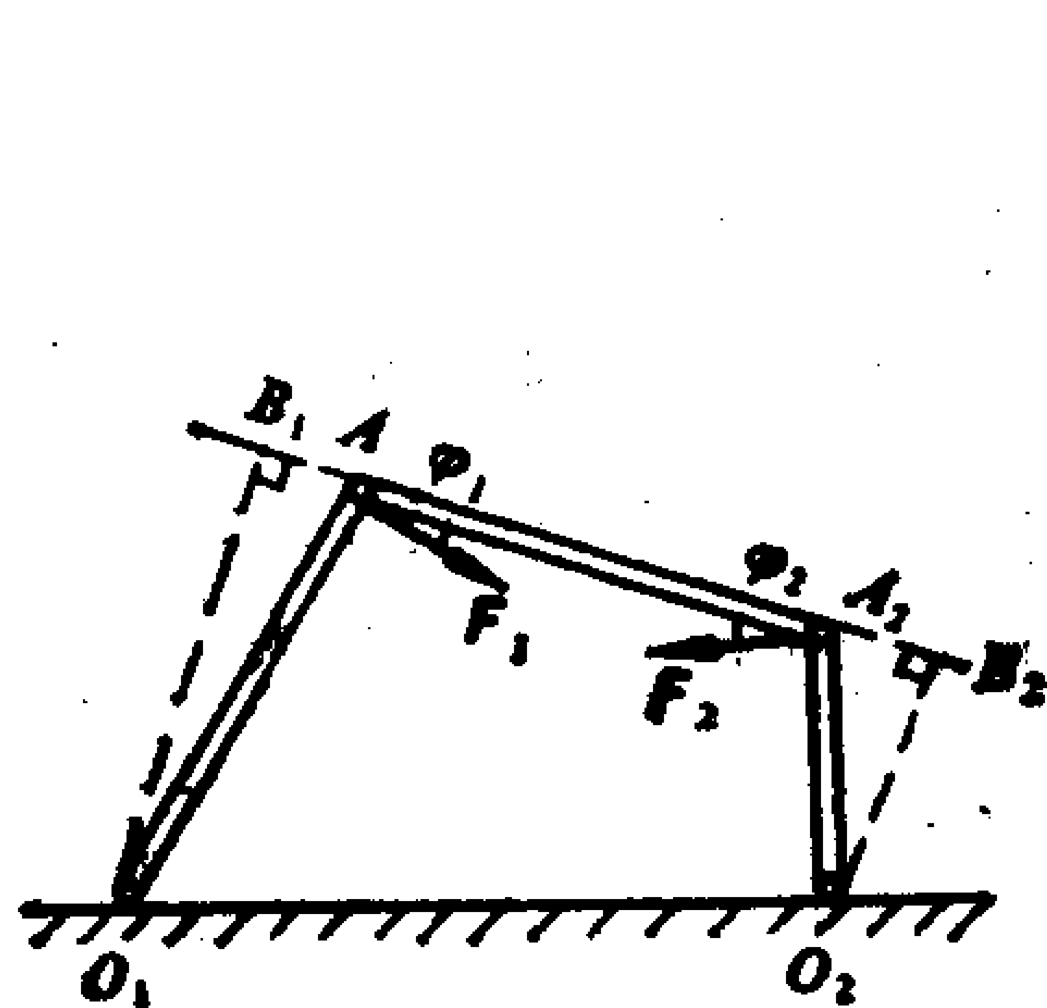
答：$c=135\text{N/cm}$

2-47 在四连杆机构$O_1AA_2O_2$的铰链A与A_2处作用有力F_1与F_2，此二力分别垂直于杆O_1A与O_2A_2，机构处于平衡状态。求力F_1，F_2之比与自转动轴O_1与O_2到杆AA_2的最短距离之关系。

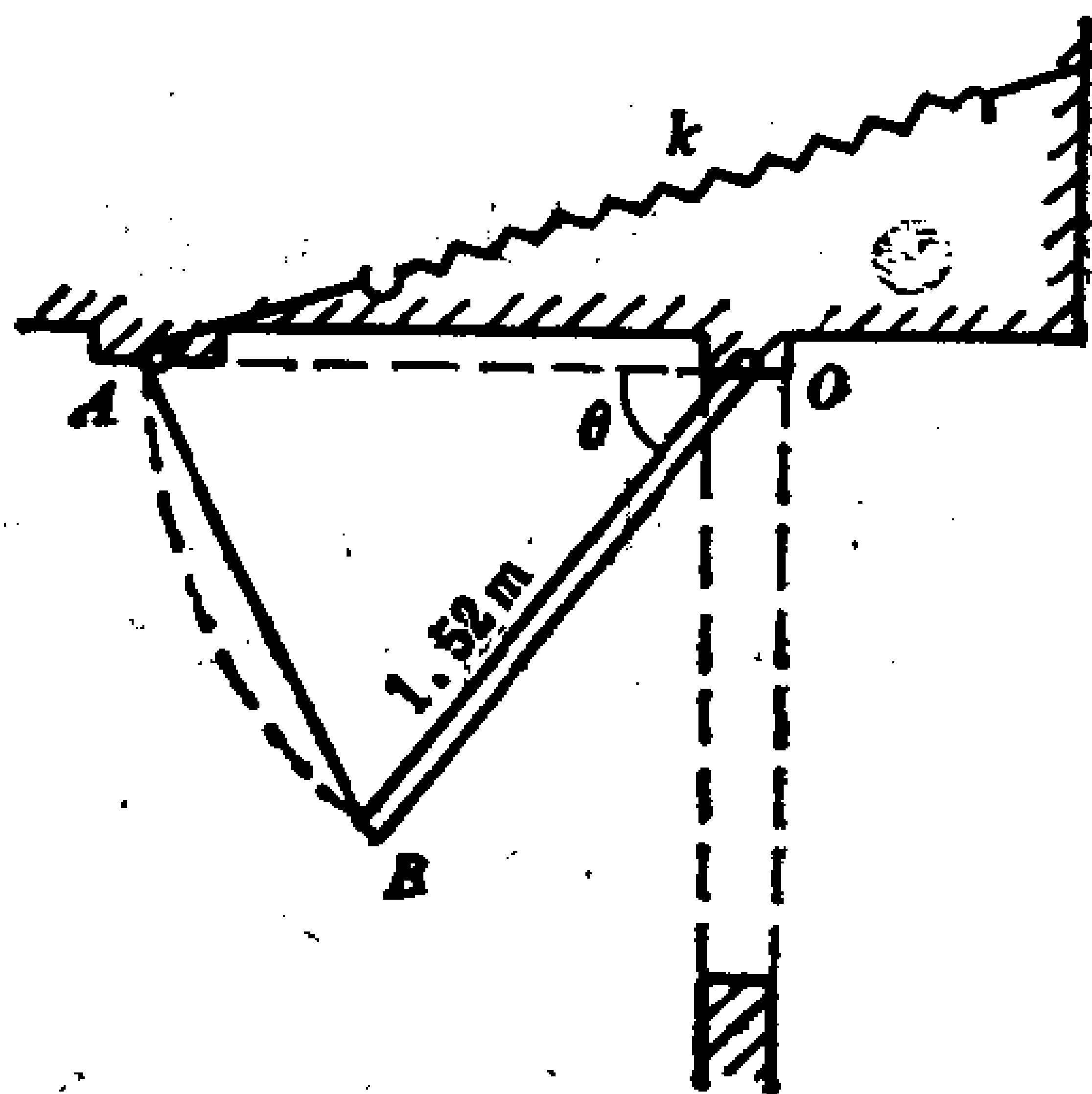
答：$\frac{F_1}{F_2}=\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}=\frac{O_1B_1}{O_1A}\frac{O_2A_2}{O_2B_2}$

2-48 图示为通风装置均质门的横断面，门重2000N，铰接在通过O点垂直图面的轴上。该门由经过A点小滑轮的弹簧升降系统控制。已知弹簧的刚度系数为200N/m，且在$\theta=0$时弹簧没有变形。求平衡时的θ角。

答：$\theta=73.09^\circ$



题2-47图



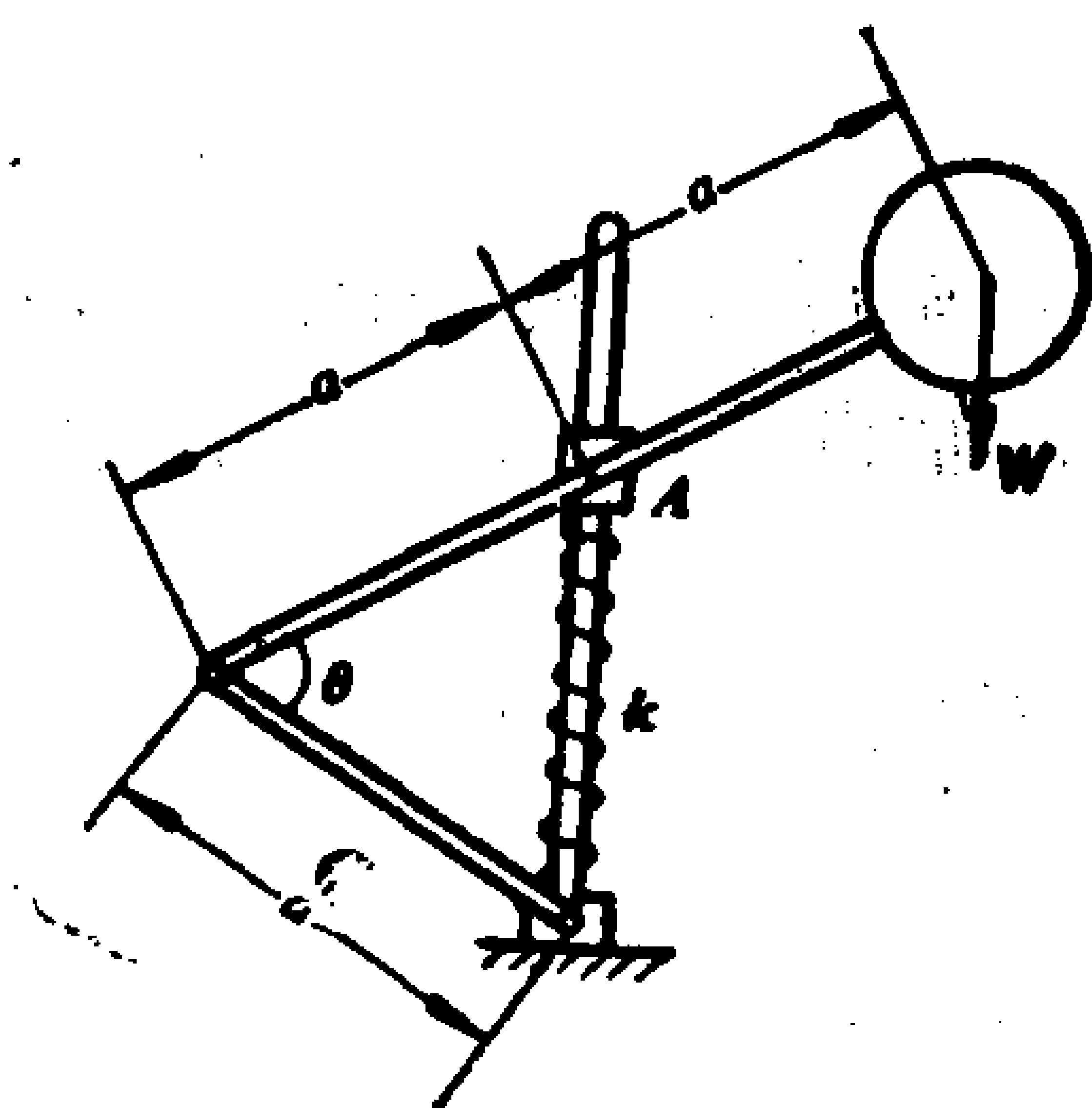
题2-48图

2-49 图示系统当$\theta=180^\circ$时，刚度系数为k的弹簧未被压缩，求：除$\theta=180^\circ$外的其它平衡位置的θ角。略去杆重和套环A在垂直轴上滑动时的摩擦。

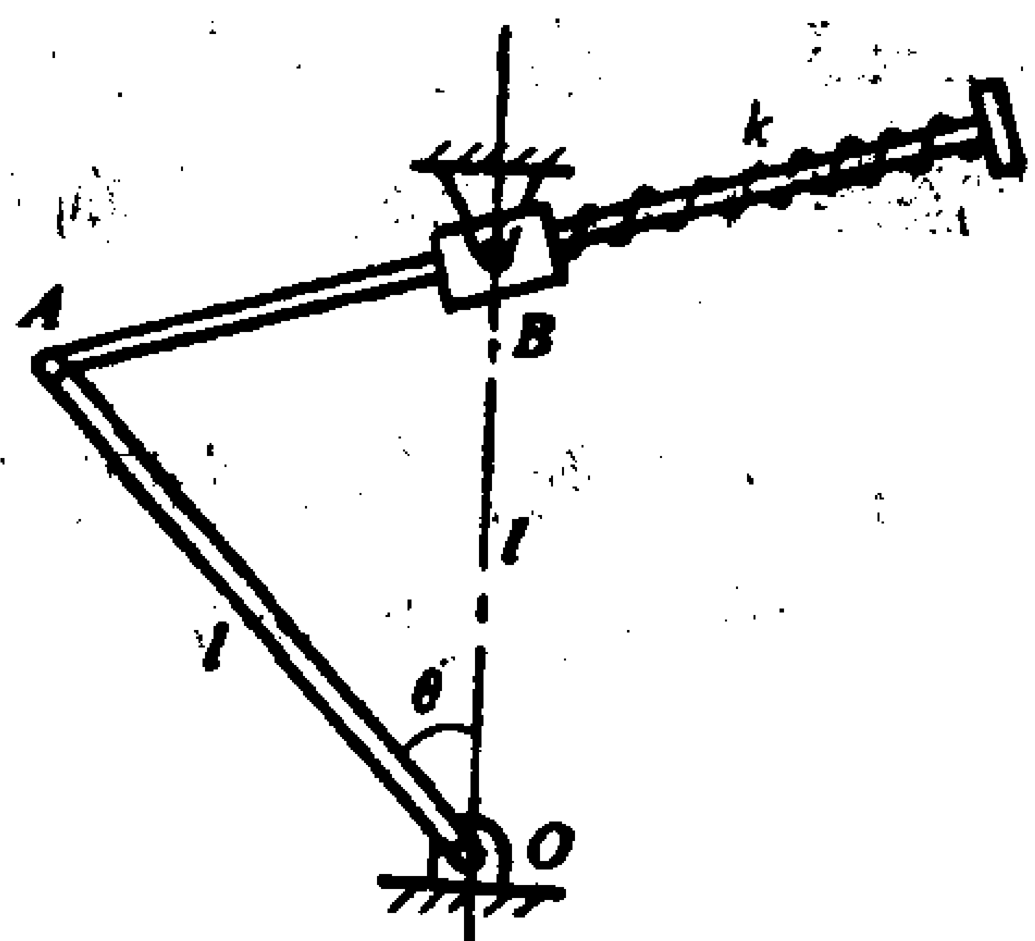
答：$\theta=2\arcsin\dfrac{ke-3W}{8ka}$

2-50 图示为一均质门的横截面，门重W，铰接在O点上。当$\theta=0$时弹簧没变形；已知弹簧的刚度系数为k。试证：若选取适当的弹簧常数k，门将在任何位置处于平衡。

答：$k=\dfrac{W}{2l}$



题2-49图



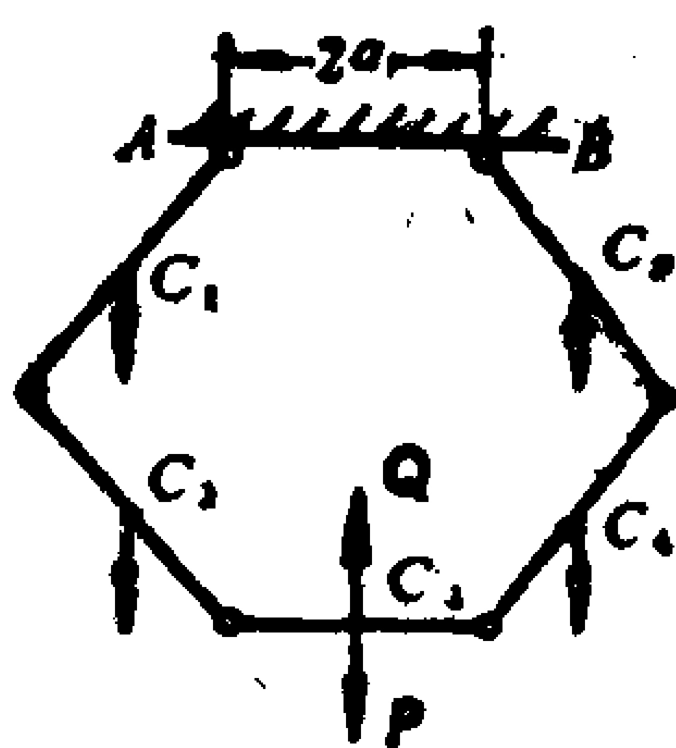
题2-50图

2-51 一铰接六边形，由六个相同的均质杆组成；每杆重P，且同处一铅垂面上。上面固定于水平位置，其余各边位置对于通过AB中点的铅垂线成对称，问欲使系统能随遇平衡，应在下面水平杆中点作用多大的铅垂力？

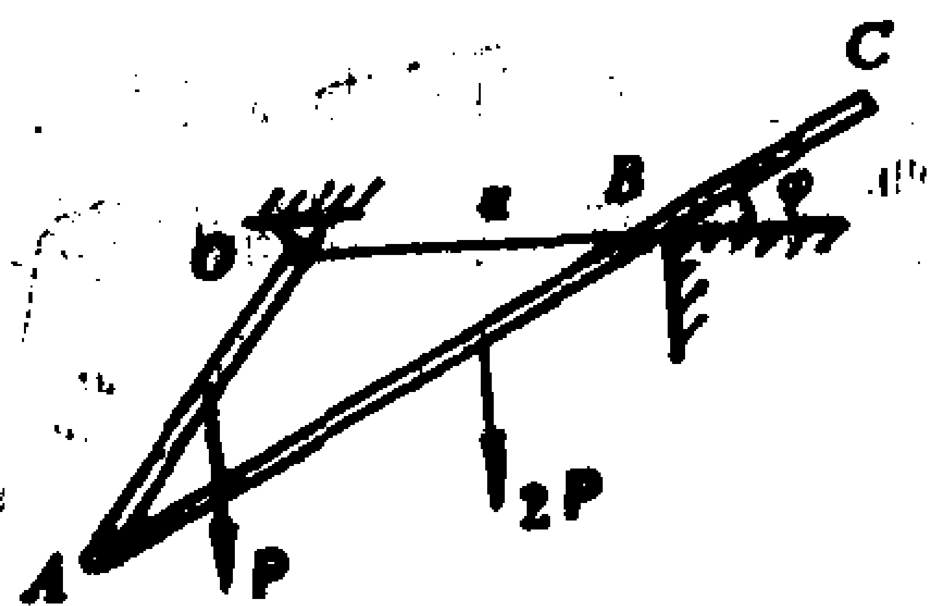
答：$Q=3P$

2-52 如图已知$AC=2a$，$AO=OB=a$，杆AO重P，杆AC重$2P$，试求平衡时的角φ。

答：$\cos\varphi=0.1+\sqrt{0.51}$



题2-51图



题2-52图

2-53 一均质杆长l重P，其两端可沿曲线$f(x, y)=0$无摩擦地滑动。求杆的平衡位置(y轴铅垂向上，x轴水平向右)。

答：在平衡位置，杆两端坐标(x_1, y_1)，(x_2, y_2)满足下列四个方程：

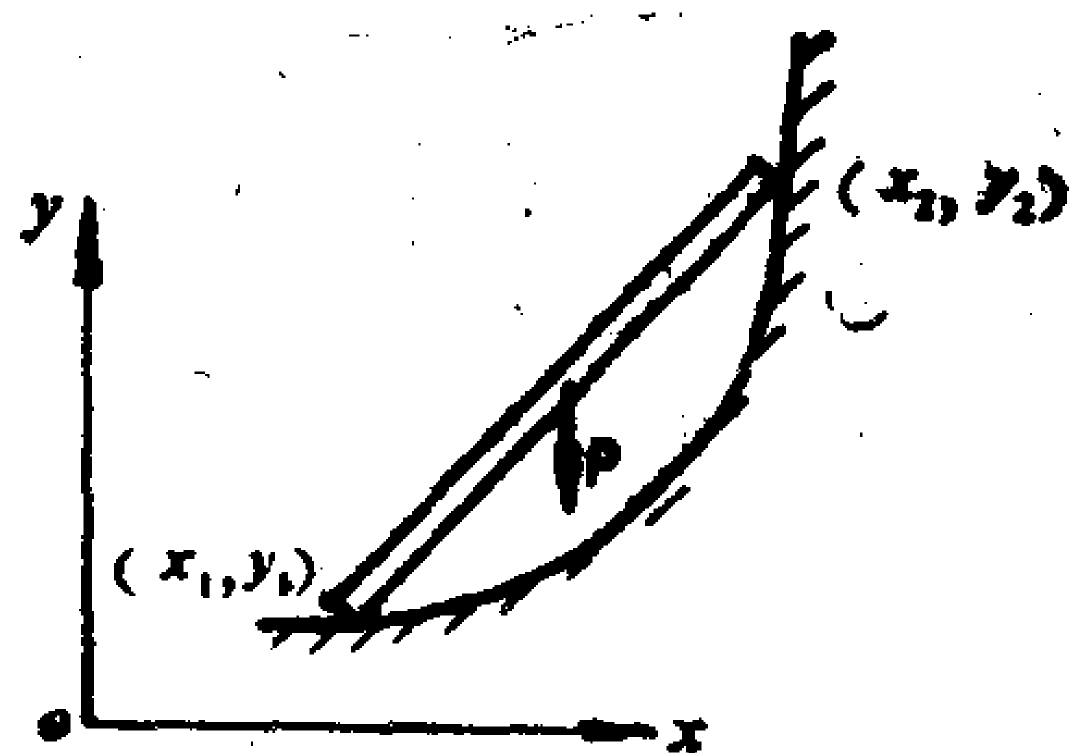
$$f(x_1, y_1)=0,\ f(x_2, y_2)=0$$

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-l^2=0$$

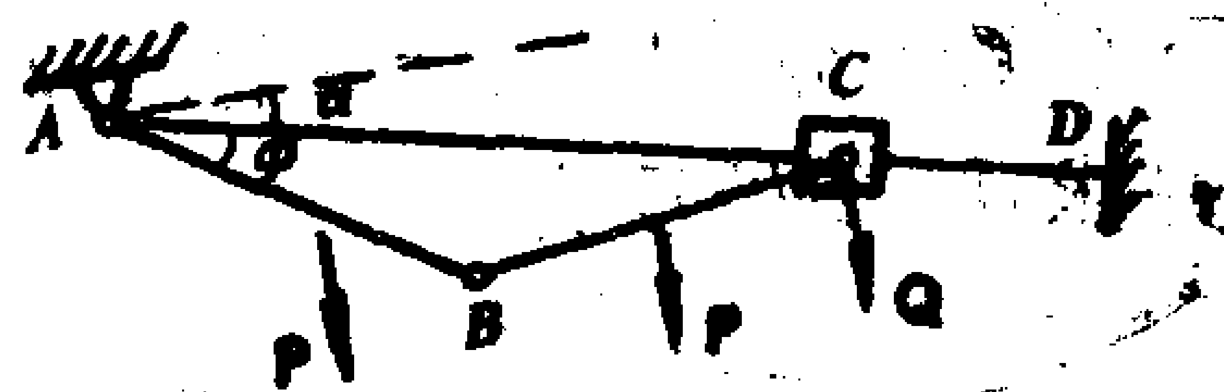
$$2(y_2-y_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}=(x_2-x_1)\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial y_2}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial y_1}\right]$$

2-54 在图示机构中，曲柄AB和连杆BC为均质杆，具有相同的长度和重量P。滑块C的重量为Q，可沿倾角为α的导轨AD滑动。设约束都是理想的，求系统在铅垂平面内的平衡位置。

答：$\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{P}{2(P+Q)}\operatorname{ctg}\alpha$



题2-53图



题2-54图

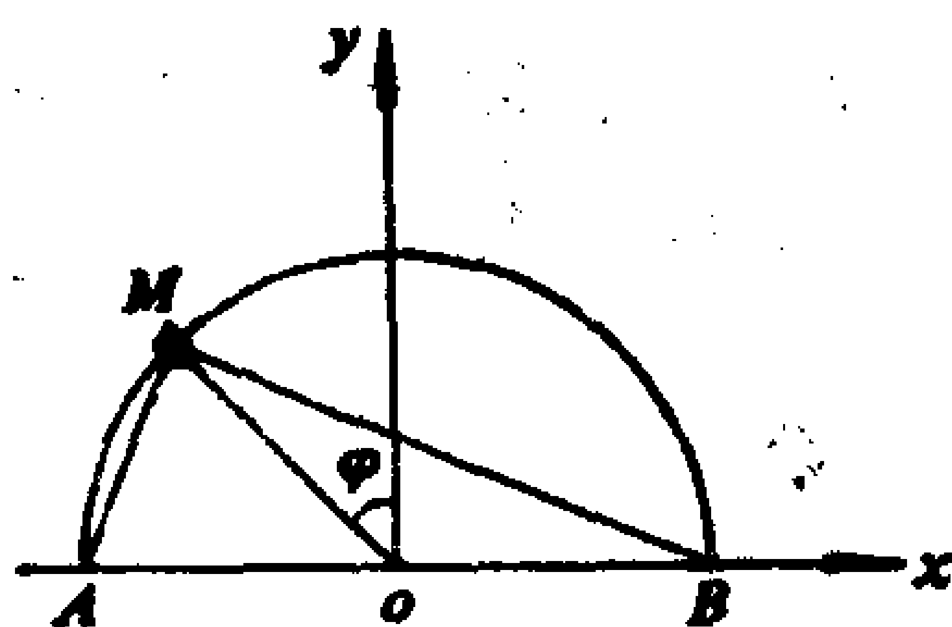
2-55　无重质点M，穿在半圆钢丝AMB上，此点受A，B两点吸引，引力的大小与距离成正比，比例常数皆为k，如半圆的半径为r，求平衡位置。又求M对钢丝的压力。

答：φ可取任何值(中性平衡)

$$N=kb\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)+ka\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)=2kr$$

2-56　用虚位移原理解图示平衡机构中α，β之间的关系。已知A为光滑接触约束，AB为均质杆，BC为不可伸长的绳索(不计绳索的重)。

答：$\mathrm{tg}\alpha=2\mathrm{tg}\beta$



题2-55图



题2-56图

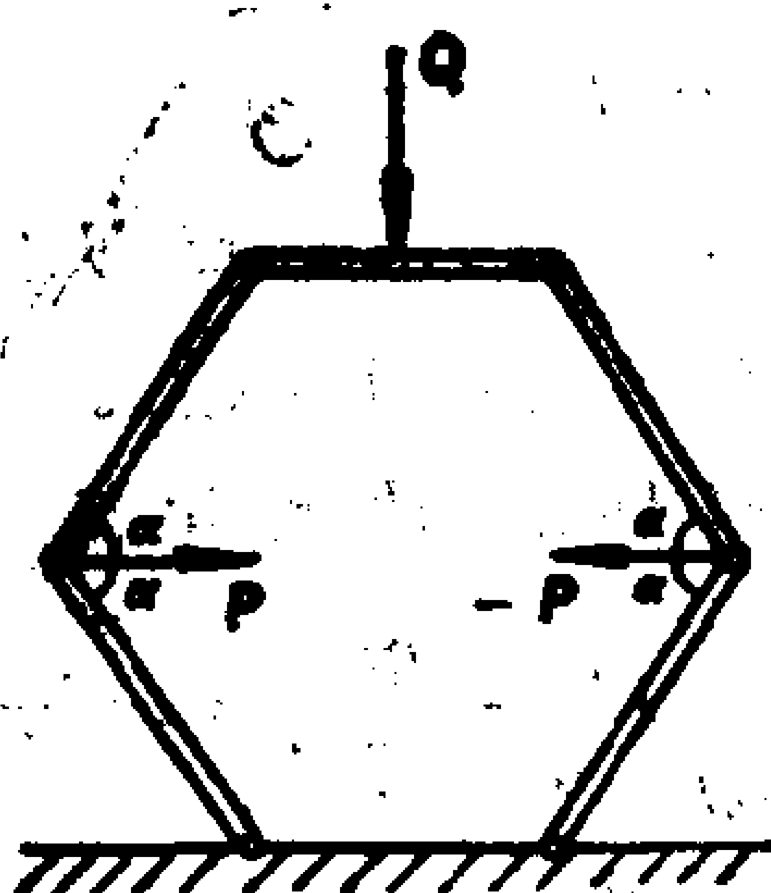
2-57　等边六边形，基础不动，受力$\mathbf{P}$，$-\mathbf{P}$，$\mathbf{Q}$作用，

求平衡时，这些力的关系。$\angle\alpha$ 为已知。

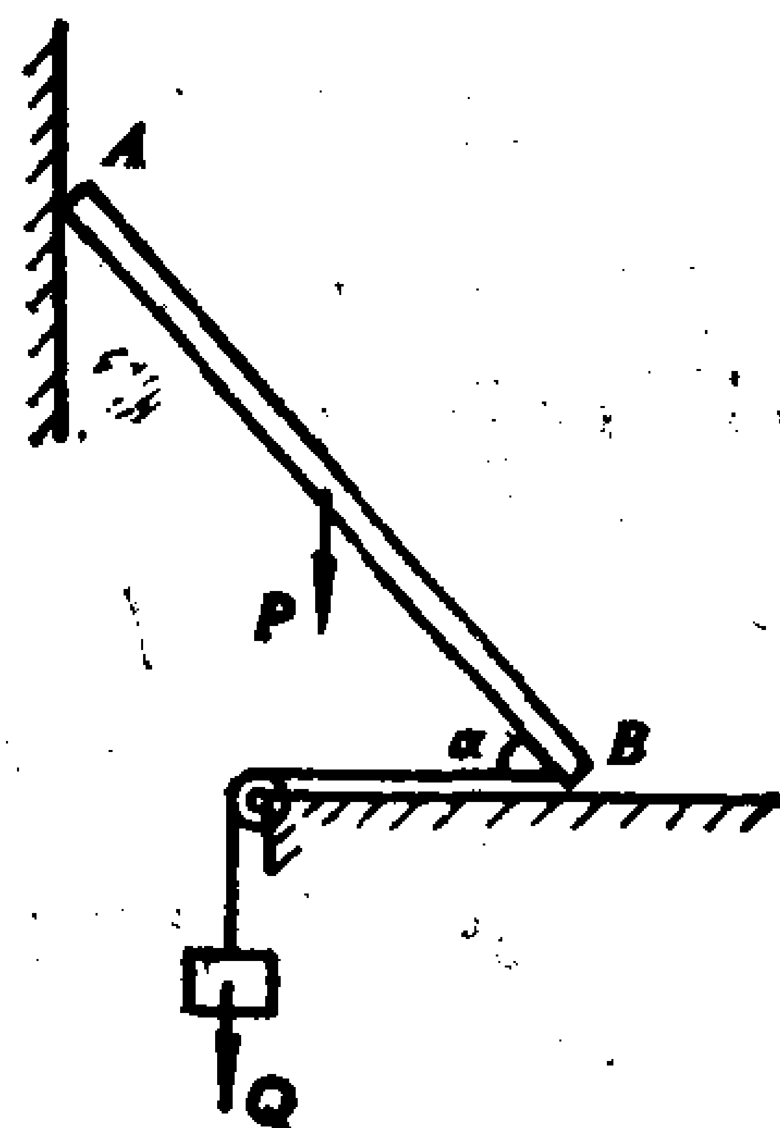
答：$Q=P\text{tg}\alpha$

2-58 均质杆重P靠在不光滑垂直墙上（摩擦系数为f），其下端置于光滑桌面上，为使此杆平衡在垂直平面内，在其下端连一绳，跨过一滑轮悬重物 Q。求平衡时的倾斜角 α，并求A、B处反力。

答：$\text{tg}\alpha=\frac{P}{2Q}+k$，$N_A=Q$，$N_B=P+kQ$　$(k\leqslant f)$



题2-57图



题2-58图

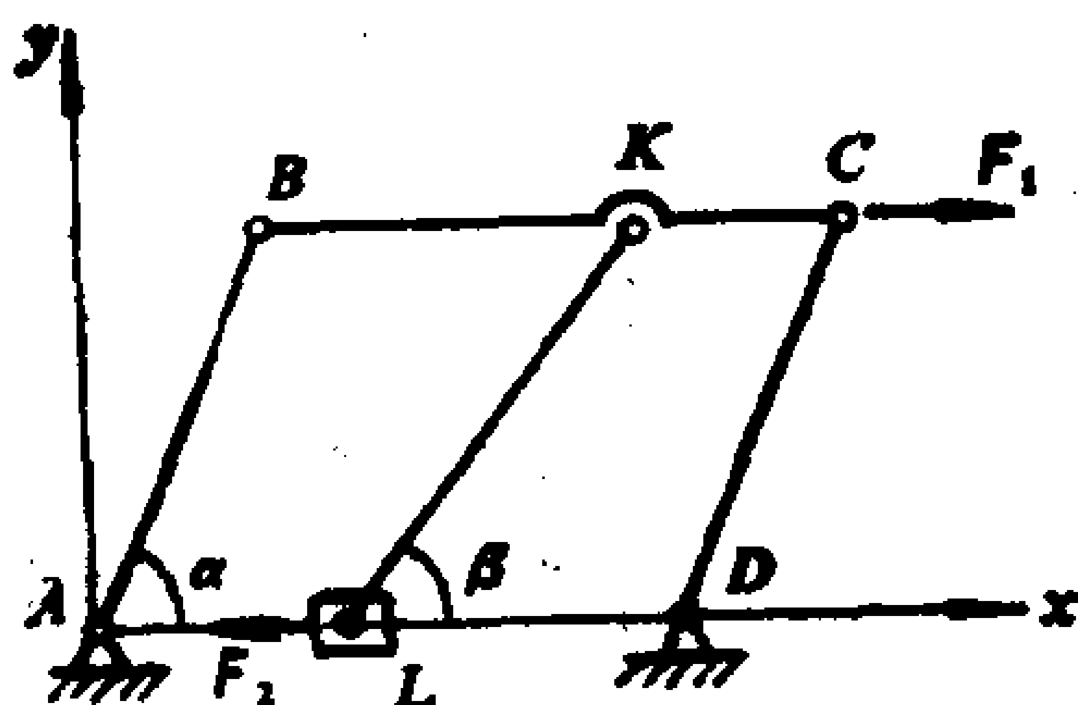
2-59 平行四边形$ABCD$用铰链相互连接而成，AD边固定，滑块L可沿AD无摩擦地滑动，滑块L用铰链与连杆Lk连接，Lk与BC也用铰链连结。今在C点加一沿BC的力$\boldsymbol{F}_1$，在滑块L上加一沿DA的力$\boldsymbol{F}_2$。证明平衡时F_1与F_2有关系：

$$\frac{F_1}{F_2}=1-\frac{\text{tg}\beta}{\text{tg}\alpha}$$

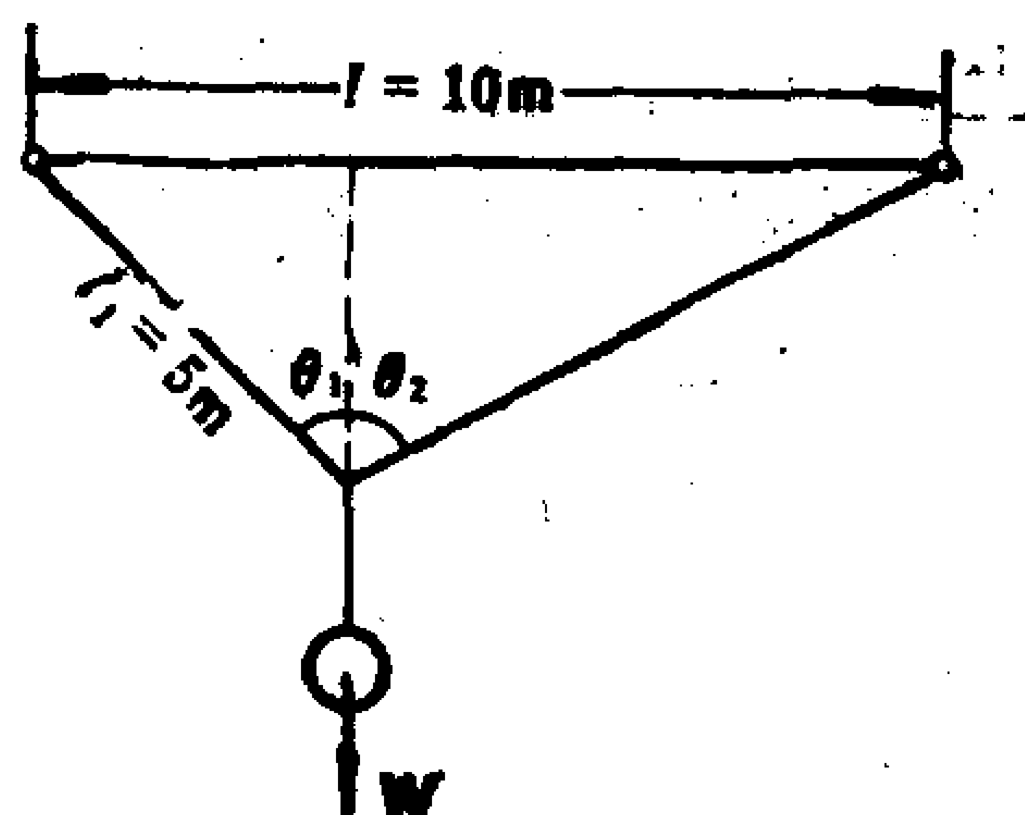
2-60 一重500N的质点，用一条长5m无弹性绳子同一条弹性系数为5000N/m、固有长为6m的弹性绳由两钉子挂

着，此两钉子在一水平线上，钉间距离为10m。求此力系的平衡状态。

答：$\theta_1 \approx 80^\circ$　$\theta_2 \approx 17^\circ 24'$

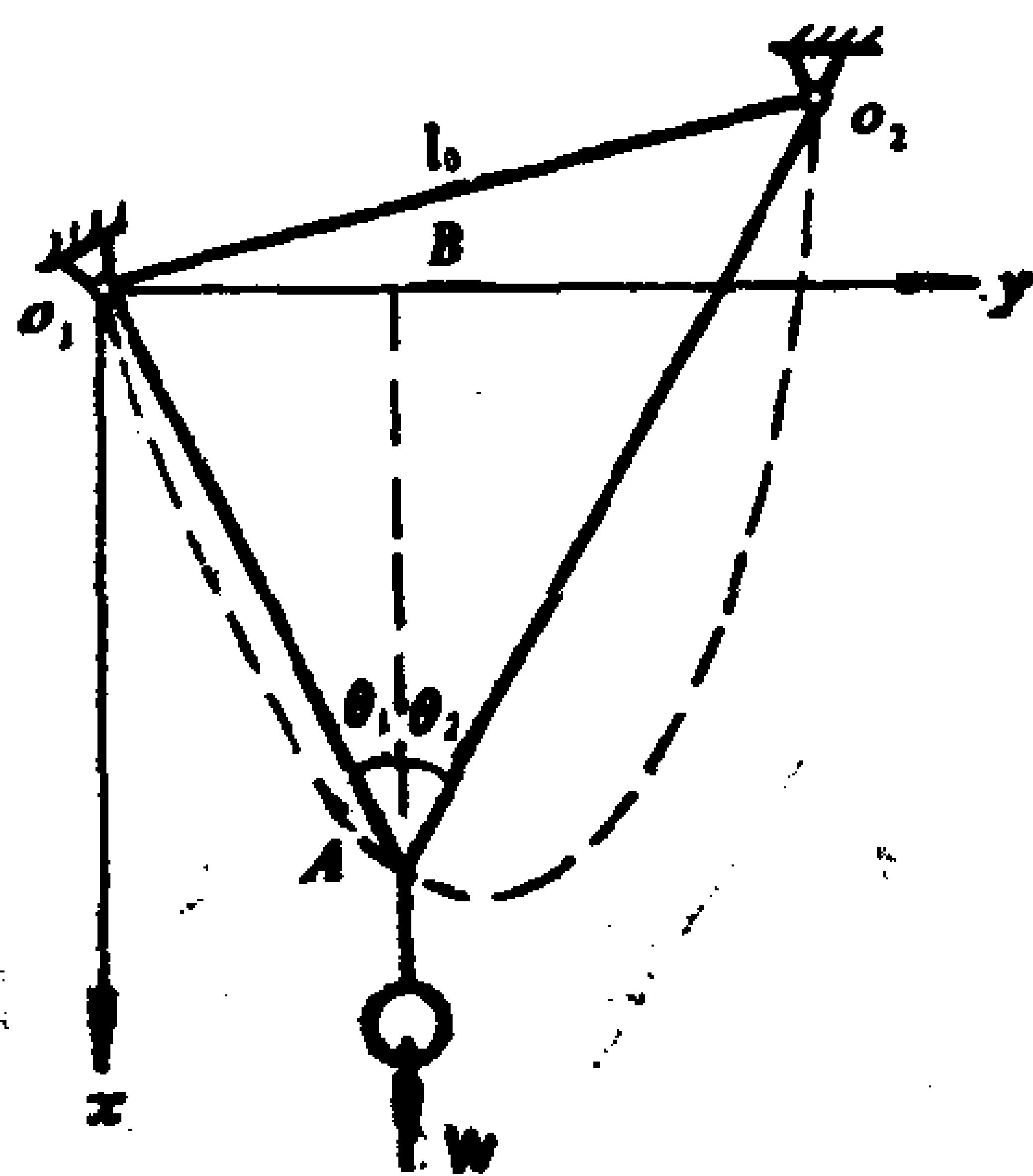


题2-59图

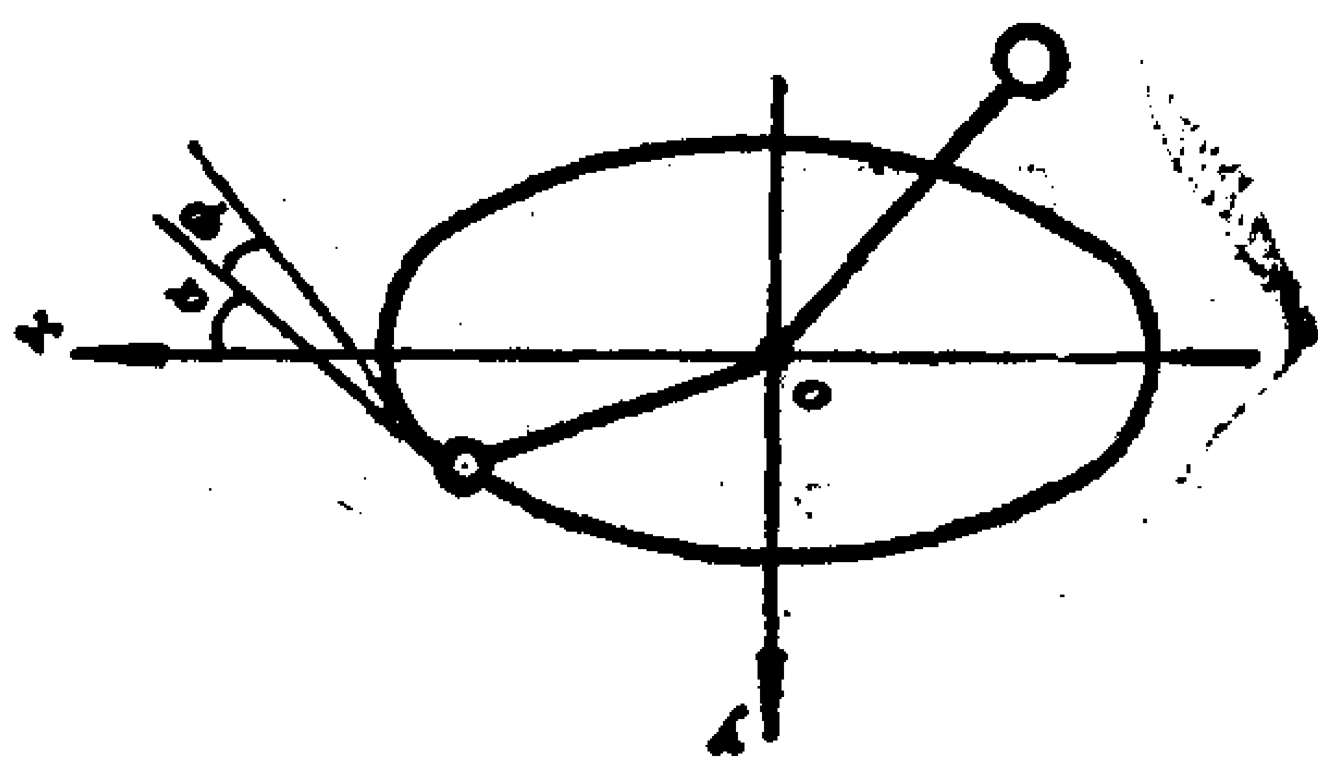


题2-60图

2-61　两长度等于l_1，l_2的绳子系着一物体，两绳的另外端系在两固定点上，两点的高度不一定相同。物体在平衡状态时，绳子张力的水平分量数值皆等于H。若将绳子的长度改变，且使H等于一常数，试证：此物体画出一经过悬挂绳子两点的抛物线，并此抛物线的轴线与地面成垂直。



题2-61图



题2-62图

2-62 一具有重量W的小环能在一椭圆形铁丝圈上无摩擦地自由滑动，铁丝圈的平面是铅垂的，它的偏心等于e，长轴与水平线成一角度α。一线绳的一端系在环上，另一端则挂一重量为w的物体，线绳搭在椭圆中心处一光滑钉子上。试证：当环与物体在平衡状态时，椭圆在环处的切线与水平线所成的角度φ满足下列方程式：

$$\mathrm{tg}(\varphi+\alpha)=(1-e^2)\mathrm{tg}(2\varphi+\alpha)$$

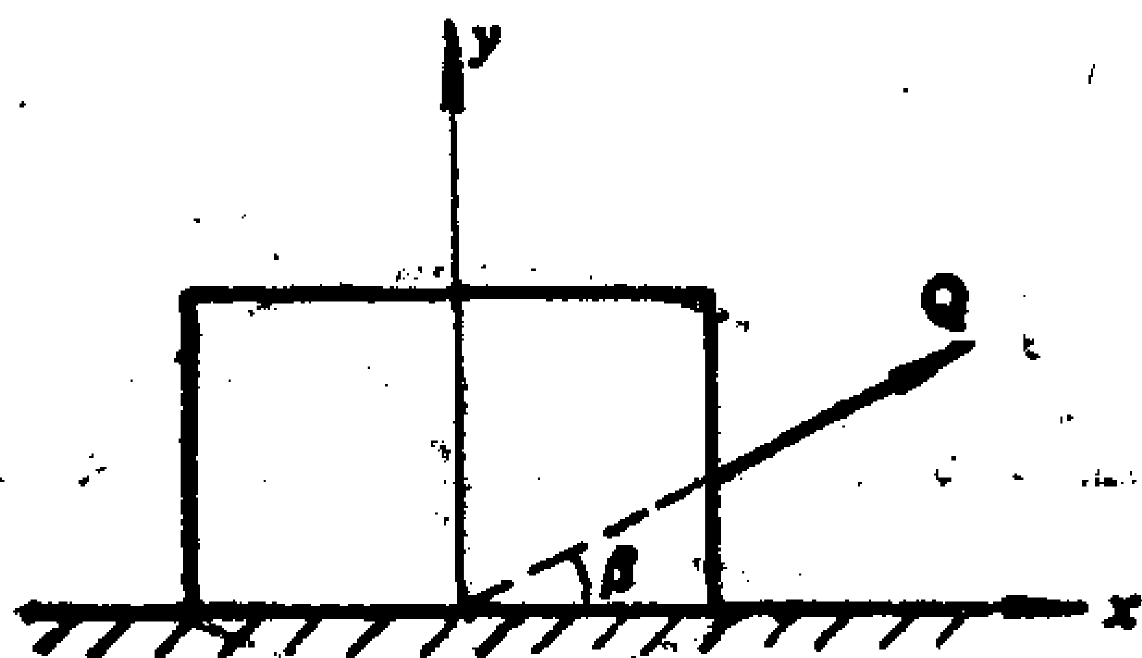
2-63 匣子重P，放在粗糙的水平面上，其摩擦系数为f，现欲以最小的力Q来移动这匣子，问力Q应成怎样的角度β？并求力Q的大小。

答：当$\beta=\mathrm{tg}^{-1}f$时，Q为最小，$Q_{min}=\dfrac{fP}{\sqrt{1+f^2}}$

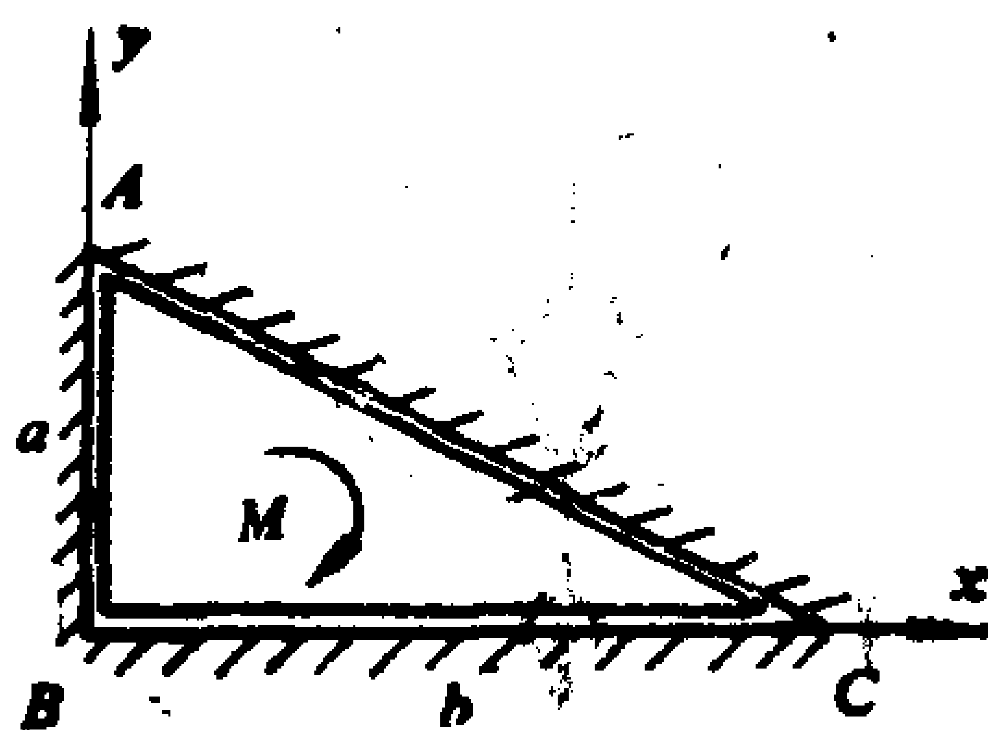
2-64 钥匙的截面为直角三角形，其直角边$AB=a$，$BC=b$。设在钥匙上作用一个矩为M的力偶，试求其顶点A、B、C对锁孔边上的压力。设摩擦不计，钥匙与孔之间的的隙缝很小。

答：$N_A=\dfrac{M}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$N_B=\dfrac{Ma}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$N_C=\dfrac{Mb}{\sqrt{a^2+b^2}}$



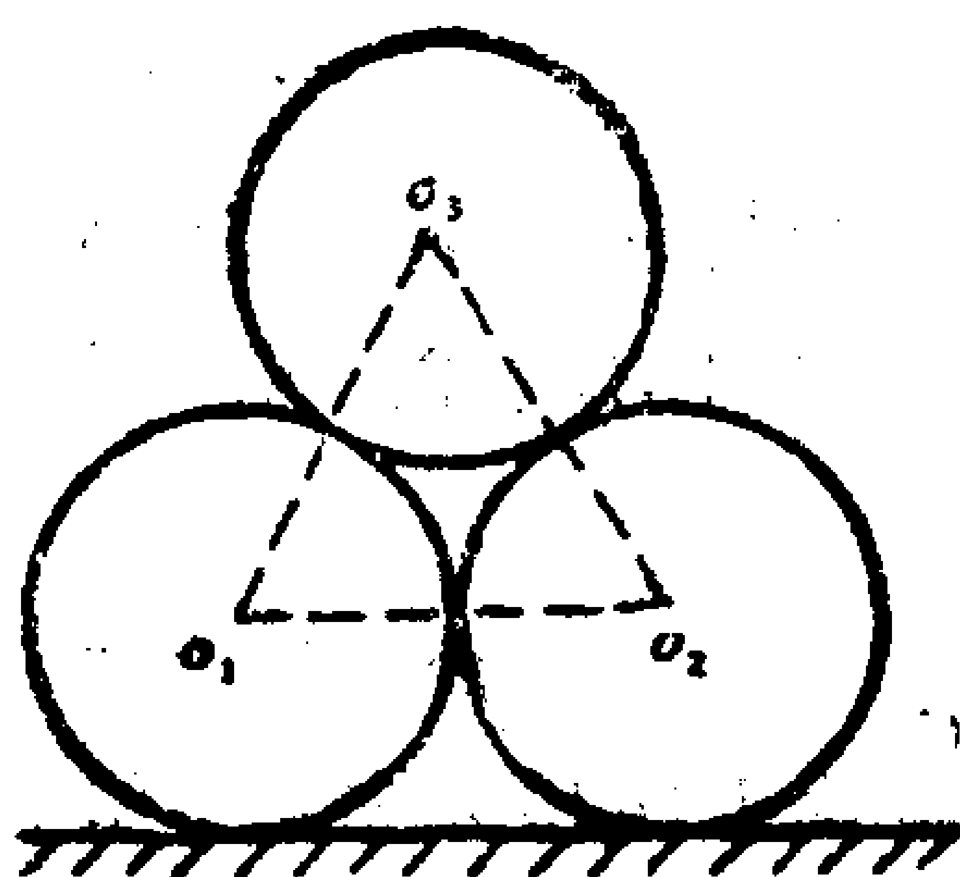
题2-63图



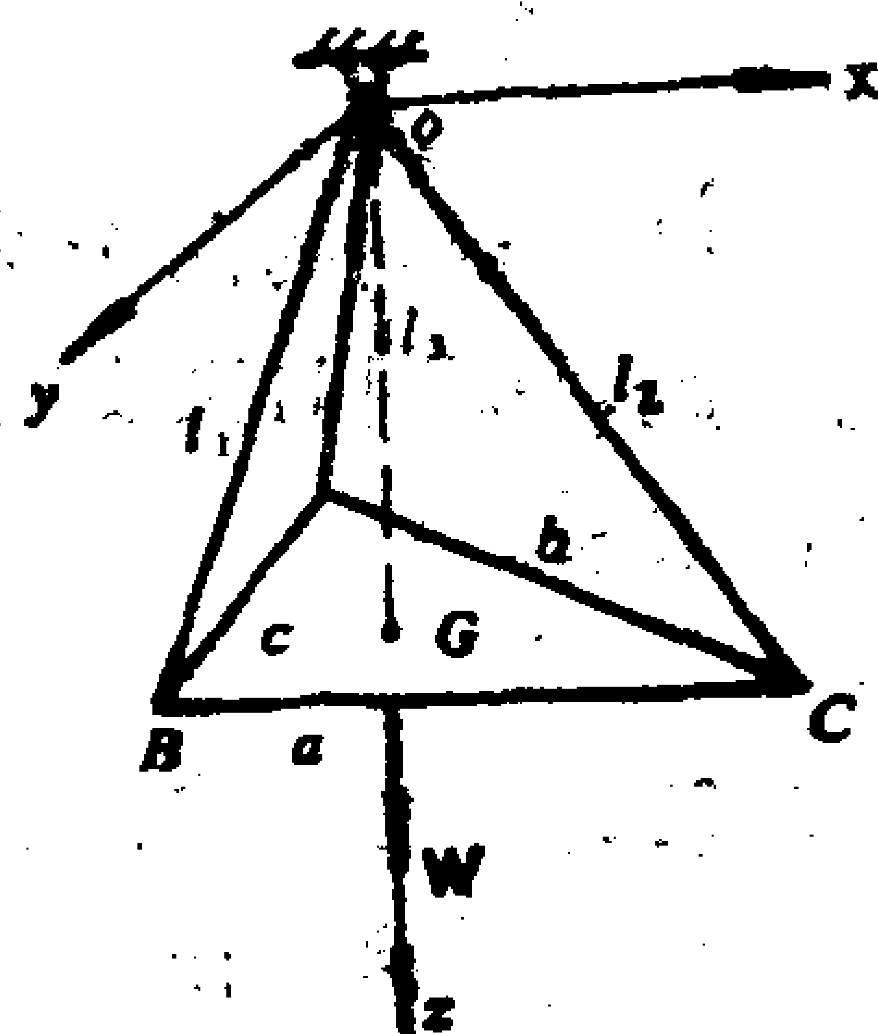
题2-64图

2-65 两相等的，不光滑的圆柱体紧凑地横在一不光滑的水平面上。以另一个相等的圆柱体置于前两者之上，使三柱体的轴线互相平行。证明：若平衡状态存在，则摩擦系数μ须比$2-\sqrt{3}$为大。

2-66 三条长度分别为l_1，l_2，l_3的线绳系在一重量等于W的均匀三角形的三角上，各绳的另一端系于一固定点。试证：线绳中的张力等于Wkl_1，Wkl_2，Wkl_3，其中$k=[3(l_1^2+l_2^2+l_3^2)-a^2-b^2-c^2]^{-1/2}$，$a$，$b$，$c$为三角形的三边长。



题2-65图



题2-66图

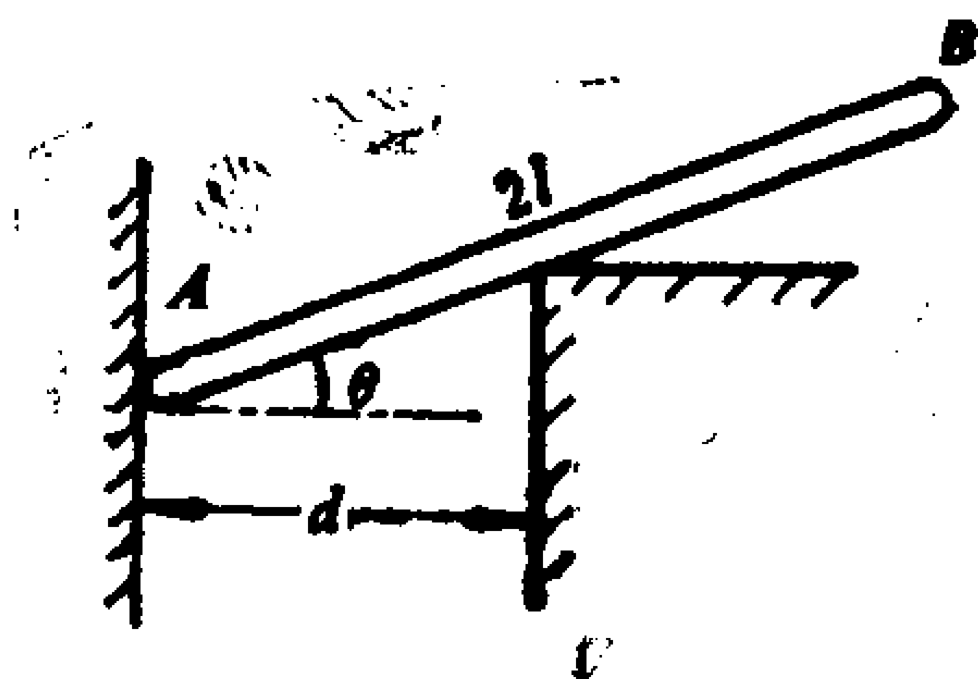
2-67 长为$2l$的均质棒，一端抵在光滑的墙上，而棒身则如图示斜靠在与墙相距为d（$d\leqslant l\cos\theta$）的光滑棱角上。求棒在平衡时与水平面所成的角θ。

答：$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)^{1/3}$

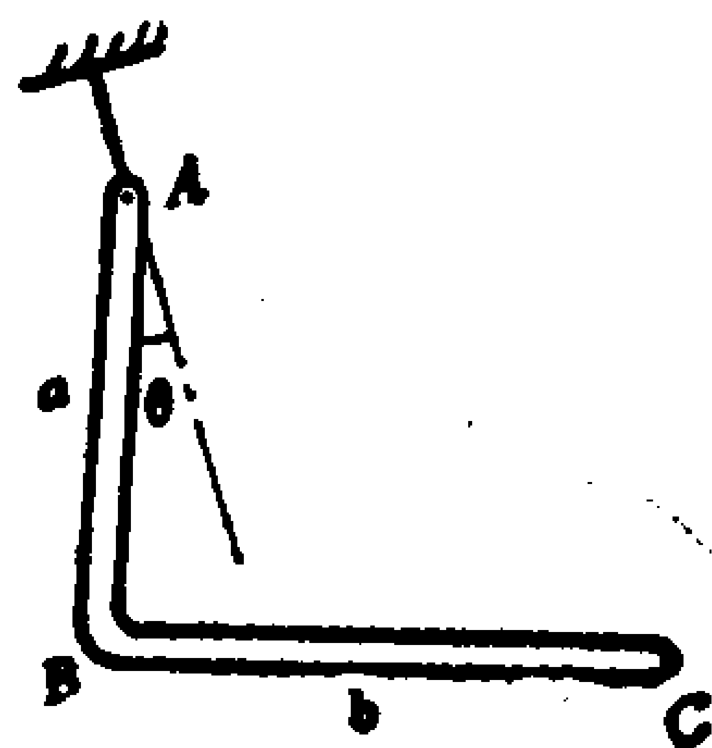
2-68 两根均质棒AB、BC在B处刚性联结在一起，且$\angle ABC$形成一直角。如将此棒的A点用绳系于固定点上，则当平衡时，AB和竖直直线所成的角θ满足下列关系：

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{b^2}{a^2+2ab}$$

式中a及b分别为棒AB和BC的长度，试证明之。



题2-67图



题2-68图

2-69 相同的两个均质光滑球悬在结于定点O的两根绳子上，此两球同时又支持一个等重的均质球。求α角和β角之间的关系。

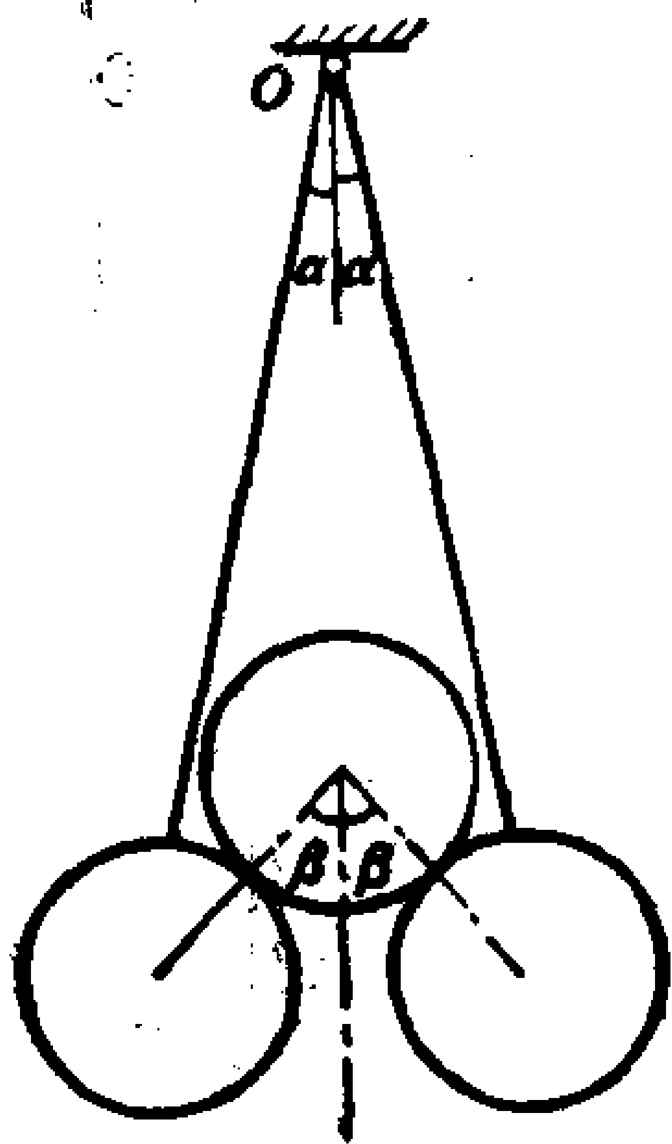
答：$\mathrm{tg}\beta = 3\mathrm{tg}\alpha$

2-70 一均质的梯子，一端置于摩擦系数为1/2的地板上，另一端则斜靠在摩擦系数为1/3的高墙上，一人的体重为梯子的三倍，爬到梯子的顶端时，梯子尚未开始滑动，则梯子与地面的倾角，最小应为若干？

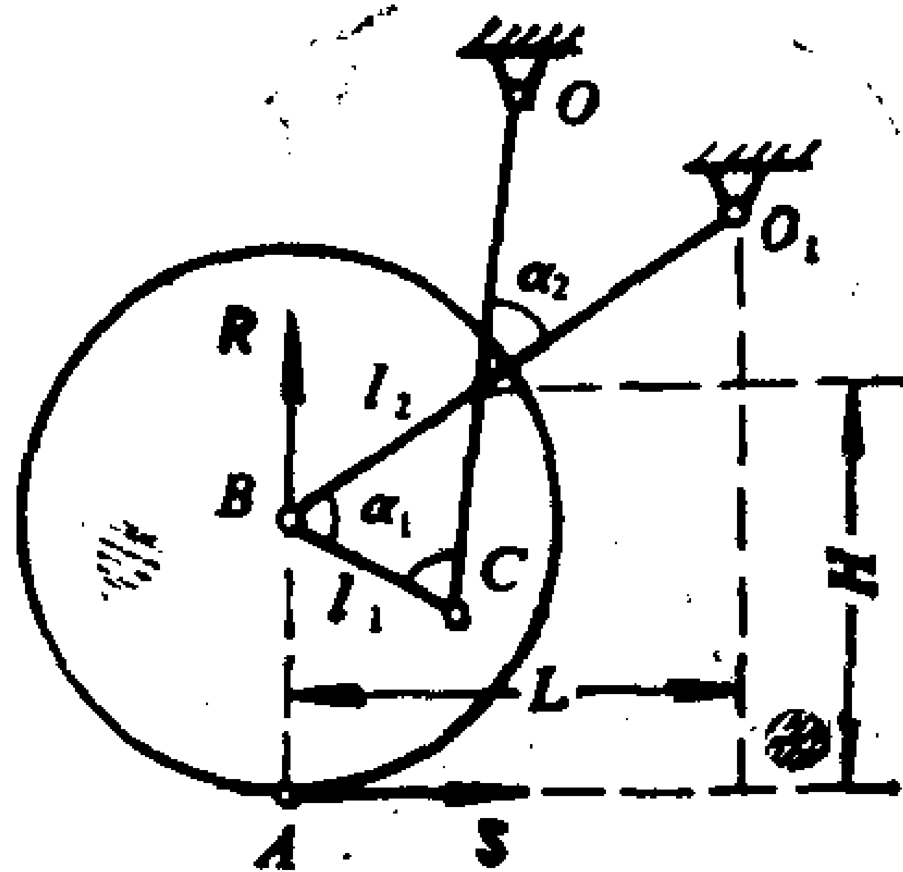
答：$\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{41}{24}$

2-71 图示四连杆机构。铰链B上作用一铅垂力$\boldsymbol{R}$。BC杆与圆盘固结，圆盘中心在B点，水平力$\boldsymbol{S}$作用于盘缘A点处。杆长$BC=l_1$，$BO_1=l_2$；其余数据如图示(H，L，α_1，α_2)。杆与圆盘之重并以及铰链中摩擦力略去不计，试求在图示平衡位置时，力R与力S大小间的关系。

答：$S = R\dfrac{Ll_1\sin\alpha_1}{Hl_1\sin\alpha_2}$



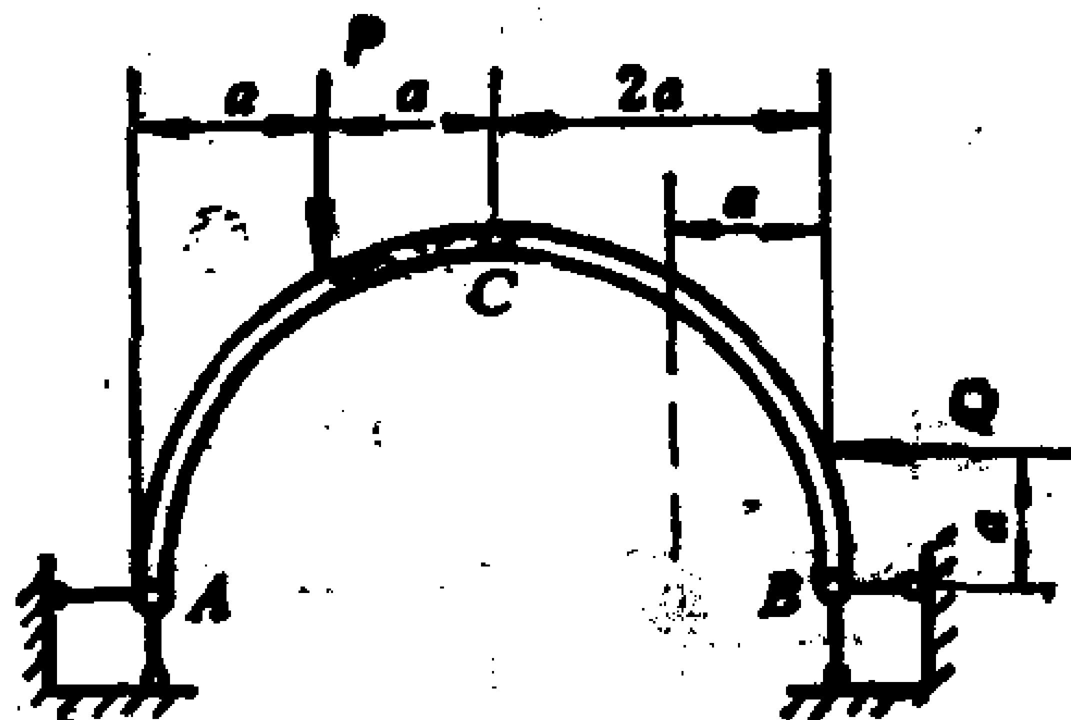
题2-69图



题2-71图

2-72　三铰拱受集中载荷**P**和**Q**的作用，各部分尺寸如图示。求铰链B处的水平反力x_B。

答：$x_B=(1/4)(3Q-P)$，方向向右



题2-72图

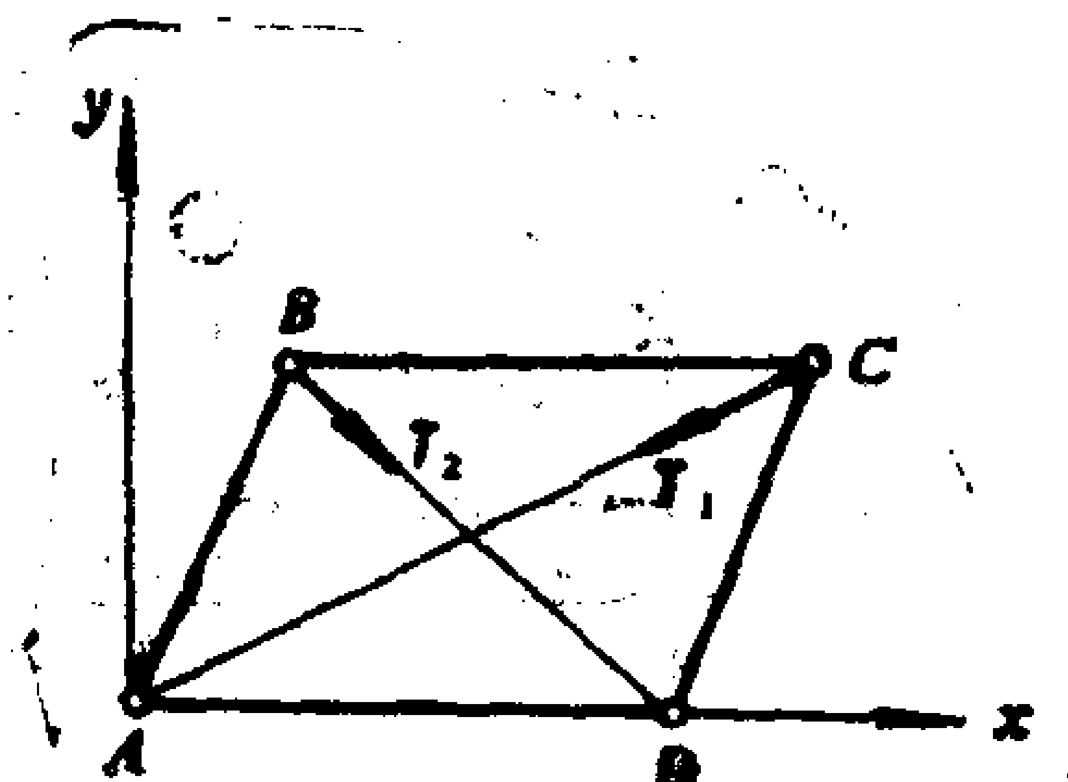
2-73　用铰链联接的平行四边形$ABCD$，其对顶角用绳AC和BD联结，绳中张力为T_1，T_2，试证：

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{AC}{BD}$$

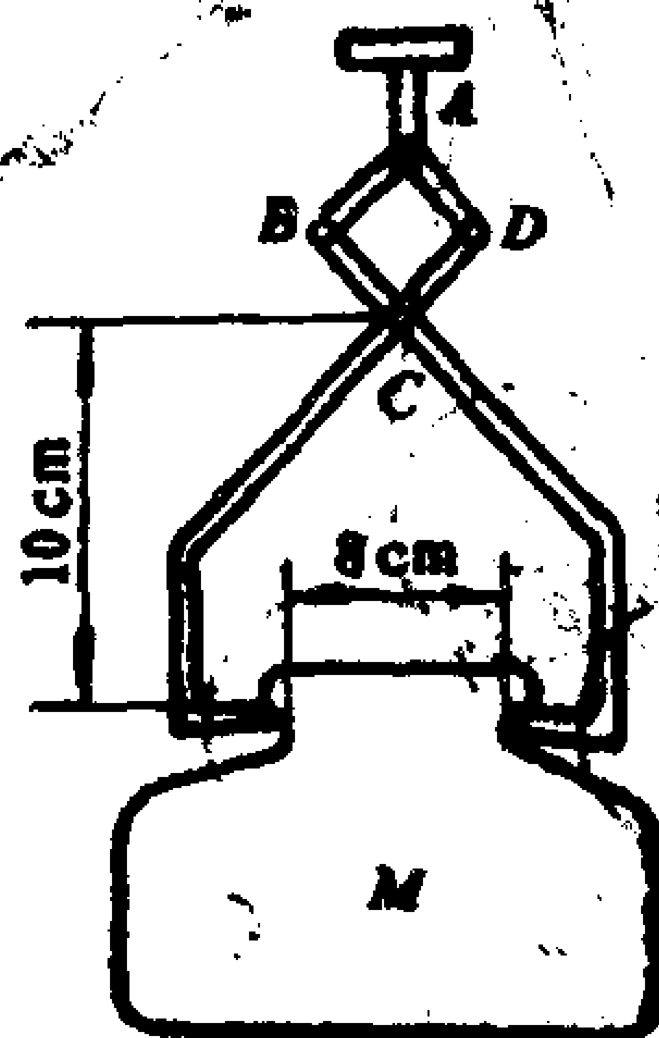
2-74　重为P的重物M由夹紧钳夹住。$AB=BC=CD$

$=DA=4$cm。略去钳的自重，求物体 M 受的压力。

答：$0.4P$



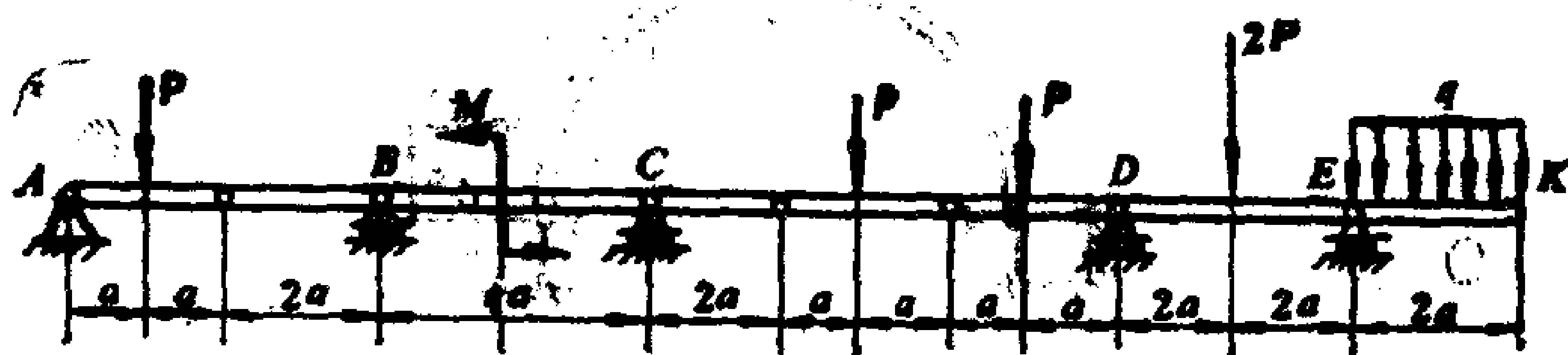
题2-73图



题2-74图

2-75 在复合梁AK上作用强度$q=2$kN/m的均布载荷，矩$M=24$kN·m的力偶与力$P=6$kN。$a=3$m，求支座的约束反力。

答：$R_A=3$kN；$R_B=5$kN；$R_C=1$kN，$R_D=15$kN；
$R_E=18$kN



题2-75图

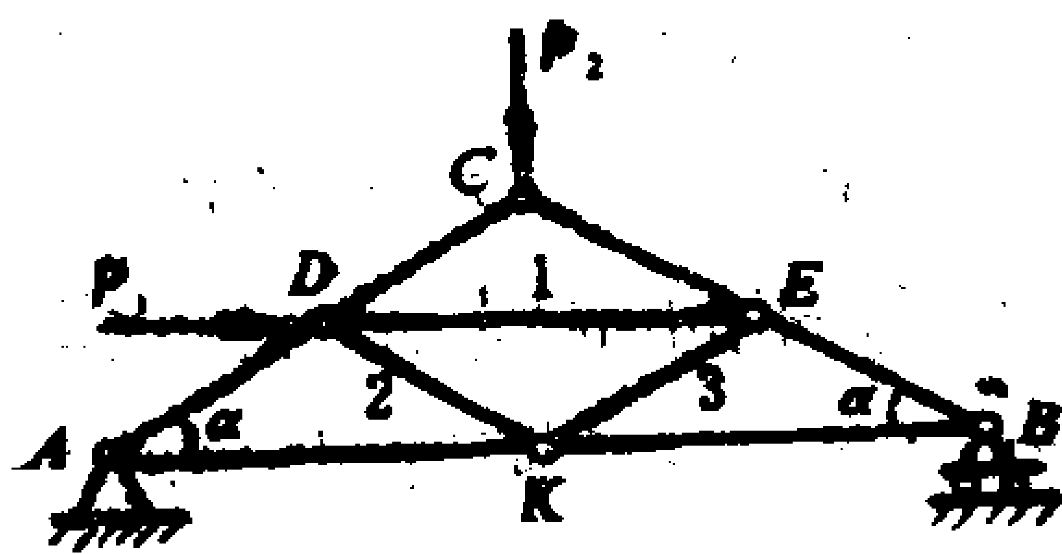
2-76 设在桁架上作用有水平力P_1及铅垂力P^2的作用，$AD=DC=CE=BE=DK=KE$，$\alpha=30°$。试求三根内杆中的力。

答：$s_1=-P_1/2$；$s_3=-s_2=P_1\sqrt{3}/6$

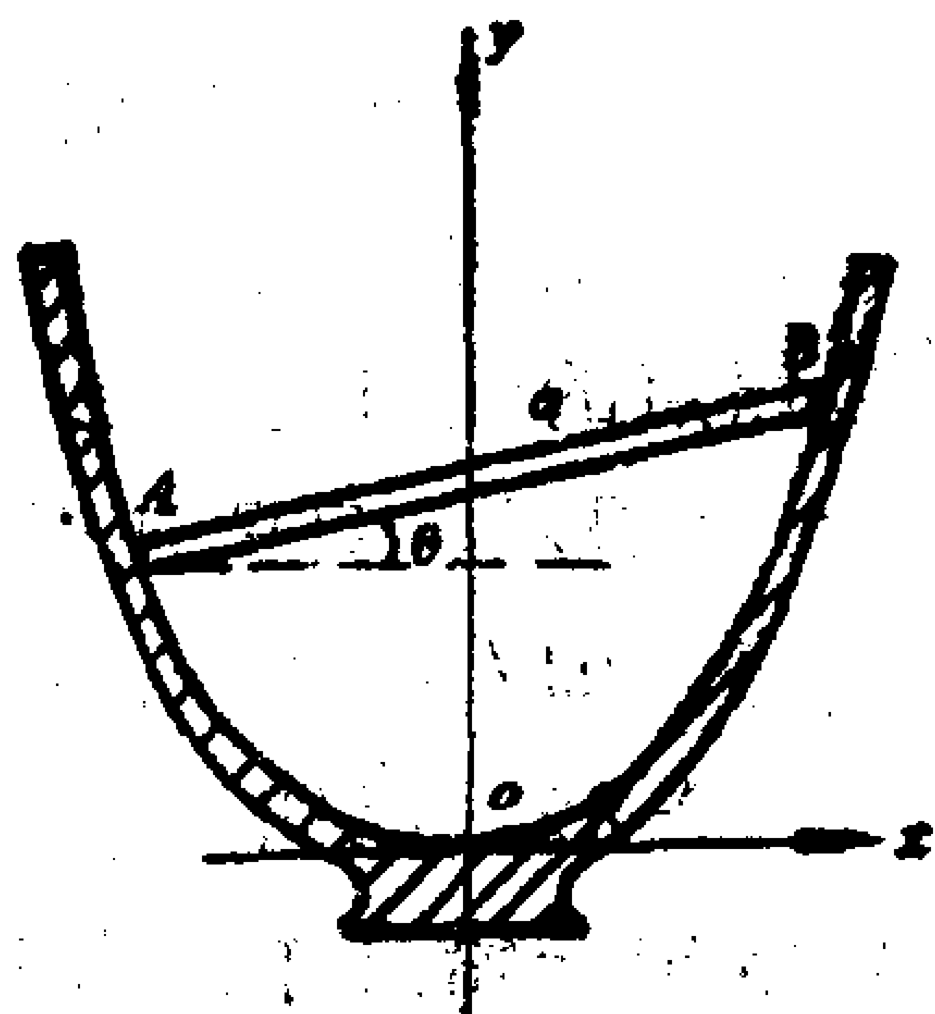
2-77 均质杆AB长度为a，放在一内壁光滑的固定容器

内，这容器的形状为一旋转抛物面。如抛物面的方程为$x^2=2py$，求杆的平衡位置。

答：当$2p\geqslant a$时，只有一个平衡位置$\theta=0$；
当$2p<a$时，有两个平衡位置：$\theta=0$和
$\theta=\arccos\sqrt{2p/a}$



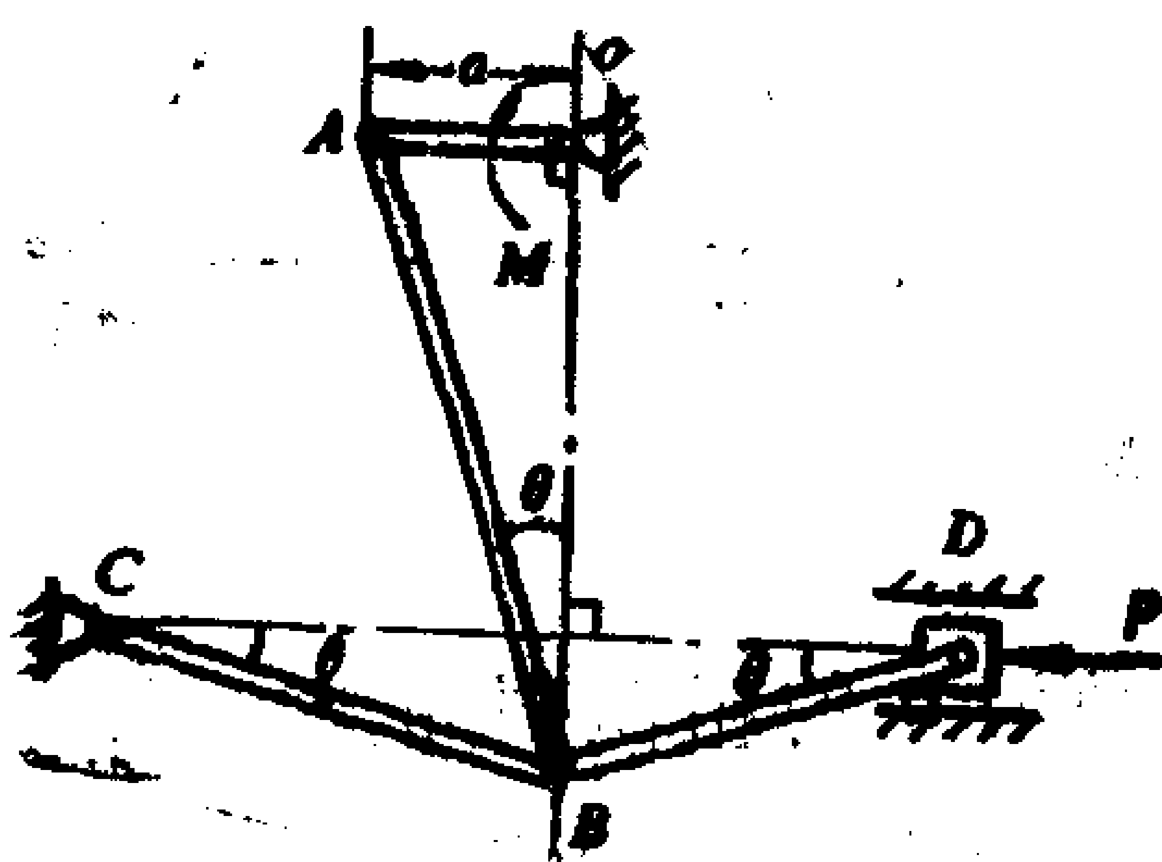
题2-76图



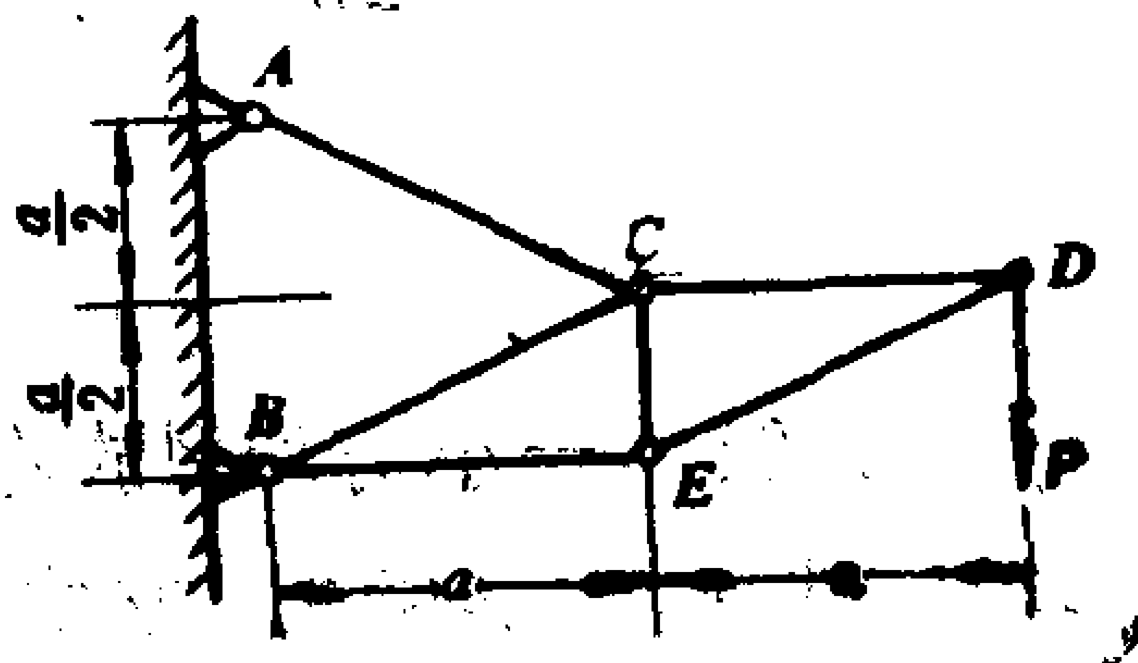
题2-77图

2-78 在图示机构中，曲柄OA上作用一力偶，其矩为M，滑块D上作用一水平力P。机构尺寸及位形如图示，机构处于平衡状态，不计摩擦，求力偶矩M和力P之关系。

答：$M=Pa\text{tg}\,2\theta$



题2-78图



题2-79图

2-79　求图示平面桁架中AC杆与BC杆的内力。

答：$N_{AC}=\sqrt{5}P$，$N_{BC}=0$

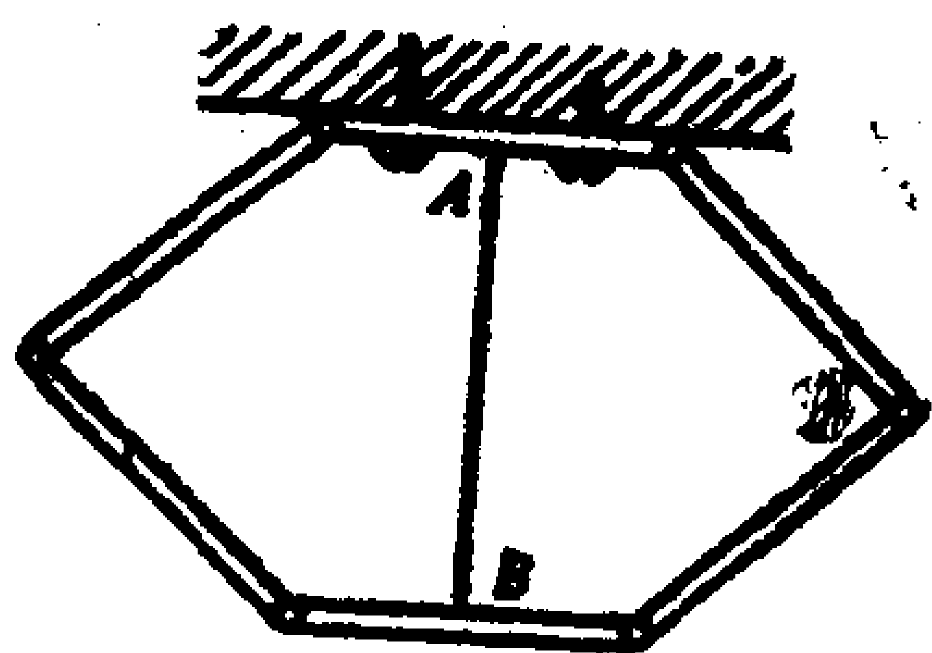
2-80　六根各重W、长l的均质杆。用铰链连成一个六边形，其中一杆用螺钉固定在天花板上。上下杆的中点用一细绳AB相连结，绳长为$a(a<2l)$，求绳中张力。

答：$T=3W$

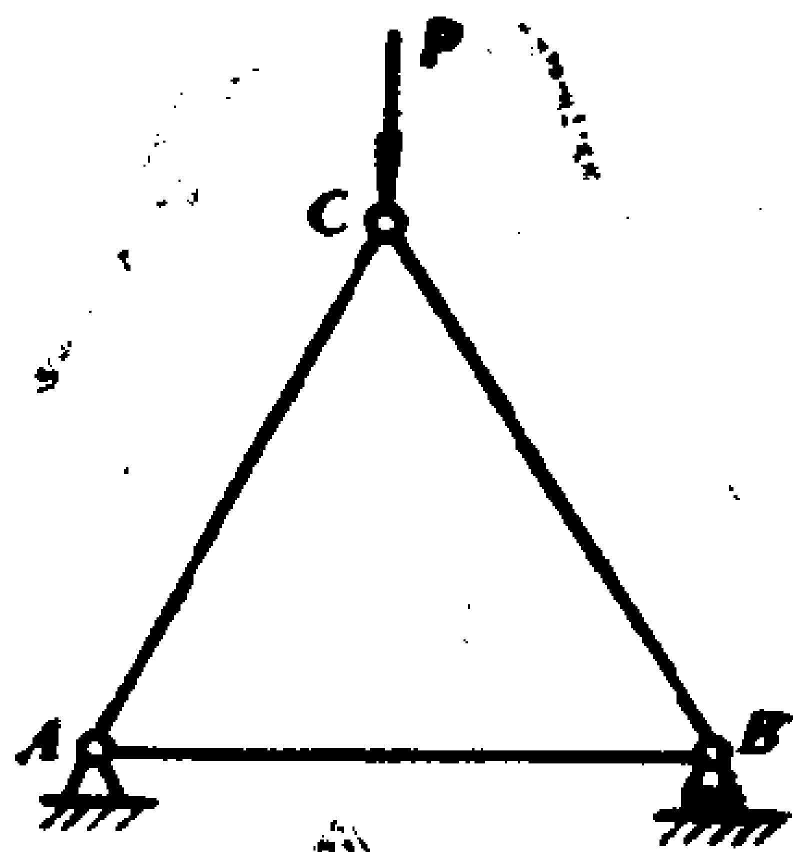
2-81　两重量相等的小环能沿着一光滑的椭圆铁丝环滑动。椭圆的长轴是竖直的。两环由一线连结，线搭在处于上边焦点的光滑钉子上。证明：这两个环能有无穷多个平衡位置。(提示：只要证明线中的张力与环的位置无关。张力为常值，即$T=W/e$，W是小环的重量，e是椭圆的偏心率)。

2-82　已知图示三角形结构，$AB=AC=BC=a$，在C点作用一铅直作用力$\boldsymbol{P}$。求杆AB的内力。

答：$S_1=\frac{\sqrt{3}}{6}P$



题2-80图



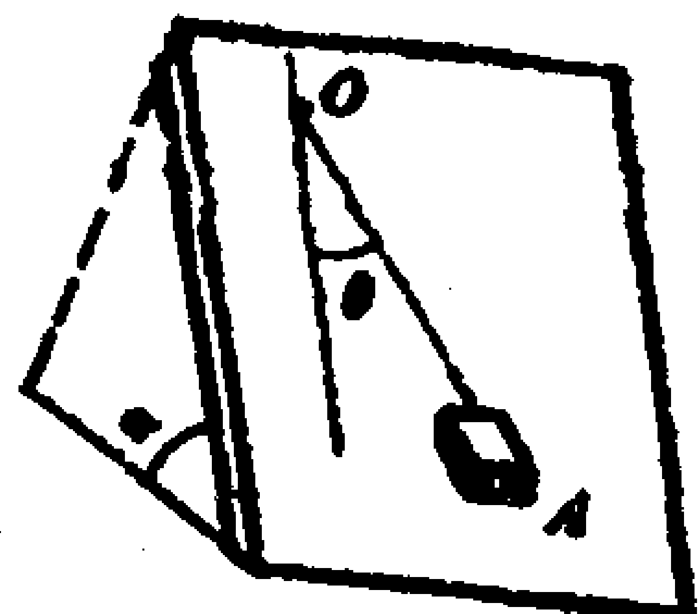
题2-82图

2-83　一小方块A放在倾角为α的粗糙斜面上，摩擦系数$\mu=\text{tg}\varepsilon$，且$\varepsilon<\alpha$。方块A由一线系于斜面上一定点O，试求平衡时线与斜面的最大倾斜线之间的最大夹角θ。

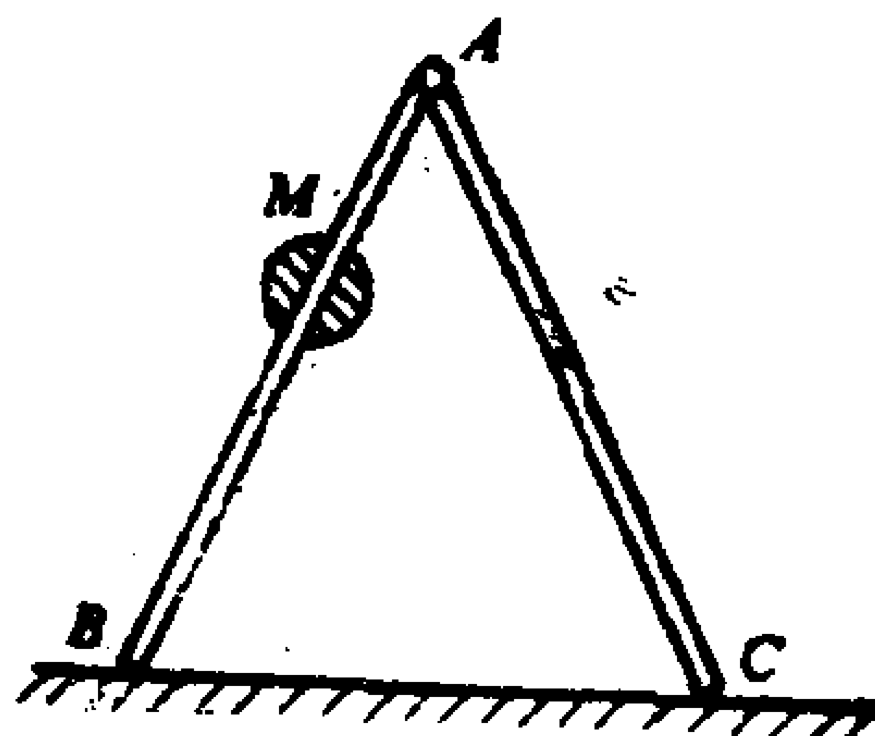
答：$\theta_{max}=\arcsin(\mu \mathrm{ctg}\alpha)$

2-84 双足均匀折梯立在地面上，每足重$P=100$N，长$l=4$ m。梯足与地面之间的摩擦系数$\mu=0.5$，$\angle ABC=\angle ACB=60°$，铰链$A$光滑。如果一体重$W=800$N的人$M$爬上此梯，问这人爬上的最大高度(此时梯子不滑开)。

答：$h_{max}\approx 2.37$m



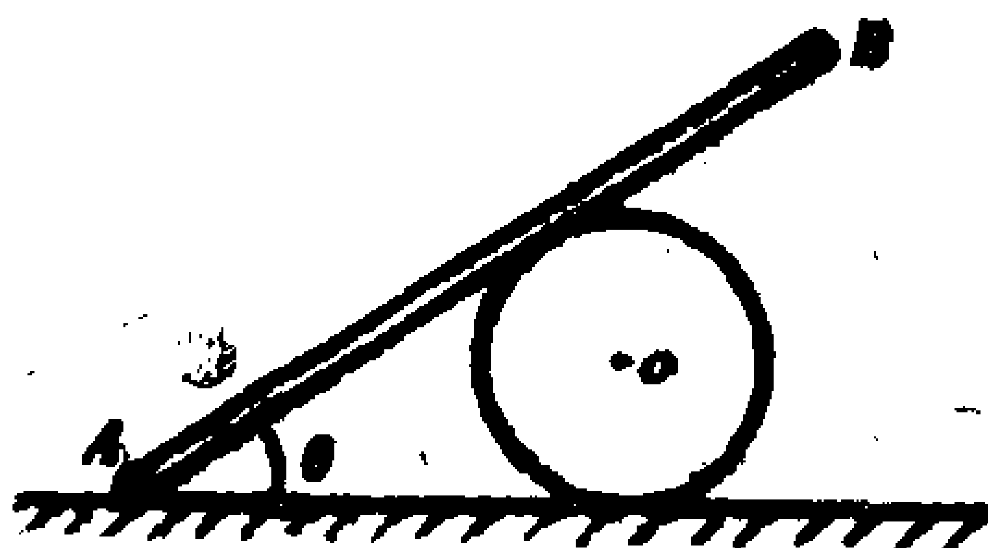
题2-83图



题2-84图

2-85 长为$2l$的均质杆AB搁在半径为r的均质圆柱体上，杆轴与圆柱轴互相垂直，杆轴与圆柱重心在同一竖直平面内，A点为光滑铰支，其余接触处的摩擦系数均为μ。求平衡时杆与水平面的夹角θ的最大值。

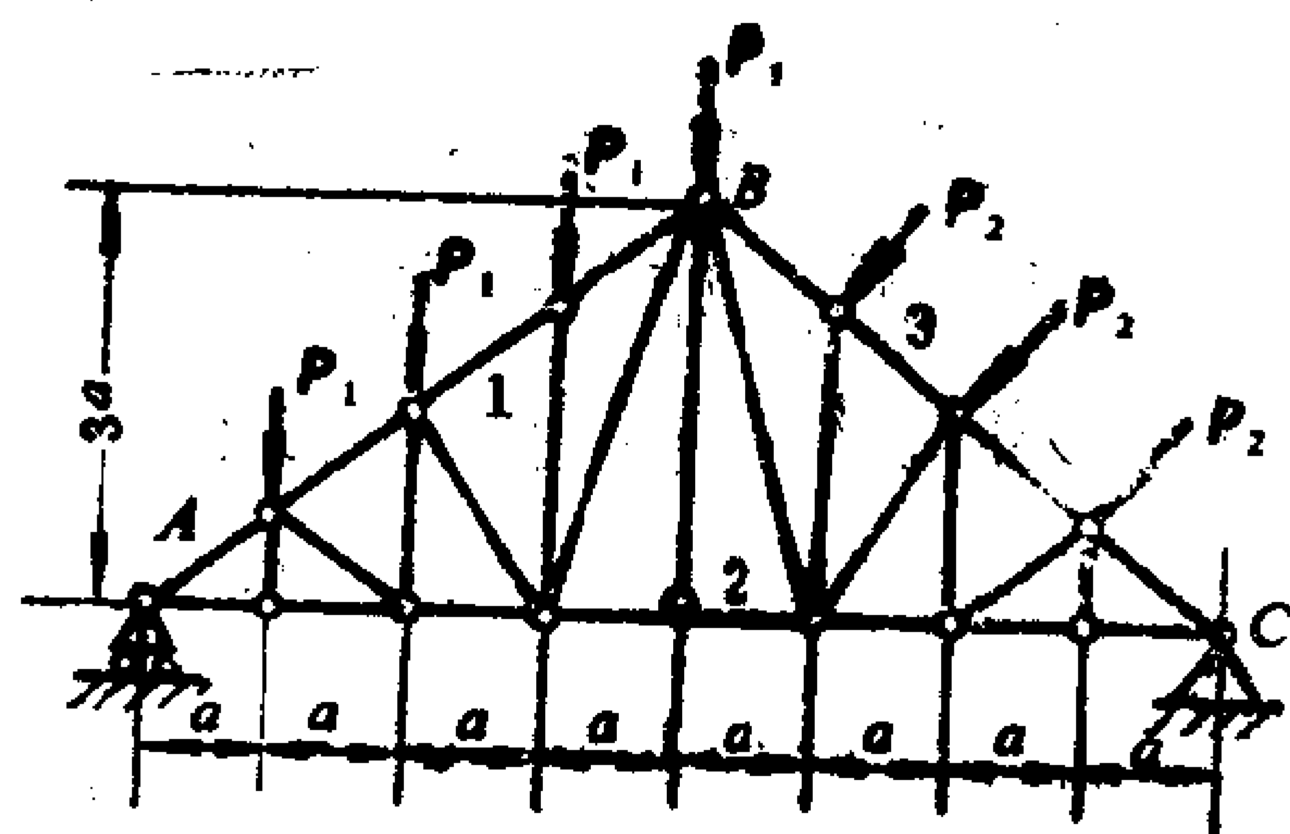
答：$\theta_{max}=2\varepsilon=2\mathrm{arctg}\mu(r/l\leqslant 2\mu)$



题2-85图

2-86 设在桁架上有铅垂力$\boldsymbol{P}_1$及垂直于BC的$\boldsymbol{P}_2$力作用。如$P_1=3P$，$P_2=4P$。试求桁架诸杆1、2、3中的力。

答：$S_1=-15P$；$S_2=10P$；$S_3=-\frac{41}{3}P$



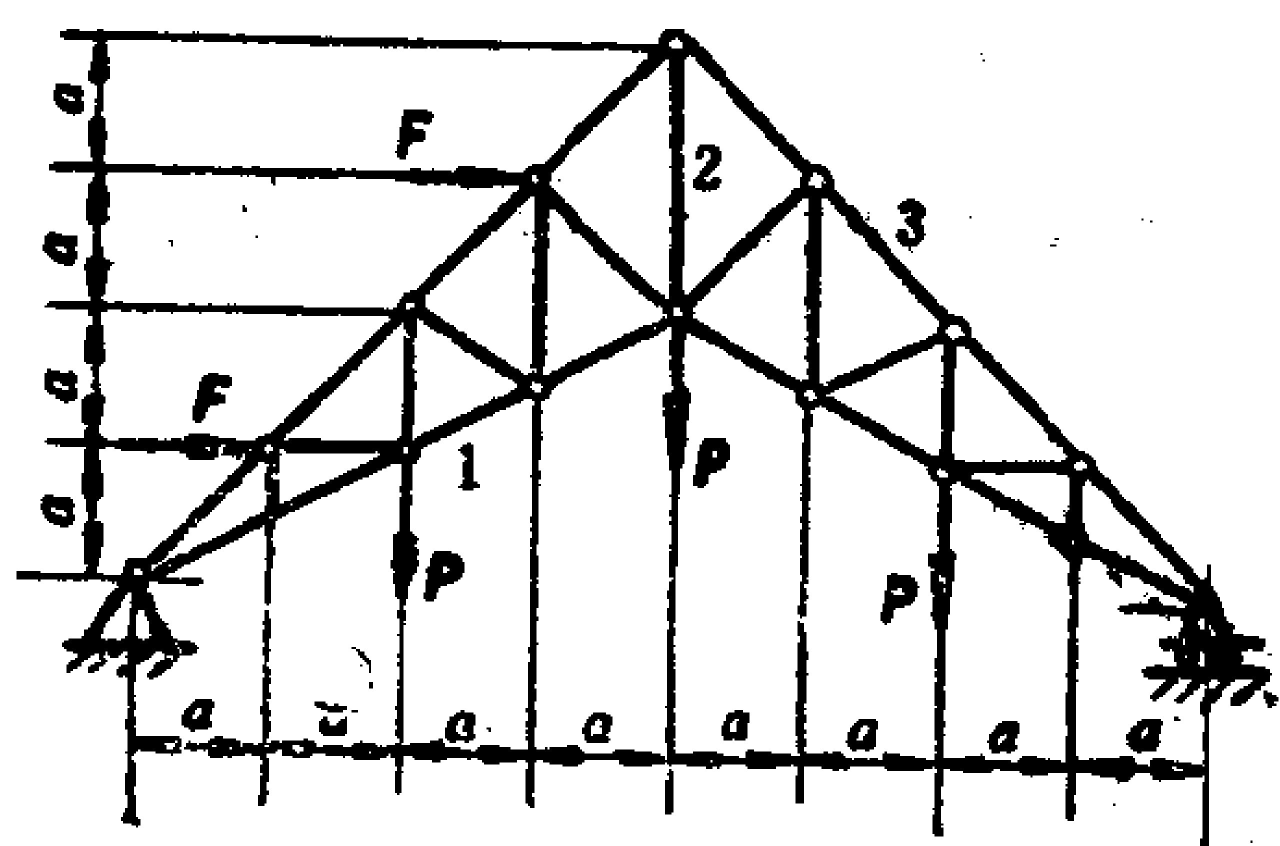
题2-86图

2-87 设在桁架上有水平力F及铅垂力P作用。试求桁架诸杆1、2、3中的力。

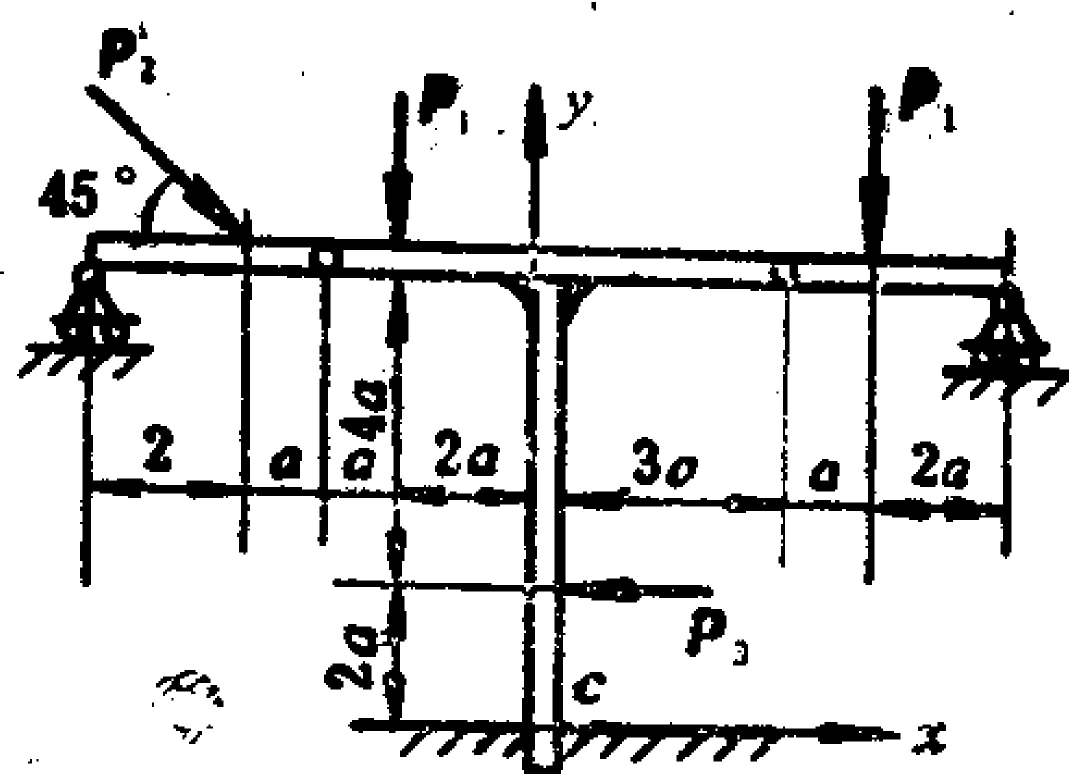
答：$S_1=(\sqrt{5}/2)(2F+3P)$ $S_2=2F+4P$；
$S_3=-\sqrt{2}(F+7/3P)$

2-88 设在结构上有载荷作用如下：$P_1=6\text{kN}$、$P_2=6\sqrt{2}\text{kN}$、$P_3=9\text{kN}$，试求插入端C的反作用力。图中$a=1\text{m}$。

答：$M_C=6\text{kN}\cdot\text{m}$；$x_C=3\text{kN}$；$y_C=14\text{kN}$



题2-87图



题2-88图

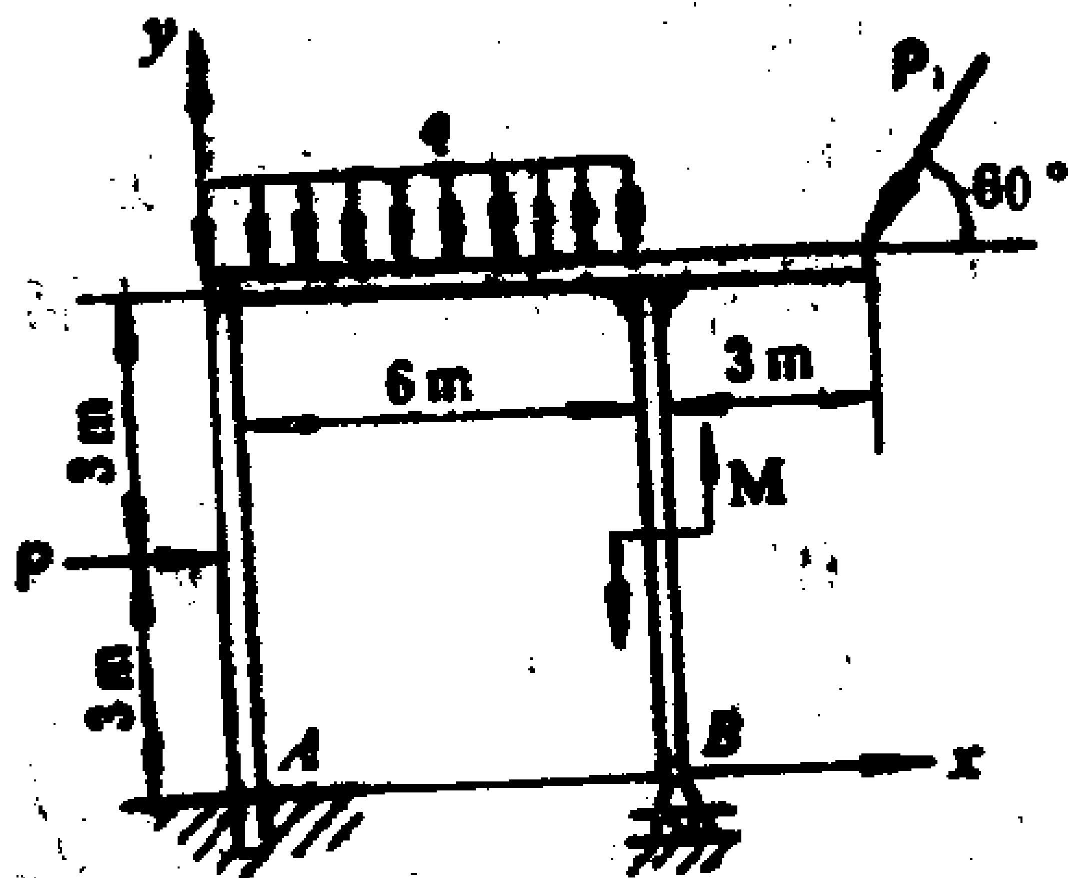
2-89 设在结构上有载荷作用如下：均布载荷，其强度为$q=2\text{kN/m}$；$P=4\text{kN}$；$P_1=12\text{kN}$，其方向与水平成60°角；力偶矩$M=18\text{kN}\cdot\text{m}$。试求支座反力。

答：$M_A=-24\text{kN}\cdot\text{m}$；$X_A=2\text{kN}$；$Y_A=3.8\text{kN}$；

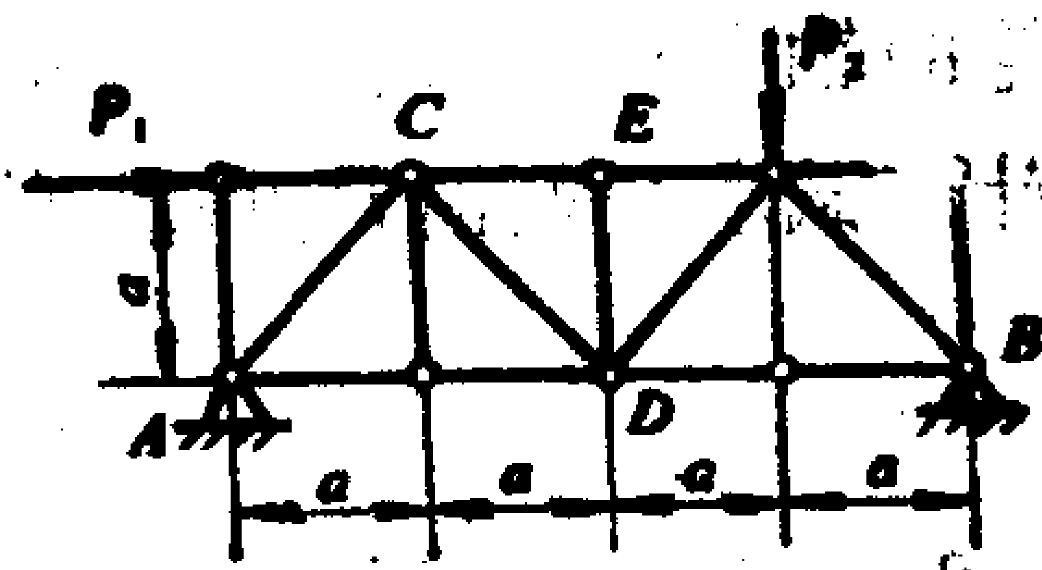
$R_B=18.59\text{kN}$

2-90 设在桁架上有水平力P_1及铅垂力P_2作用。试求CD杆及CE杆中的力。

答：$S_{CD}=(P_2-P_1)\sqrt{2}/4$；$S_{CE}=-\frac{1}{2}(P_1+P_2)$



题2-89图

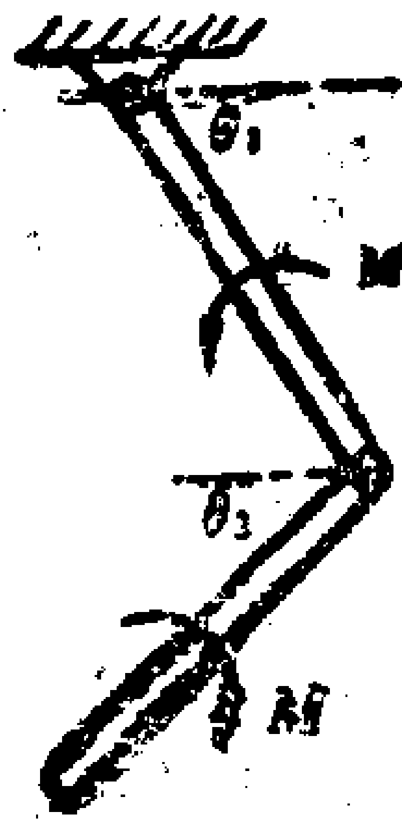


题2-90图

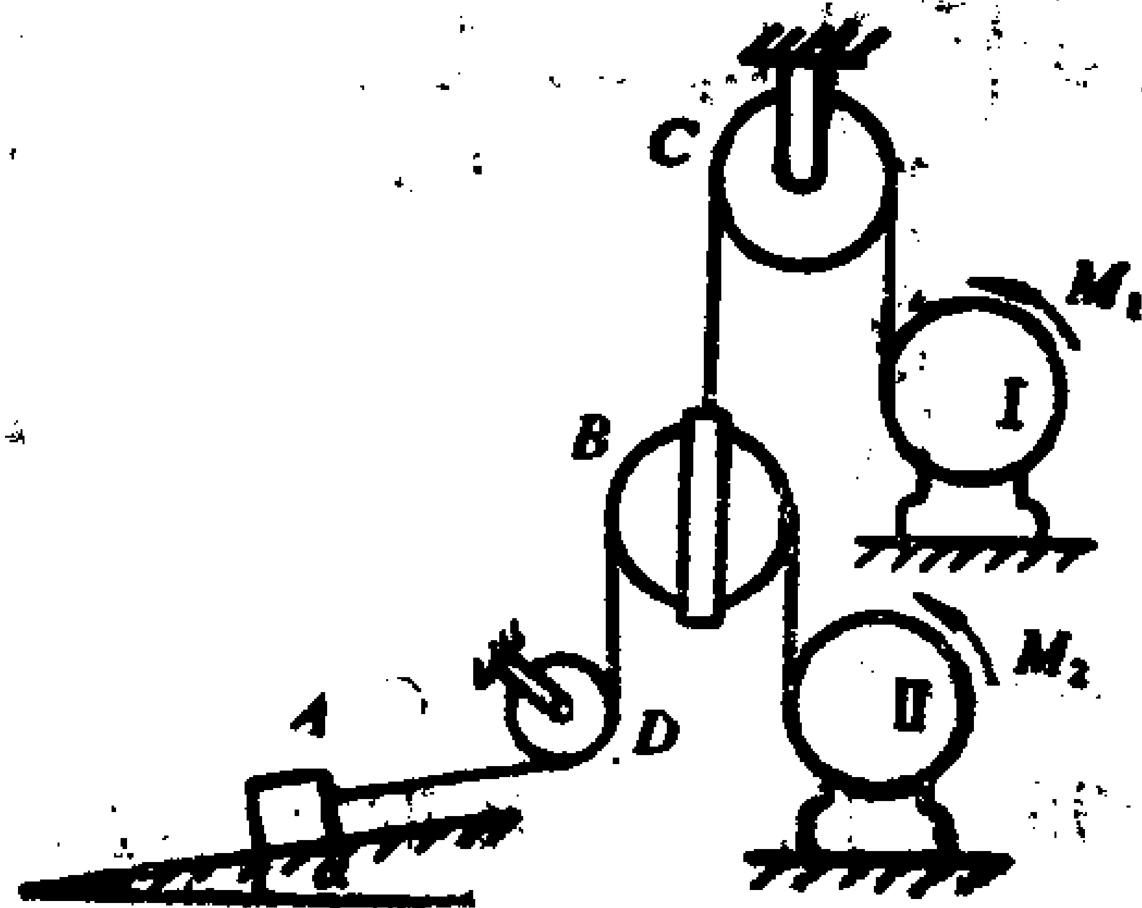
2-91 两相同的均质杆，长度为l，重为W，其上各作用如图示的力偶M，试求在平衡状态时杆与水平线之夹角θ_1、θ_2。

答：$\theta_1=\arccos\frac{2M}{3Wl}$；$\theta_2=\arccos\frac{2M}{Wl}$

2-92 在鼓轮Ⅰ和Ⅱ上分别作用力矩M_1和M_2，如图



题2-91图



题2-92图

示。物体A重P，其与斜面的摩擦系数为f，斜面的倾角为α，鼓轮的半径分别为r_1和r_2，动滑轮B重Q。试求物系平衡时，M_1和M_2应满足的条件。略去轴的摩擦。

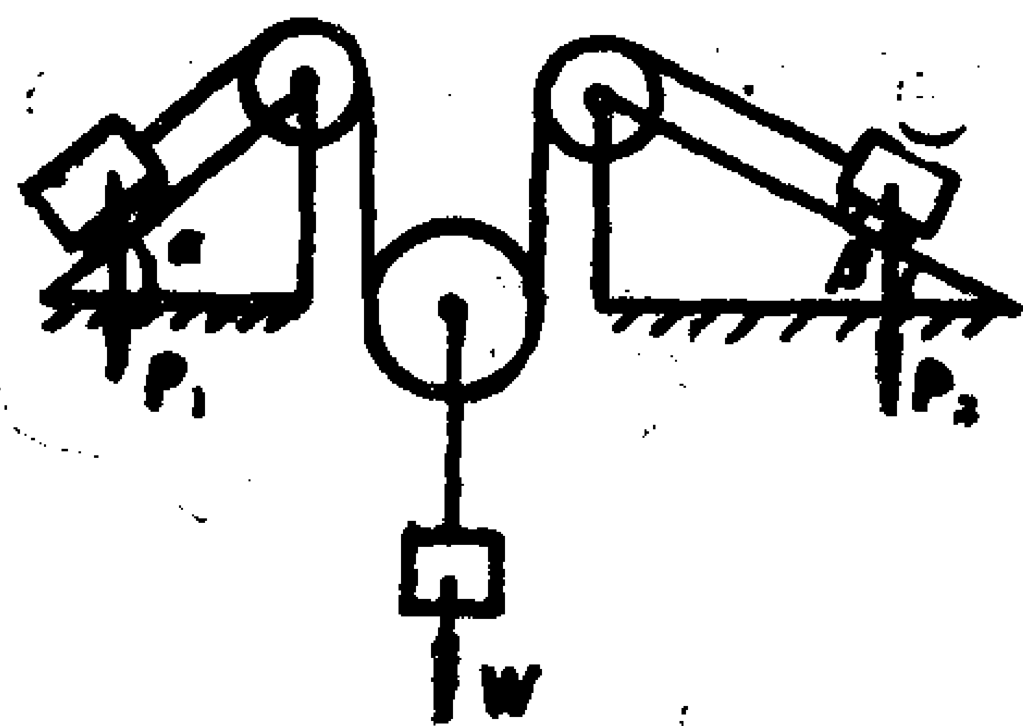
答：$Qr_1+2Pr_1\sin\alpha-2Pr_1f\cos\alpha\leqslant M_1\leqslant Qr_1+2pr_1\sin\alpha+2Pr_1f\cos\alpha$。

2-93　图示两重物P_1、P_2系在细绳的两端，分别放在倾角为α、β的斜面上，绳子绕过两定滑轮与一动滑轮相连，动滑轮的轴上挂一重物W，如摩擦以及滑车与绳索的质量略去不计，试求平衡时P_1和P_2的值。

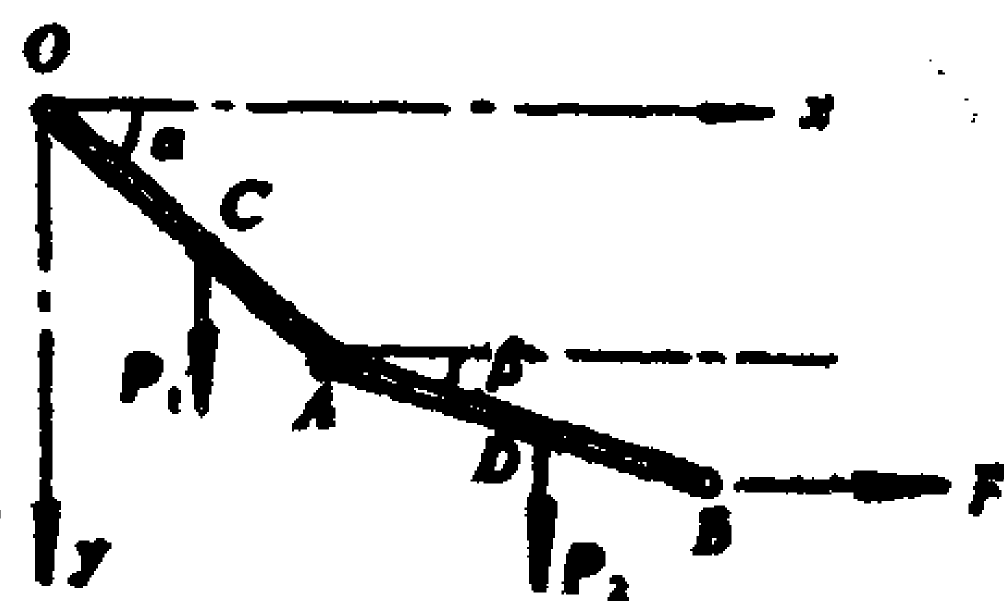
答：$P_1=\dfrac{W}{\sin\alpha}$　$P_2=\dfrac{W}{2\sin\beta}$

2-94　均质杆OA，重P_1，能在铅垂平面内绕固定铰链O转动，此杆的A端用铰链连住另一重P_2的均质杆，在AB杆的B端加一水平力F。求平衡时此二杆与水平所成的角α及β。

答：$\text{tg}\,\alpha=\dfrac{P_1+2P_2}{2F}$；$\text{tg}\beta=\dfrac{P_2}{2F}$



题2-93图



题2-94图

2-95　两重物，各重P_1与P_2，结在一绳两端，借另一重为P的重物维持平衡于两斜面上，这两斜面分别与水平倾斜α与β角。绳子自重物P_1起，跨过装在水平轴上的滑车O_1而

引到带有重物P的动滑车O，然后再跨过装在滑车O_1轴上的另一滑车O_2，终而延伸到重物P_2。如各处摩擦及绳索自重不计，试求重物P_1与P_2的重量。

答：$P_1=\dfrac{P}{2\sin\alpha}$；　$P_2=\dfrac{P}{2\sin\beta}$

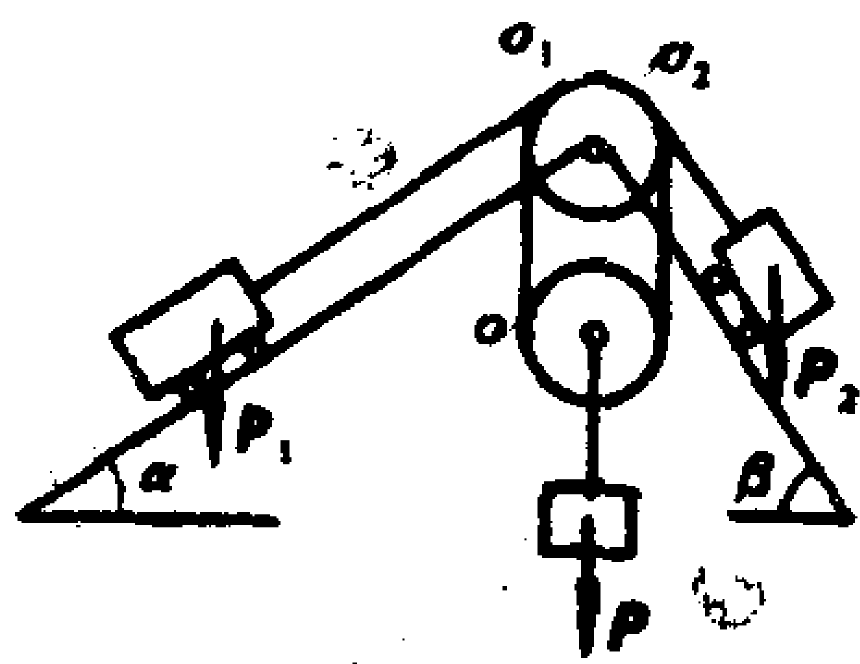
2-96　一均质杆，长为l，其两端可沿一曲线滑动而无摩擦。已知曲线为椭圆：$f(x,\ y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$，且杆长满足条件$l<2a$，求杆的可能的平衡位置。$y$轴为水平。

提示：解题时应借关系式$x=a\cos\varphi$，$y=b\sin\varphi$引入坐标φ来代替直角坐标。

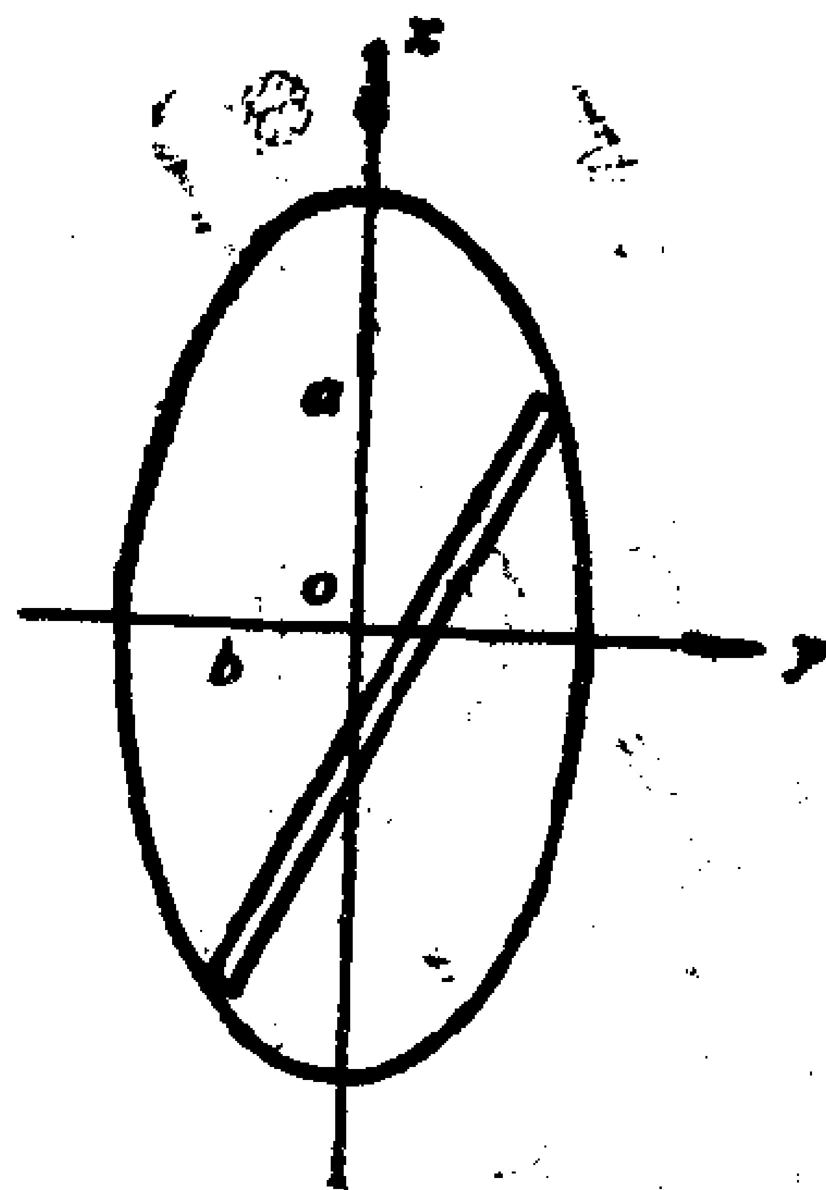
答：平衡位置符合于由下列方程式所求出的偏近点角之值：

（1）$\varphi_1=2\pi-\varphi_2$；$\sin\varphi_2=\dfrac{l}{2b}$（杆的水平位置）

（2）$\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}\cos\dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{2}=\cos\dfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}$；



题2-95图



题2-96图

$$\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}=\sqrt{\frac{l}{2a}}$$

2-97 在自记振动仪之摆中，重物M悬在杆OM上。此杆通过可以转动的套管O；并在A点与摆杆AO_1用铰链相联接，杆AO_1可绕O_1轴转动，其长为r。重物重心到铰链A的距离为l。距离$OO_1=h$。重物尺寸及杆自重不计。试讨论摆之铅垂平衡位置的稳定性。

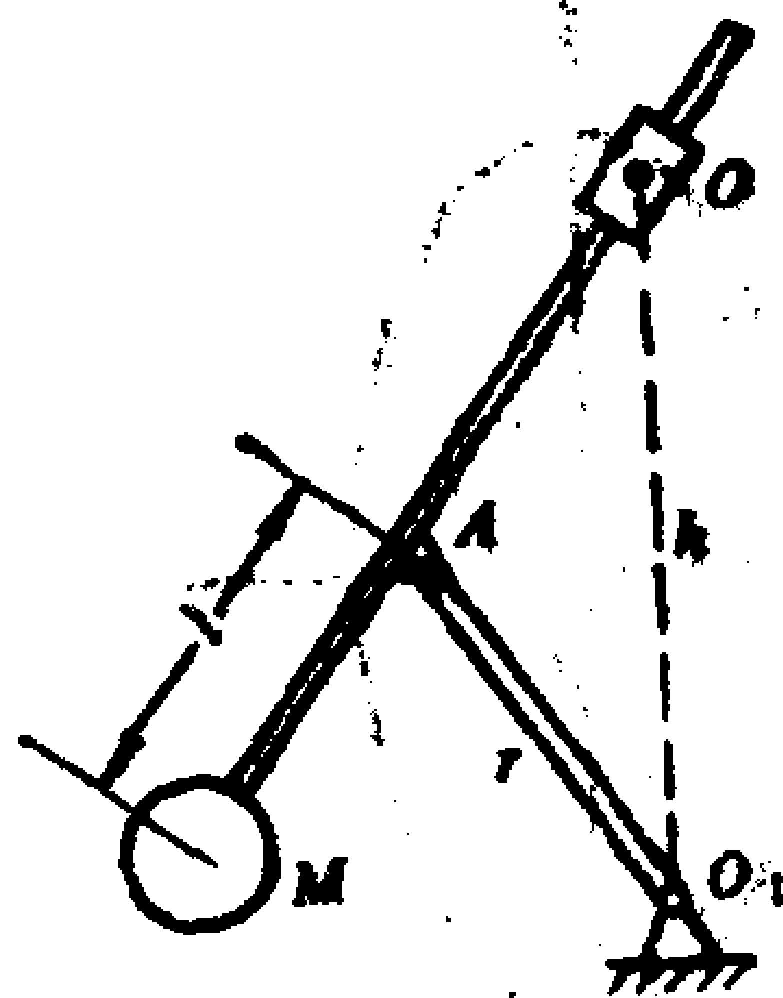
答：当$\sqrt{rl}>h-r$时，平衡位置为稳定；

当$\sqrt{rl}<h-r$时不稳定。

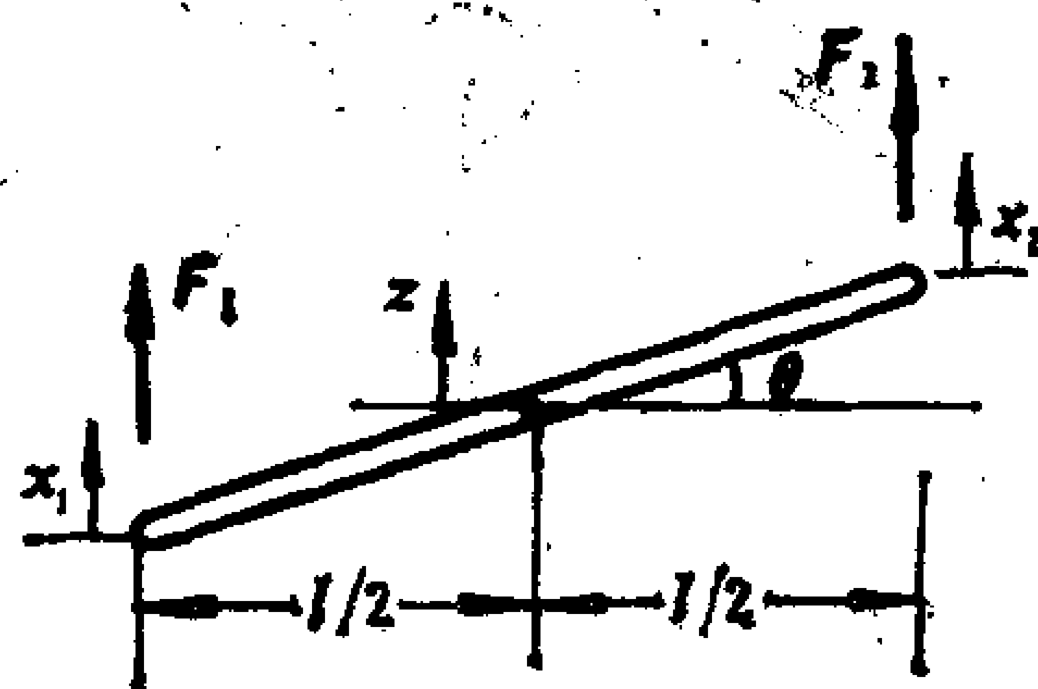
2-98 长为l的刚杆进行小运动，若以(x_1, x_2)来表示小运动中杆端的铅直位移。杆的位形由广义坐标(z, θ)给定，其中z是杆中心的铅直位移，θ是转角。试问变换式是什么形式？试就作用于杆端上的已知力计算广义力Q_z和Q_θ。

答：$x_1=z-\frac{1}{2}l\theta$，$x_2=z+\frac{1}{2}l\theta$

$Q_2=F_1+F_2$，$Q_\theta=\frac{1}{2}l(F_2-F_1)$



题2-97图



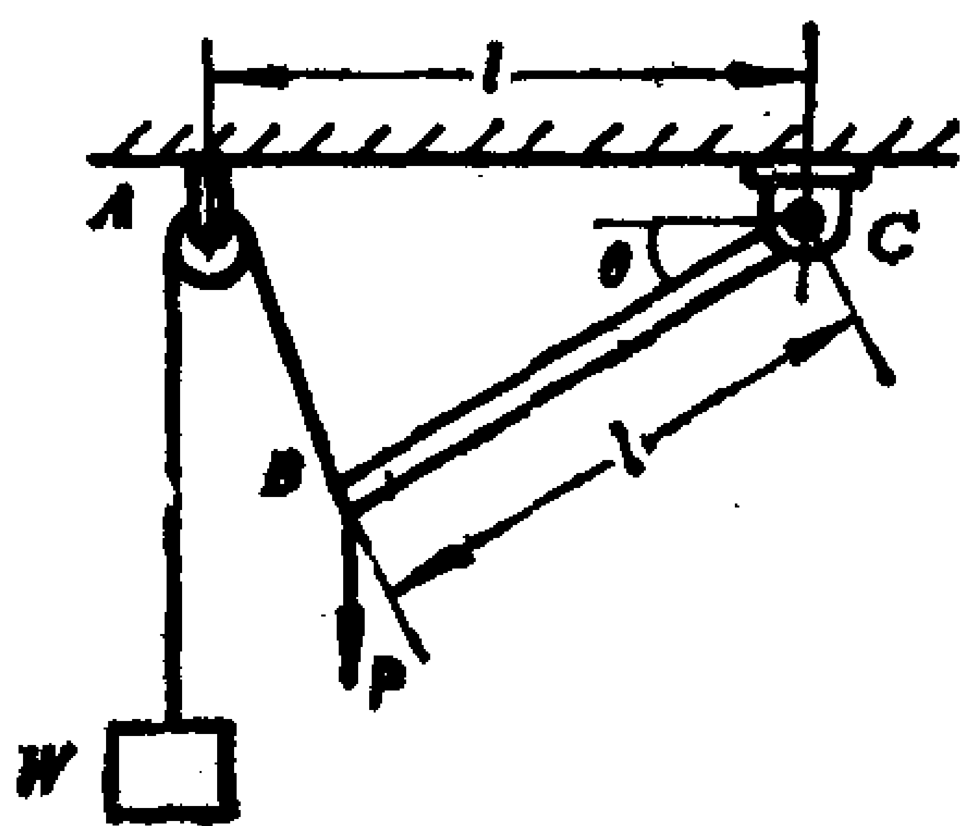
题2-98图

2-99 （1）推导图示系统在平衡位置时的 θ 角的方程。（2）已知$W=P/2$，求相应于平衡位置的θ角。

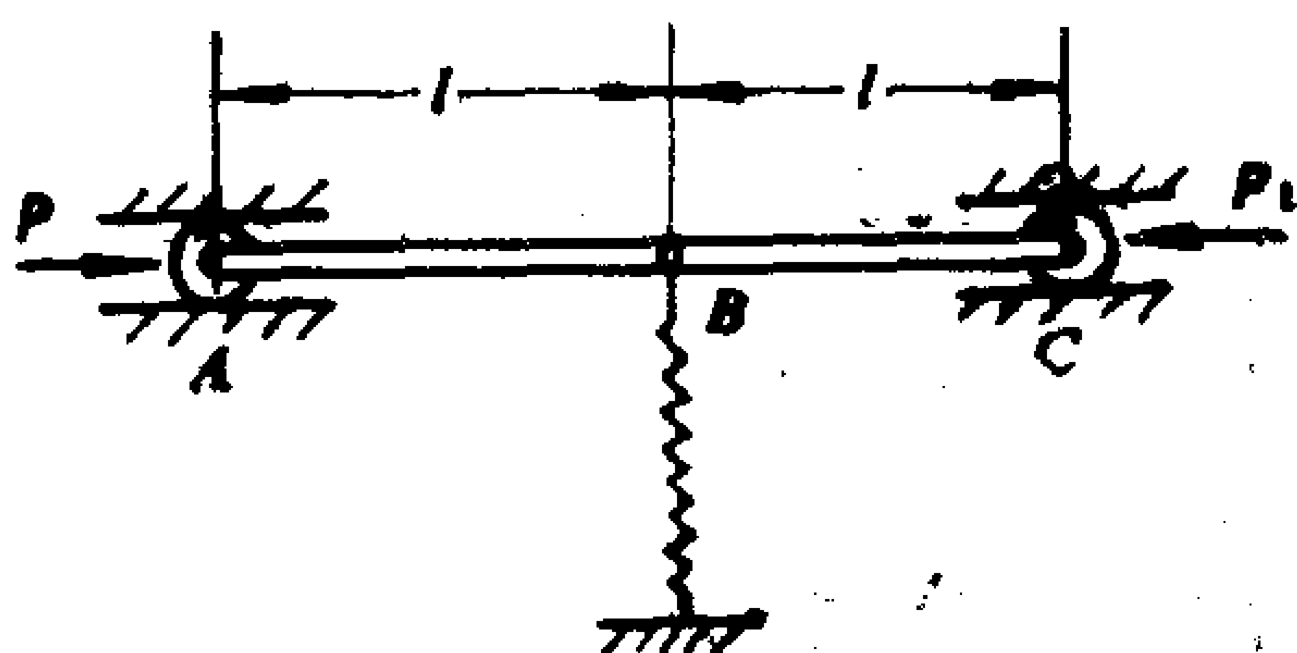
答：$\theta=65.1°$

2-100 两杆AB与BC，B点系在一根弹簧上，弹簧的刚度系数为k。当杆水平时，弹簧没变形，$\boldsymbol{P}$与$\boldsymbol{P}_1$大小相等，方向相反，求：图示位置为系统稳定平衡位置时P值的范围。

答：$P<kl/2$



题2-99图



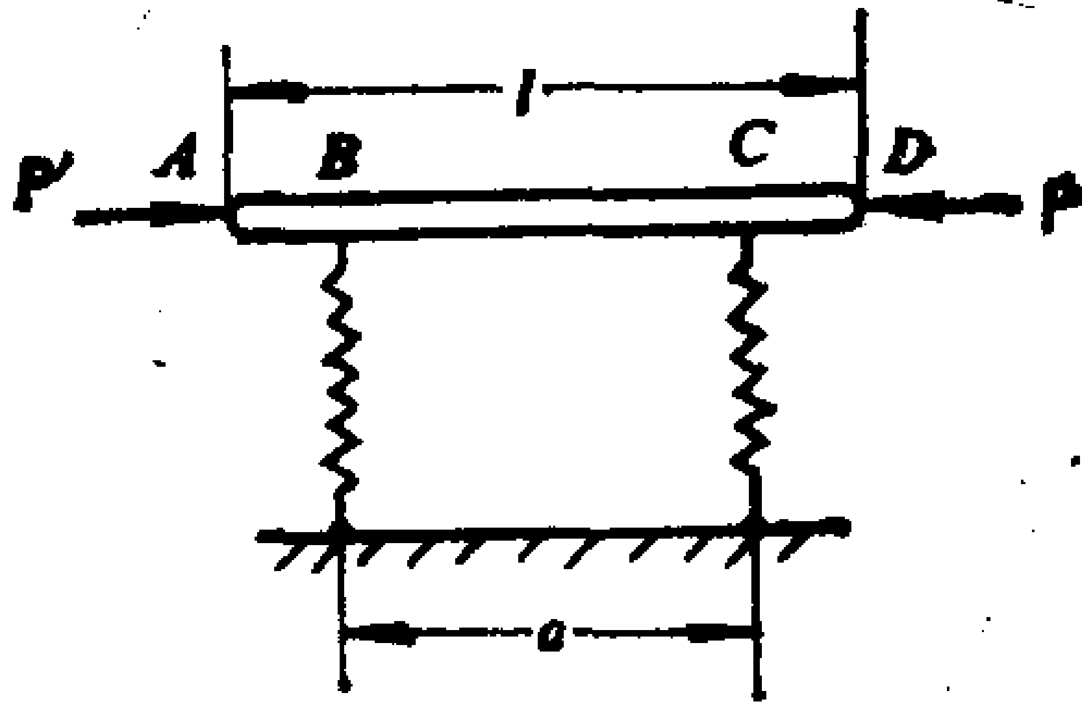
题2-100图

2-101 水平杆AD系于两根刚度系数均为k的弹簧上。图示位置为其平衡位置，$\boldsymbol{P}$与$\boldsymbol{P}'$大小相等、方向相反。试求：在下列两种情况下，该平衡位置是稳定时P值的范围：（1）若$AB=CD$；（2）若$AB=2CD$。

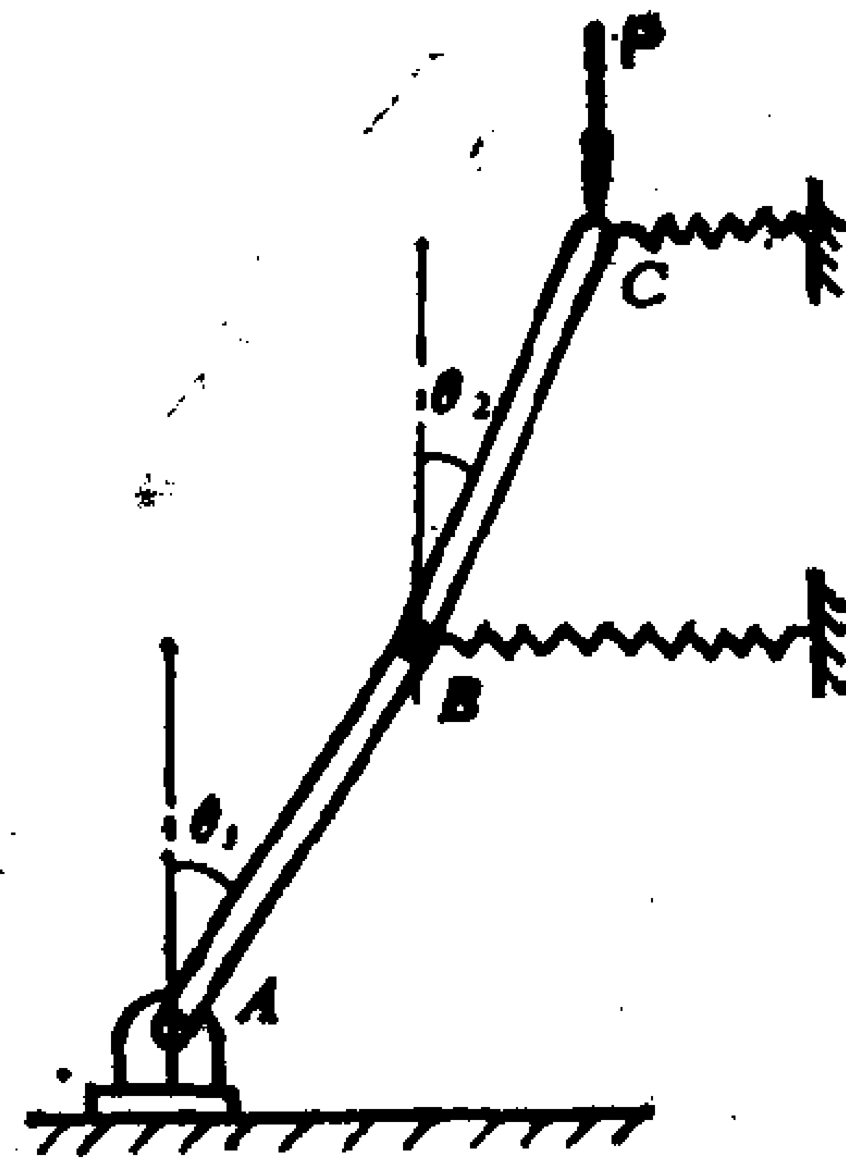
答：$P<k\dfrac{10a^2-2al+l^2}{18l}$

2-102 图示AB、BC杆，长均为l，而不计重量，系在刚度系数均为k的弹簧上。当$\theta_1=\theta_2=0$时，弹簧未变形，且系统处于平衡。求：稳定平衡时力$\boldsymbol{P}$的大小范围。

答：$P<\frac{1}{2}kl$



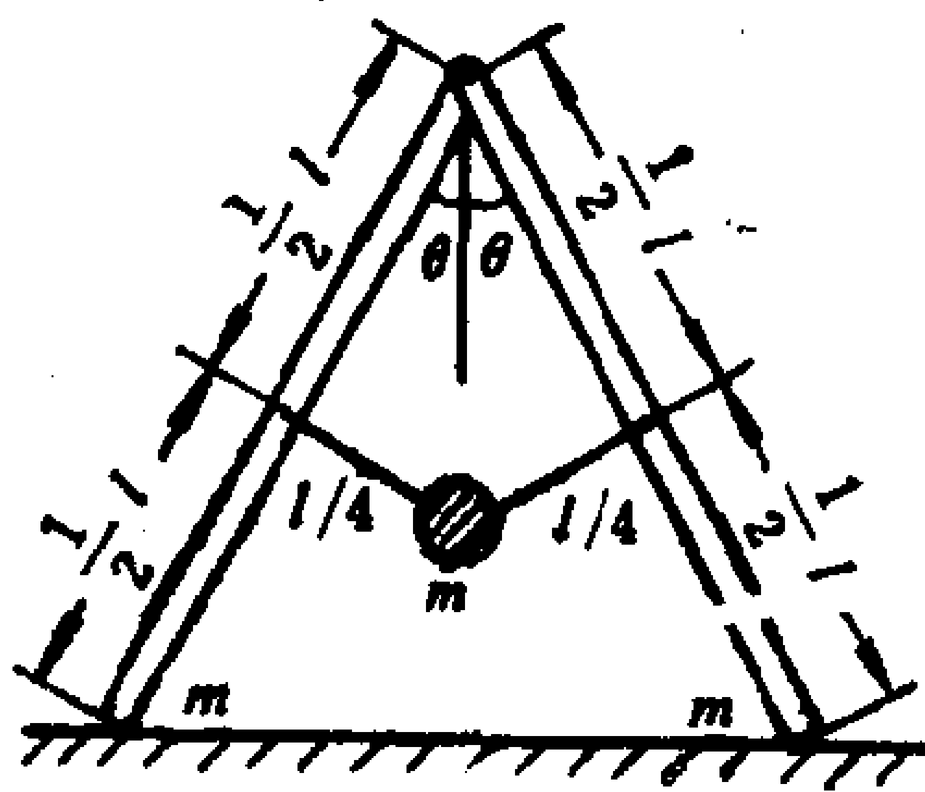
题2-101图



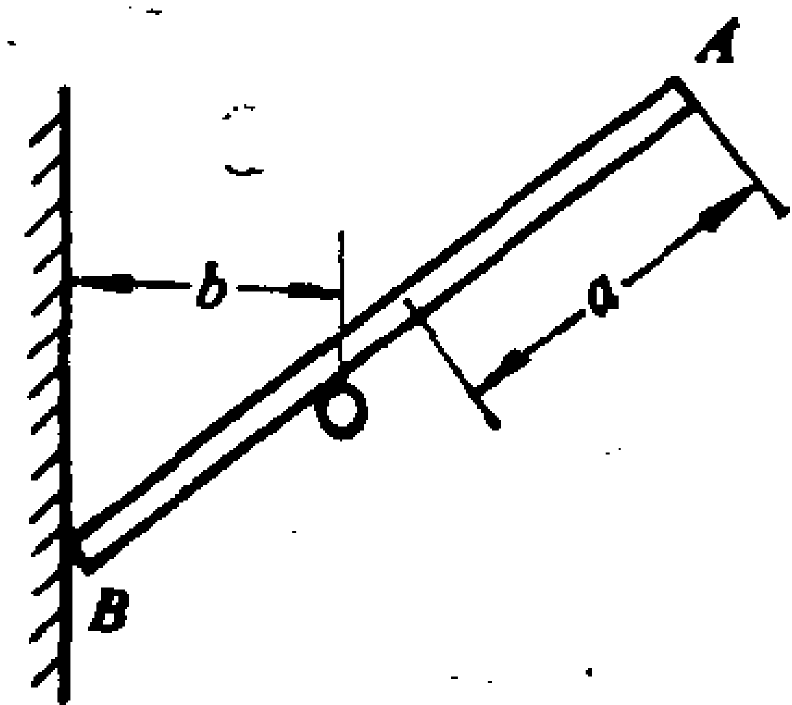
题2-102图

2-103 两根细杆，质量均为m，长均为l，两杆上端由销子相连接。质量为m的质点由系在二杆中点处的两根无质量细绳悬挂(如图示)，假定是平面运动，试应用虚功方法求出在$0<\theta<\pi/6$区间内的静平衡位置。试问：平衡是否为稳定的？

2-104 一匀质细杆AB、长$2a$，其B端与光滑垂直壁相



题2-103图



题2-104图

接触，并靠在与相距为b的光滑固定销钉上，如图示。试确定杆的平衡位置并讨其稳定性。

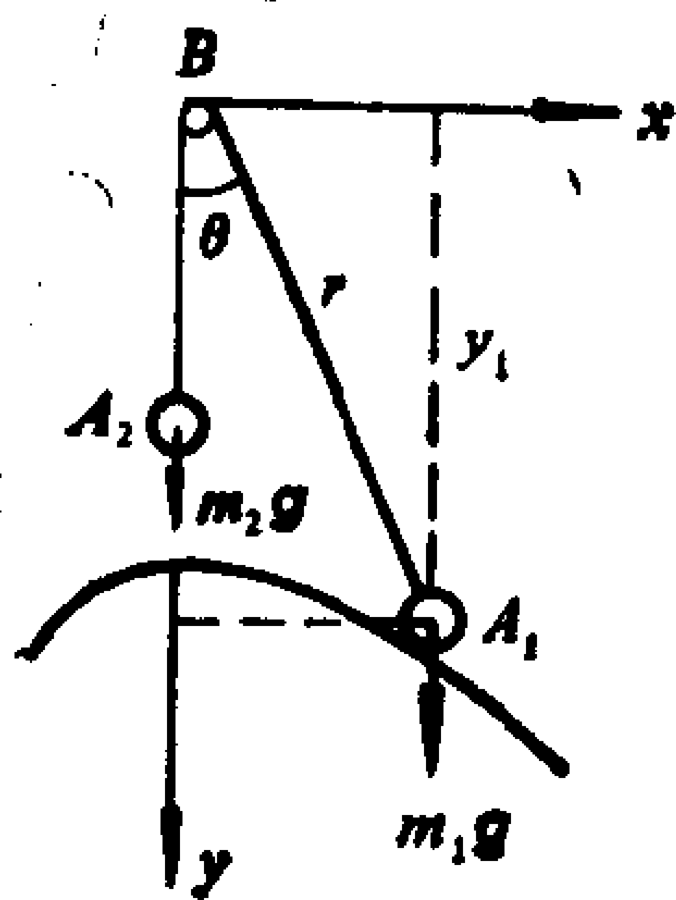
答：$\theta=\cos^{-1}\sqrt[3]{b/a}$　不稳定

2-105　质量为m_1，m_2的两质点A_1，A_2，用长为l的细线相连接。挂在光滑的固定销钉B上，A_2铅垂向下，A_1放在与线在同一铅垂面内的光滑曲线上，不论A_1在曲线的什么位置上，都处于平衡。试问该曲线是何形状？

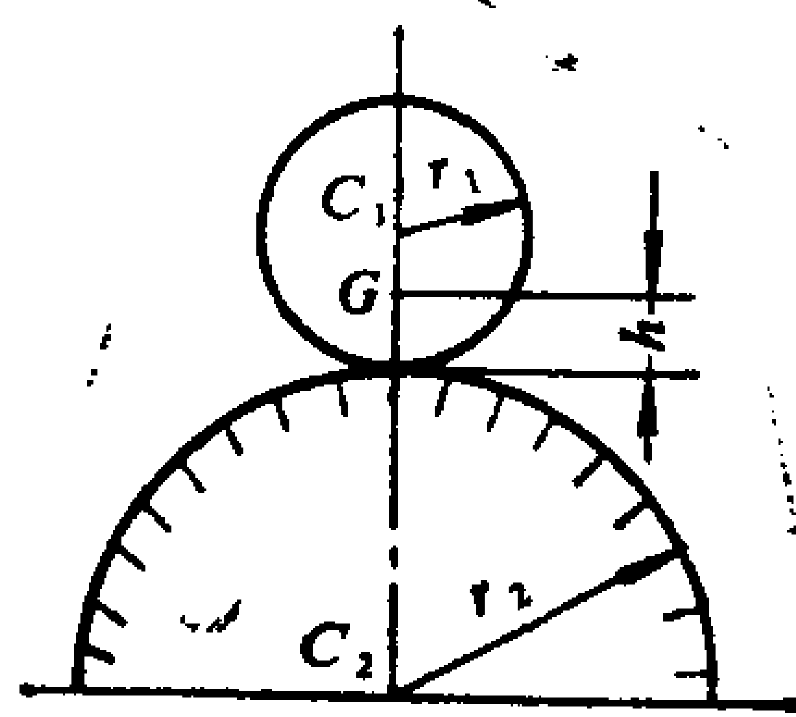
2-106　半径为r_1的小圆球，放在半径为r_2的固定的大圆球顶上，接触处有足够摩擦，不致产生滑动。小球的重心G在过接触点铅垂线的正上方h距离处，如图示。试讨论小球平衡位置的稳定性。

答：$\frac{1}{h}>\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$时，稳定；　$\frac{1}{h}<\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$时，不稳定

$\left(\frac{1}{h}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right.$时，其四阶导量小于零，仍是不稳定$\left.\right)$

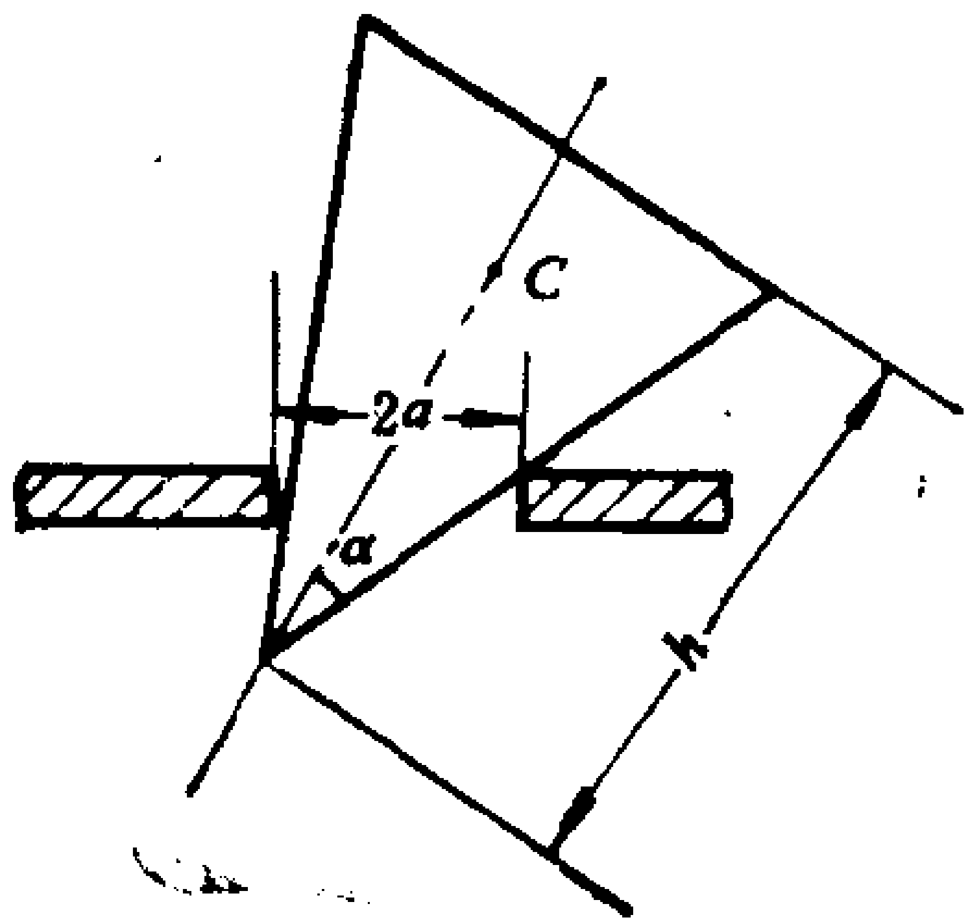


题2-105图



题2-106图

2-107　一圆锥体高h，半顶角为α，倒放在水平平板的



题2-107图

光滑圆孔内(如图示)。设圆孔半径为a，试求圆锥体的平衡位置，并讨论其稳定性。

答：圆锥中心线铅垂位置时，$16a>3h\sin 2\alpha$，稳定；

圆锥中心线倾斜位置时，$16a<3h\sin 2\alpha$，不稳定。

第三章　达朗伯原理和动力学普遍方程

一、基本理论与公式

1．达朗伯原理

（1）质点的惯性力。质点的质量m与其加速度$\boldsymbol{a}=\ddot{\boldsymbol{r}}$（$\boldsymbol{r}$为点的矢径)的乘积，并冠以负号，称为质点的惯性力或达朗伯惯性力：

$$\boldsymbol{\Phi}=-m\boldsymbol{a}=-m\ddot{\boldsymbol{r}} \tag{3-1}$$

（2）达朗的原理。由N个质点组成的质点系，对每一个质点假想地加上相应的惯性力，则有

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{\Phi}_i+\boldsymbol{R}_i=0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ N) \tag{3-2}$$

这表明：质点系在运动的每一瞬时，作用在每个质点上的主动力$\boldsymbol{F}_i$，约束反力$\boldsymbol{R}_i$和假想的惯性力$\boldsymbol{\Phi}_i$在形式上组成平衡力系。这就是质点系的达朗伯原理。

应用静力学平衡条件有

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\Phi}_i+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i=0 \tag{3-3}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{F}_i)+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{\Phi}_i)+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{R}_i)=0 \tag{3-4}$$

解题时要用投影式，即

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}F_{ix}+\sum_{i=1}^{N}\phi_{ix}+\sum_{i=1}^{N}R_{ix}=0\\\sum_{i=1}^{N}F_{iy}+\sum_{i=1}^{N}\phi_{iy}+\sum_{i=1}^{N}R_{iy}=0\\\sum_{i=1}^{N}F_{iz}+\sum_{i=1}^{N}\phi_{iz}+\sum_{i=1}^{N}R_{iz}=0\end{aligned}\right\}\tag{3-5}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}m_x(\boldsymbol{F}_i)+\sum_{i=1}^{N}m_x(\boldsymbol{\Phi}_i)+\sum_{i=1}^{N}m_x(\boldsymbol{R}_i)=0\\\sum_{i=1}^{N}m_y(\boldsymbol{F}_i)+\sum_{i=1}^{N}m_y(\boldsymbol{\Phi}_i)+\sum_{i=1}^{N}m_y(\boldsymbol{R}_i)=0\\\sum_{i=1}^{N}m_z(\boldsymbol{F}_i)+\sum_{i=1}^{N}m_z(\boldsymbol{\Phi}_i)+\sum_{i=1}^{N}m_z(\boldsymbol{R}_i)=0\end{aligned}\right\}\tag{3-6}$$

2. 动力学普遍方程

对于由N个质点组成的理想双面约束的质点系，有

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0\tag{3-7}$$

或表示为在直角坐标系中的解析式

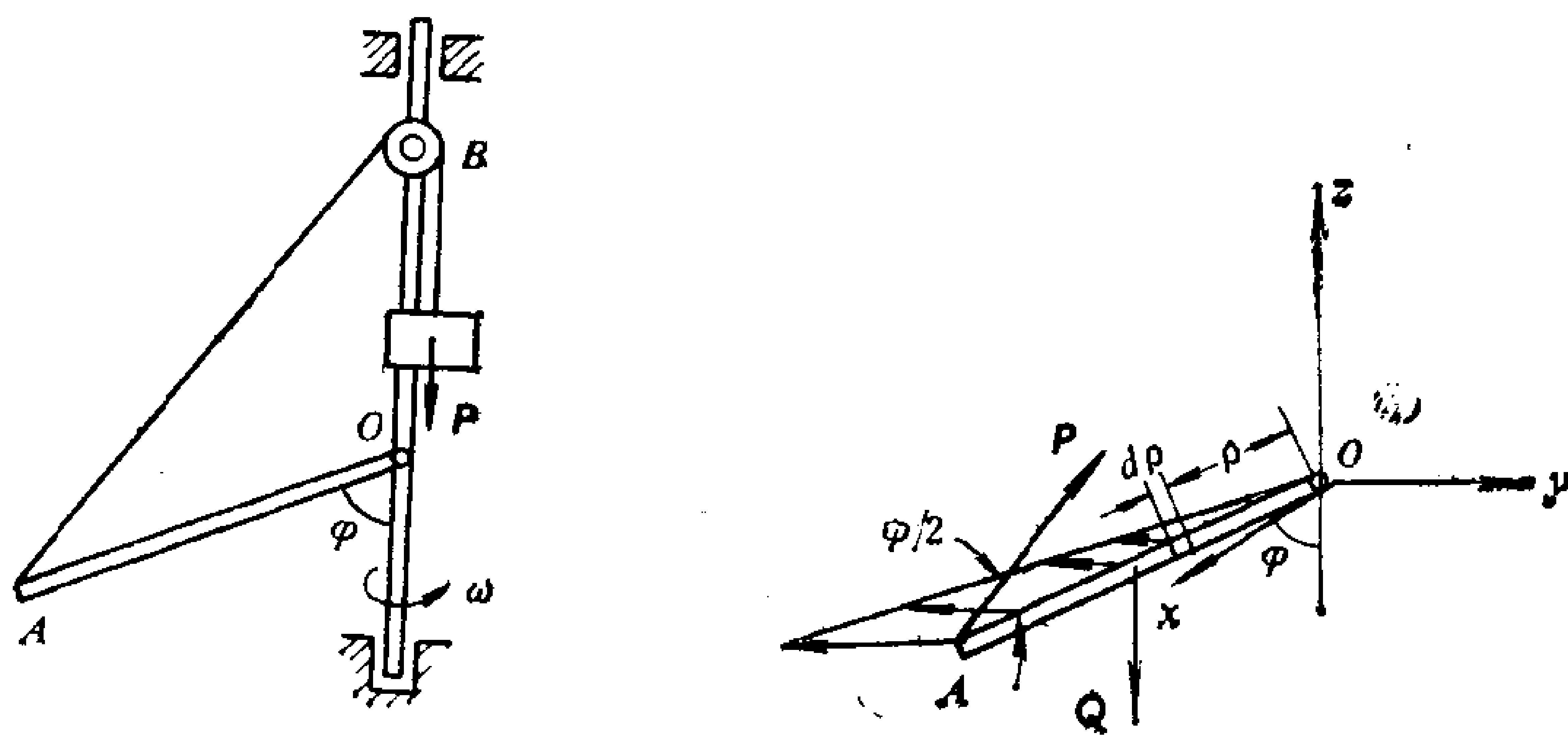
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\{(m_i\ddot{x}_i+F_{ix})\delta x_i+(-m_i\ddot{y}_i+F_{iy})\delta y_i\\+(-m_i\ddot{z}_i+F_{iz})\delta z_i\}=0\end{aligned}\tag{3-8}$$

这表明：在任一瞬时加于质点系内各质点的主动力和惯性力在系统于该瞬时所取位置的任何虚位移上的元功之和等于零。

二、范　例

例3-1　均质杆OA长$2a$、重Q，以铰链连结在铅垂杆OB上，可绕O点在铅垂平面内转动。OA杆的A端系一软绳，绳子跨过铅垂杆OB上的小滑轮B，其自由端挂一重量为P的物体。若铅垂轴OB以等角速度ω转动，OA杆和铅垂线所成的定角φ其值为何？设$OA=OB$。

［解］　取OA杆为研究对象。杆的重力Q作用在中心处，惯性力沿OA杆按线性分布，在距铰链O为ρ处的微元长度$d\rho$的惯性力为$\frac{Q}{2ag}\omega^2\rho\sin\varphi d\rho$。取坐标系$oxyz$，使$oz$沿转动轴，$OA$在$oyz$平面内。按达朗伯原理写出对$x$轴的力矩方程



例3-1图

$$\Sigma m_x(\boldsymbol{F})=0$$

即

$$Q a\sin\varphi-P2a\sin\frac{\varphi}{2}-\int_0^{2a}\frac{Q}{2ag}\omega^2\rho\sin\varphi\rho\cos\varphi d\rho=0$$

完成积分后化简得

$$3Qg\sin\varphi-6Pg\sin\frac{\varphi}{2}-2Q\omega^2a\sin2\varphi=0$$

这就是角φ所满足的关系。

例3-2 均质链条长l，重P，今将其弯成半径为r的圆周放在一水平粗糙圆盘上。圆盘绕过链条所成圆心的铅垂轴作匀速转动，如此链条所能承受的张力不超过F，问圆盘角速度ω为何值时才能拉断链条？

［解］ 取链条中任意微元，其张角为$d\theta$。微元两端所受张力$T=T'$，方向沿圆周切线。假想的惯性力为$\boldsymbol{\Phi}=\frac{P}{gl}\omega^2r^2d\theta$，方向沿径向离心。微元在$\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{T}'$，$\boldsymbol{\Phi}$作用下处于平衡，即

$$\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}'+\boldsymbol{\Phi}=0$$

将其投影到ox方向，即为

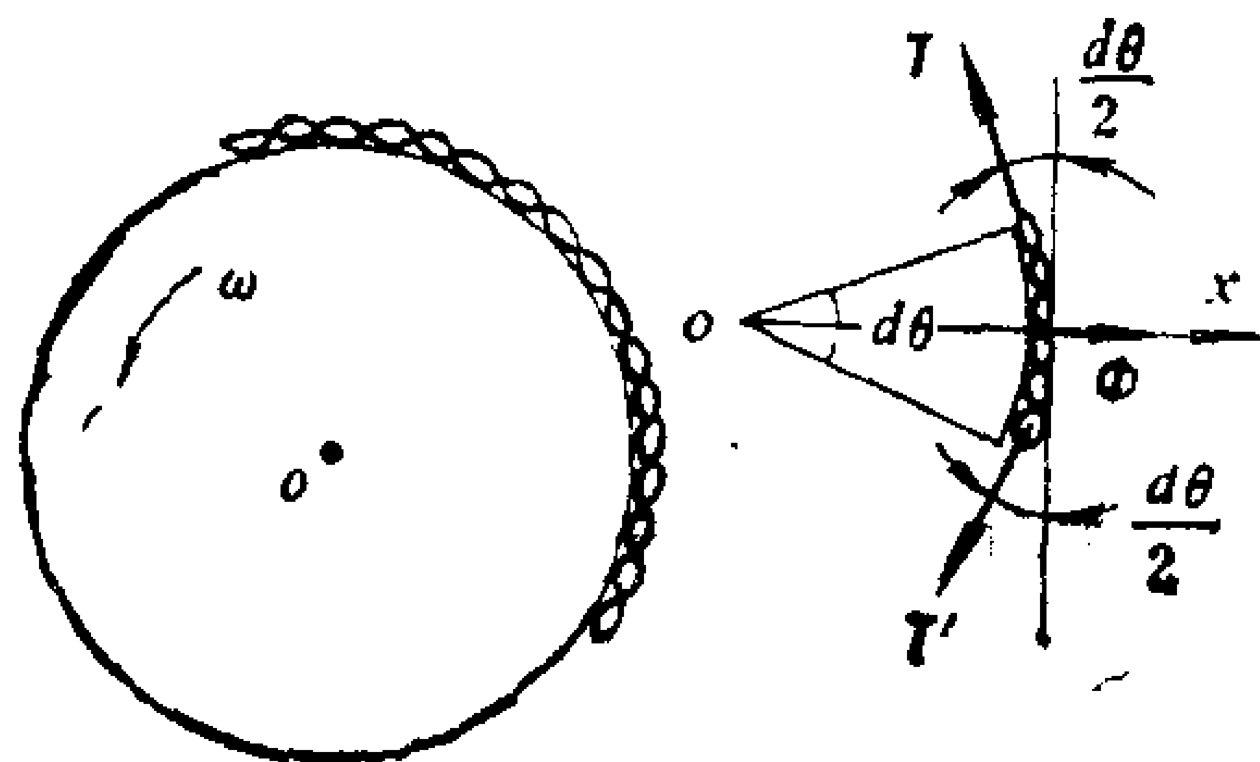
$$-2T\sin\frac{d\theta}{2}+\frac{P}{gl}\omega^2r^2d\theta=0$$

因$\sin\frac{d\theta}{2}\approx\frac{d\theta}{2}$故得

$$\omega=\sqrt{\frac{lg}{r^2}\frac{T}{P}}$$

当$T\geqslant F$时，链条被拉断，则有

$$\omega\geqslant\sqrt{\frac{lg}{r^2}\frac{F}{p}}$$



例3-2图

例3-3 铅垂面内重P的均质杆AB在图示位置从静止开始释放，假定A端与接触面有足够大的摩擦系数以阻止滑动。求AB杆刚释放时的角加速度ε，在A处的法向反力$\boldsymbol{N}$和摩擦力$\boldsymbol{F}$，以及摩擦系数f的最小值。

[解] 取AB杆为研究对象。重力$\boldsymbol{P}$作用于质心C，A点有法向反力$\boldsymbol{N}$和摩擦力$\boldsymbol{F}$。因AB杆作平面运动，故有作用于质心处假想的惯性力$\frac{p}{g}\ddot{x}_c$，$\frac{p}{g}\ddot{y}_c$和惯性力偶矩$\frac{pl^2}{12g}\ddot{\varphi}$，方向如图示。取坐标系$Axy$使$AB$杆在$Axy$平面内，按照达朗伯原理，可列出如下平衡方程

$$\Sigma X=0,\ F-\frac{P}{g}\ddot{x}_c=0 \tag{1}$$

$$\Sigma Y=0,\ N-P-\frac{P}{g}\ddot{y}_c=0 \tag{2}$$

$$\Sigma m_c(\overline{F})=0,\ -N\frac{l}{2}\cos\varphi+F\frac{l}{2}\sin\varphi-\frac{Pl^2}{12g}\ddot{\varphi}=0 \tag{3}$$

运动学关系为

$$x_c=\frac{l}{2}\cos\varphi,\quad \dot{x}_c=-\frac{l}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\ddot{x}_c=-\frac{l}{2}(\ddot{\varphi}\sin\varphi+\dot{\varphi}^2\cos\varphi)$$

$$y_c=\frac{l}{2}\sin\varphi,\quad \dot{y}_c=\frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\ddot{y}_c=\frac{l}{2}(\ddot{\varphi}\cos\varphi-\dot{\varphi}^2\sin\varphi)$$

将$\varphi=60°$，$\dot{\varphi}=0$代入上式，得AB杆刚释放时的关系

$$\ddot{x}_c=-\frac{\sqrt{3}}{4}l\ddot{\varphi},\quad \ddot{y}_c=\frac{l}{4}\ddot{\varphi} \tag{4}$$

将(4)分别代入(1)和(2)，得

$$F=-\frac{\sqrt{3}pl}{4g}\ddot{\varphi},\quad N=P+\frac{Pl}{4g}\ddot{\varphi} \tag{5}$$

将(5)代入(3)，并将(3)中φ以60°代入，得

$$-\left(P+\frac{Pl}{4g}\ddot{\varphi}\right)\frac{l}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}Pl}{4g}\ddot{\varphi}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$-\frac{Pl^2}{12g}\ddot{\varphi}=0$$

由此解得

$$\ddot{\varphi}=-\frac{3g}{4l} \tag{6}$$

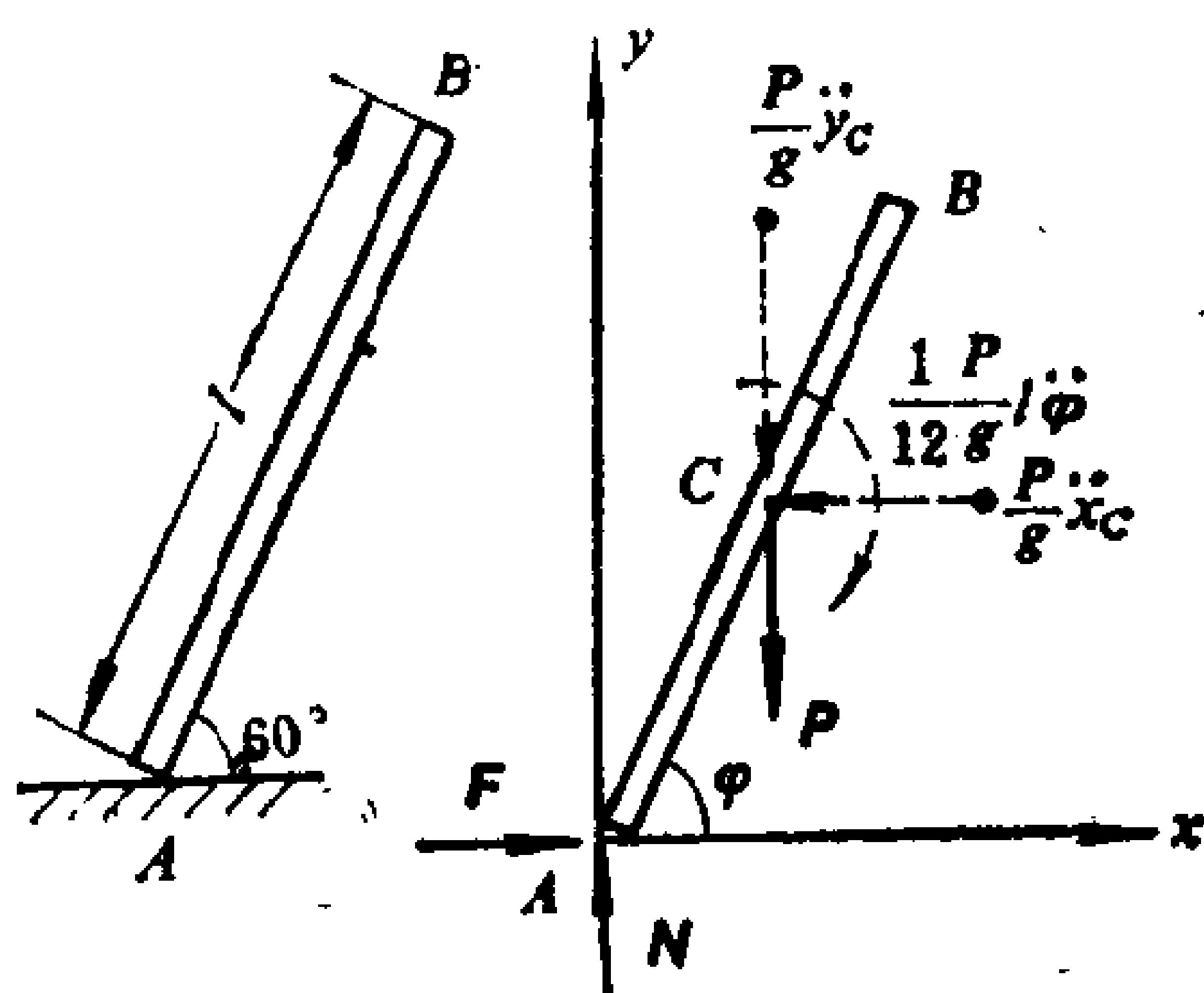
将(6)代入(5)，得

$$F=\frac{3\sqrt{3}}{16}P,\quad N=\frac{13}{16}P \tag{7}$$

将(7)代入物理条件$F\leqslant fN$，得

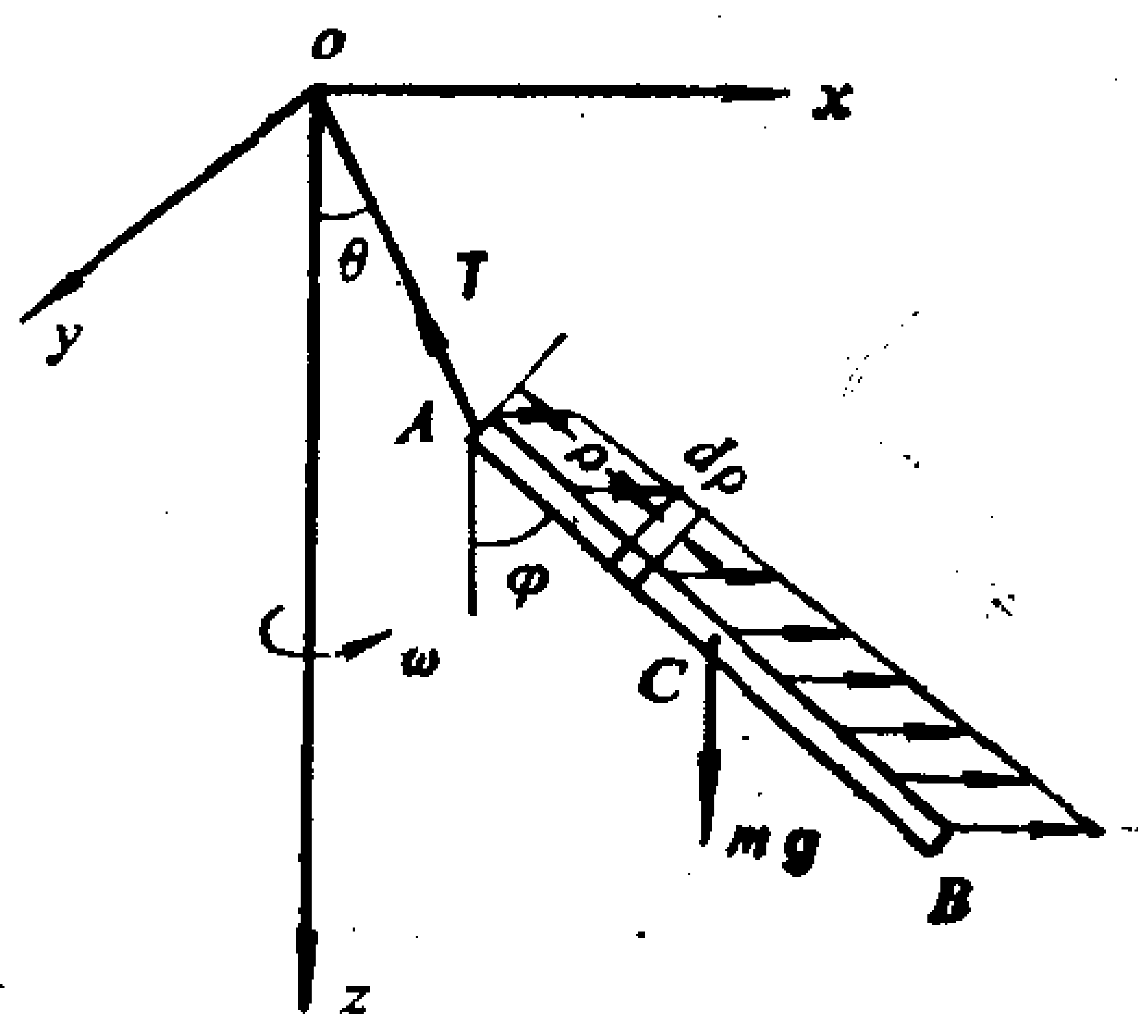
$$\frac{3\sqrt{3}}{16}P \leqslant f\frac{13}{16}P$$

即 $$f \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{13} \text{或} f_{min} = \frac{3\sqrt{13}}{13} \qquad (8)$$



例3-3图

例3-4 一均质细杆AB，长为$2a$，质量为M。今用长为l的轻细线将杆的A端与固定点o相连，并将杆挂起。线与杆保持在同一竖直平面内，这平面以等角速度绕过o点的竖直轴oz转动。线、杆与oz轴(方向向下)的夹角分别用θ和φ表示。求证，当杆处于相对平衡时，有



例3-4图

$$3l(\text{tg}\varphi-\text{tg}\theta)\sin\theta = a(4\text{tg}\theta - 3\text{tg}\varphi)\sin\varphi$$

[证明] 取AB杆为研究对象。重力Mg作用于质心处，A处的约束反力T沿绳方向，惯性力沿AB杆线性分布，在距

A点距离ρ处微元段$d\rho$的惯性力为$\frac{M}{2a}\omega^2(l\sin\theta+\rho\sin\varphi)d\rho$

取坐标系$oxyz$，使AB杆和OA线在竖直平面oxz内，按达朗伯原理写出力矩平衡方程

$$\Sigma m_{Ay}(\boldsymbol{F})=0$$

$$-Mga\sin\varphi+\int_0^{2a}\frac{M}{2a}\omega^2(l\sin\theta+\rho\sin\varphi)\rho\cos\varphi d\rho=0 \tag{1}$$

$$\Sigma m_{oy}(\boldsymbol{F})=0$$

$$-Mg(a\sin\varphi+l\sin\theta)+\int_0^{2a}\frac{M}{2a}\omega^2(l\sin\theta+\rho\sin\varphi)\times(l\cos\theta+\rho\cos\varphi)d\rho=0 \tag{2}$$

由(1)解得

$$\frac{g}{\omega^2}=\frac{l\sin\theta}{\mathrm{tg}\varphi}+\frac{4}{3}a\cos\varphi \tag{3}$$

(2)与(1)相减，并解得

$$\frac{g}{\omega^2}=l\cos\theta+\frac{a\sin\varphi}{\mathrm{tg}\theta} \tag{4}$$

比较(3)和(4)得

$$3l(\mathrm{tg}\varphi-\mathrm{tg}\theta)\sin\theta=a(4\mathrm{tg}\theta-3\mathrm{tg}\varphi)\sin\varphi$$

例3-5 质量为m的小球串在光滑铁丝上。铁丝的形状是一抛物线，在$o\rho z$平面中的方程为$\rho^2=2az$，铁丝以匀角速度ω绕铅垂轴转动，试用达朗伯原理列出质点的运动微分方程。

[解] 取小球为研究对象，质点在重力$\boldsymbol{P}(P=mg)$，约束反力$\boldsymbol{N}$，假想惯性力$\boldsymbol{\Phi}_w(\Phi_w=m\rho\omega^2)$、$\boldsymbol{\Phi}_z(\Phi_z=m\ddot{z})$和$\boldsymbol{\Phi}_\rho(\Phi_\rho=m\ddot{\rho})$作用下处于平衡。达朗伯原理给出

$$\boldsymbol{P}+\boldsymbol{N}+\boldsymbol{\Phi}_w+\boldsymbol{\Phi}_z+\boldsymbol{\Phi}_\rho=0 \tag{1}$$

将(1)投影在抛物线在该点的切线方向，有

$$(m\rho\omega^2 - m\ddot{\rho})\cos\alpha - m(g+\ddot{z})\sin\alpha = 0 \qquad (2)$$

由约束方程知

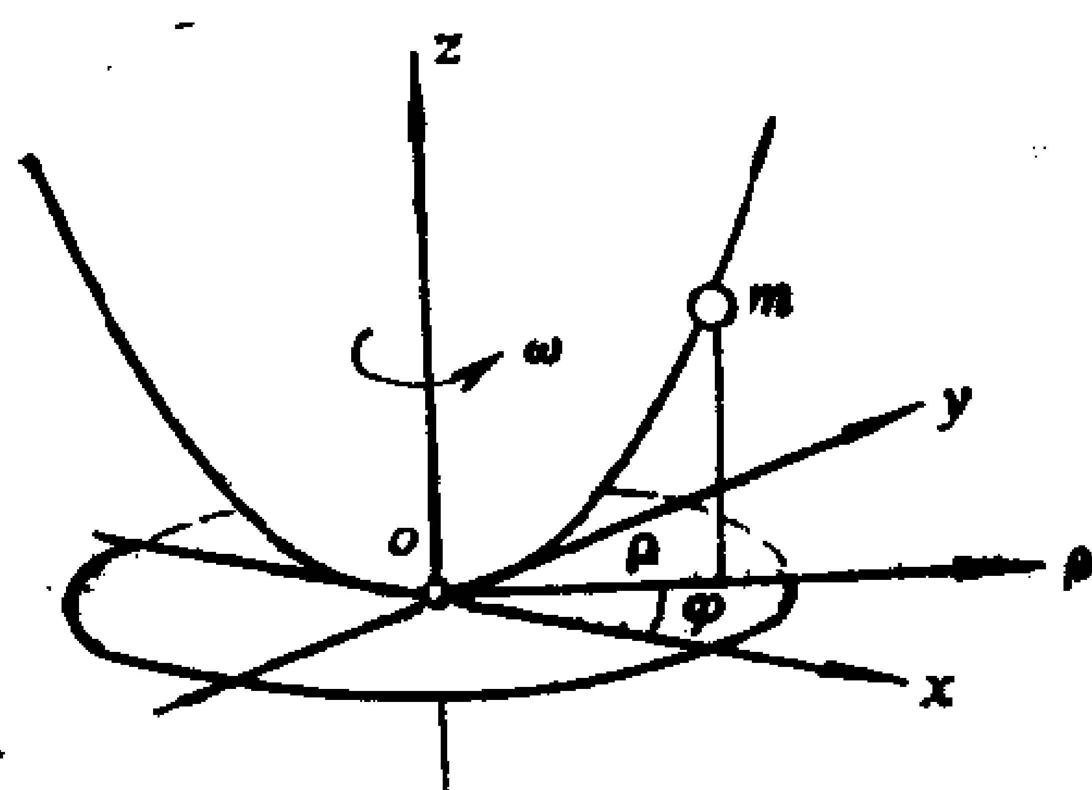
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{dz}{d\rho} = \frac{\rho}{a} \qquad (3)$$

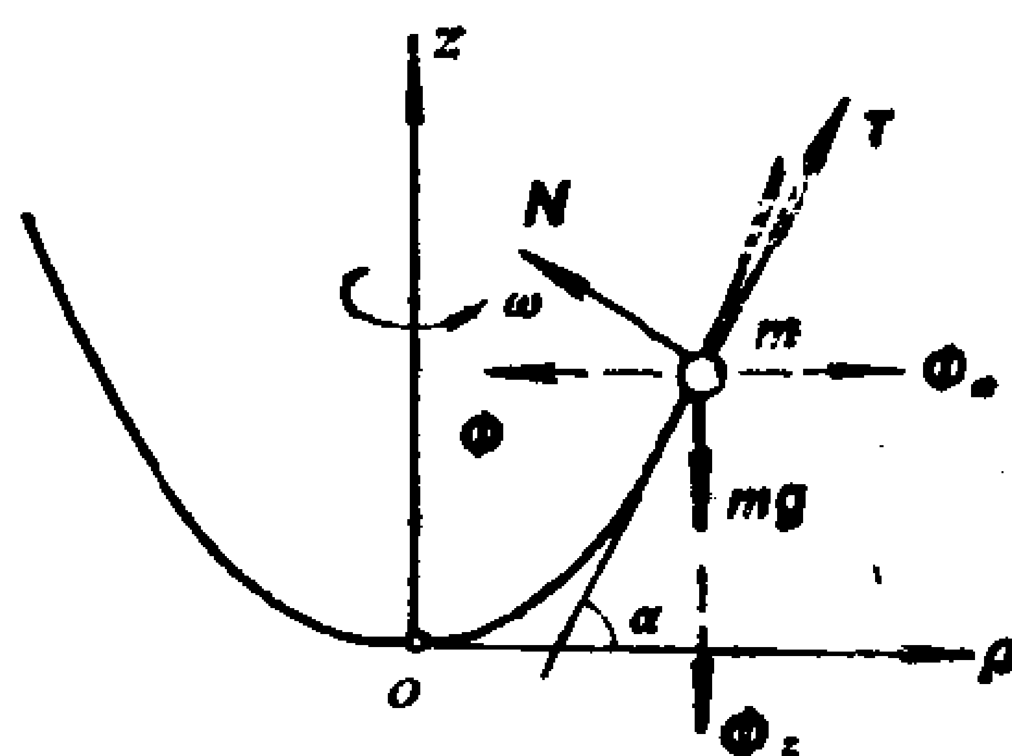
且

$$\ddot{z} = \frac{1}{a}(\dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho}) \qquad (4)$$

将(3)、(4)代入(2)，并简化得

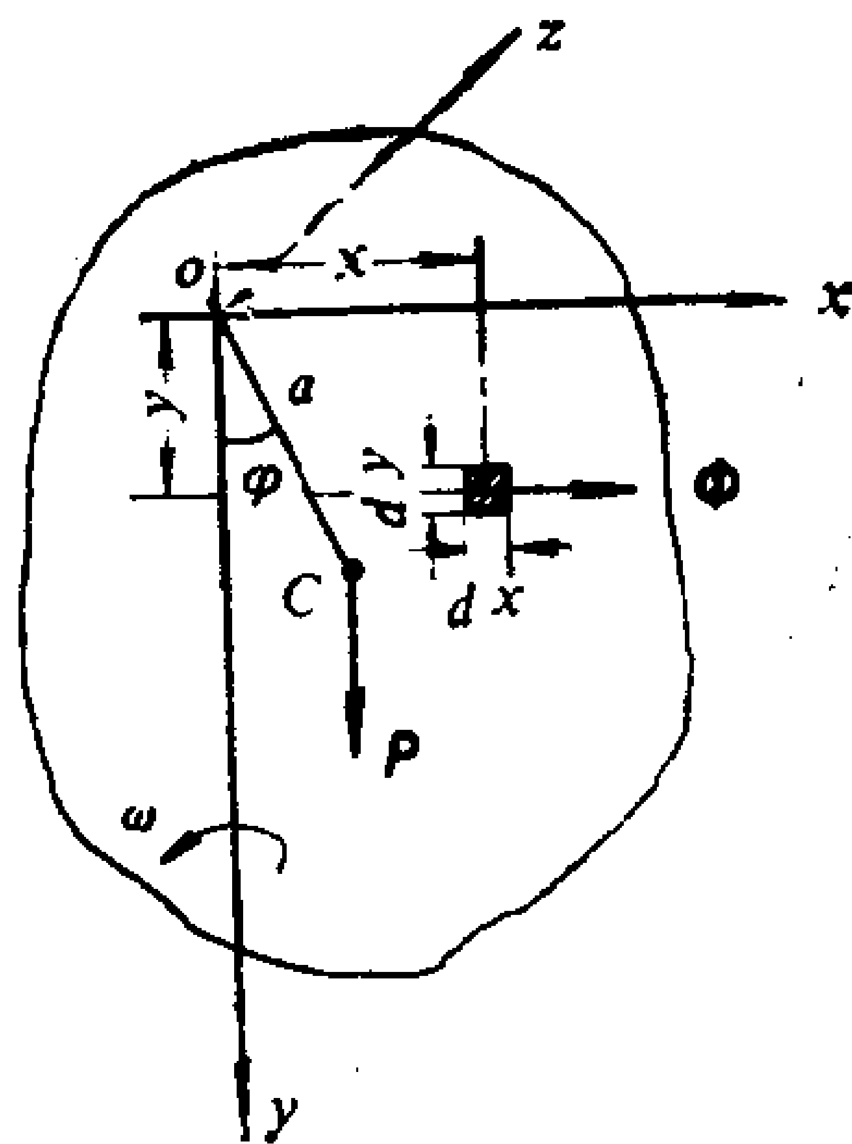
$$(a^2+\rho^2)\ddot{\rho} + \rho\dot{\rho}^2 + a\rho(g - a\omega^2) = 0$$





例3-5图

例3-6 薄片重 P，位于铅垂平面内，其 o 点与铰链相连，经过 o 点作 oy 轴，并使薄片绕此轴以等角速 ω 转动。如薄片重心 c 与 o 点的距离为 a，求薄片与 oy 所成之角。



例3-6图

［解］ 取薄片为研究对象，重力 $\boldsymbol{P}$ 作用于重心 c。设薄片面积为 s，则微元面积 $dxdy$ 的惯性力为

$\Phi=\frac{P}{sg}dxdy\omega^2x$。于是，按照达朗伯原理，可写出对$oz$轴的力矩方程

$$\Sigma m_z(F)=0,$$

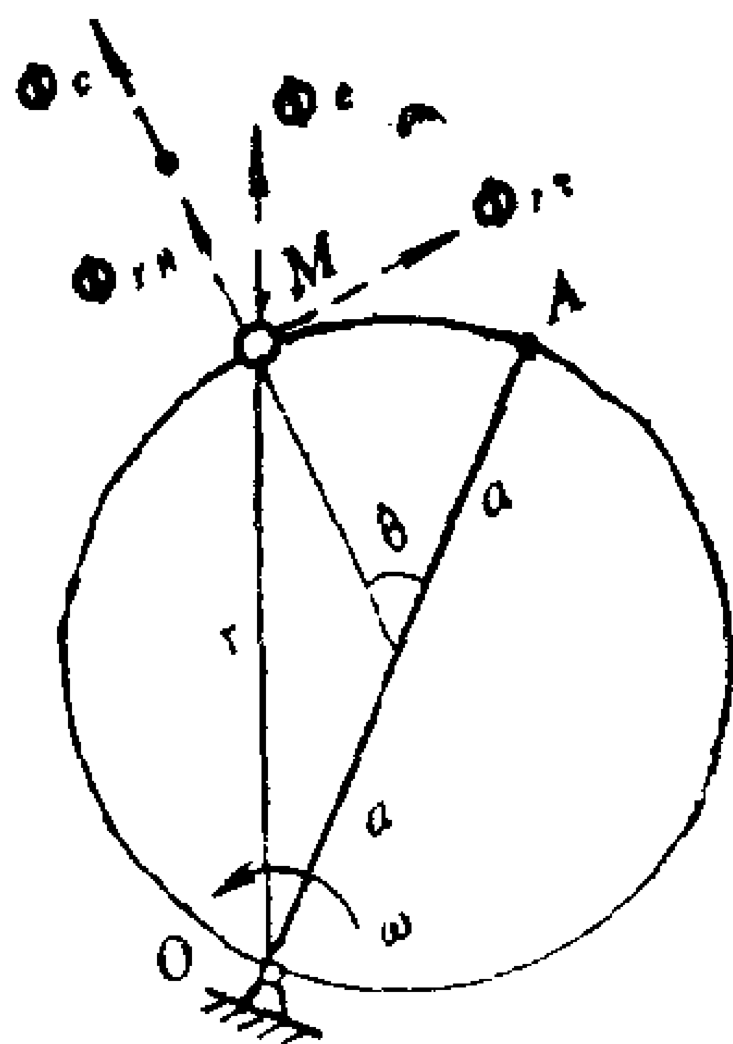
$$Pa\sin\varphi-\rho\int\frac{P}{sg}\omega^2xydxdy=0$$

即

$$Pa\sin\varphi-\omega^2\iint xydm=0$$

注意到$J_{xy}=\int\int xydm$，则

$$\sin\varphi=\frac{\omega^2}{Pa}J_{xy}$$



例3-7图

例3-7 一质量为m的小珠可运动在光滑水平圆线上，开始时停在A点。然后，让线在自身平面内以角速度ω绕过A直径的另一端匀速转动。研究小珠的运动，并证明在时间t后小珠对线压力的水平分量是

$$\frac{2ma\omega^2(3-2\text{ch}\omega t)}{\text{ch}^2\omega t}$$

［解］ 首先用达朗伯原理列写小珠运动方程。将小珠放在一般位置M，它在重力mg、铅垂反力N'、水平反力N，相对惯性力$\Phi_{r\tau}(\Phi_{r\tau}=ma\ddot{\theta})$、$\Phi_{rn}(\Phi_{rn}=ma\dot{\theta}^2)$，牵连惯性力$\Phi_e(\Phi_e=m\omega^2\cdot2a\cos\frac{\theta}{2})$和哥氏惯性力$\Phi_c$（$\Phi_c=2m\omega a\dot{\theta}$）作用下处于平衡。将这些力在圆周的切向和径向上投影，由达朗伯原理给出

$$-ma\ddot{\theta}-m\omega^2 2a\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}=0 \tag{1}$$

$$N-ma\dot{\theta}^2-2ma\omega\dot{\theta}-m\omega^2 2a\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=0 \tag{2}$$

由(1)得

$$\ddot{\theta}+\omega^2\sin\theta=0 \tag{3}$$

其次，求解小珠的运动。现在积分(3)。因开始时，小珠停在A点，有$v_a=0$，即

$$2\omega a+a\dot{\theta}_0=0$$

由此解出运动初始时的相对角速度$\dot{\theta}_0$:

$$\dot{\theta}_0=-2\omega \tag{4}$$

用$t=0$，$\dot{\theta}=\dot{\theta}_0=-2\omega$，积分(3)，得

$$\dot{\theta}^2-4\omega^2\cos^2\frac{\theta}{2}=0 \tag{5}$$

注意到(4)，得

$$\dot{\theta}=-2\omega\cos\frac{\theta}{2} \tag{6}$$

再用$t=0$，$\theta=\theta_0=0$，积分(6)，得

$$\ln\ \mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\theta}=-\omega t$$

即

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\mathrm{ch}\,\omega t} \tag{7}$$

最后，将(6)和(7)代入(2)，可求得线对小珠压力的水平分量

$$N=2ma\omega^2\left(3\cos^2\frac{\theta}{2}-2\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=2ma\omega^2\frac{3-2\mathrm{ch}\,\omega t}{\mathrm{ch}^2\omega t}$$

例3-8 如机车的拉力为F，列车作等加速运动，而总摩擦系数为f，求列车，车厢间接头的拉力。

［解］ 取全列车为研究对象，则主动力有机车拉力$\boldsymbol{F}$，全部车厢重力$\boldsymbol{P}$，不打滑的最大静滑动摩擦力为fP，若列车加速度为a，则假想惯性力为Pa/g，按达朗伯原理可写出在列车前进方向的力的平衡方程

$$F-fP-\frac{P}{g}a=0 \tag{1}$$

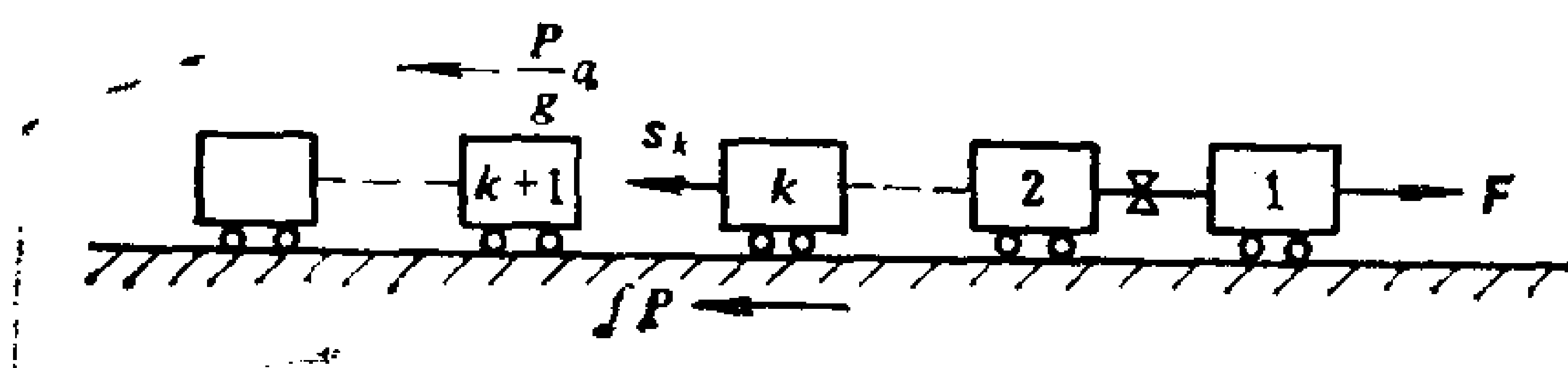
再取前面k节车厢为研究对象，主动力有拉力$\boldsymbol{F}$，前k节车厢重力$\boldsymbol{P}_k$和挂钩拉力s_k，此时摩擦力为fP_k，假想惯性力为$P_k a/g$，同样可写出力的平衡方程

$$F-s_k-\frac{P_k}{g}a-fP_k=0 \tag{2}$$

由(1)、(2)消去f，得

$$s_k=F-\frac{F}{P}P_k$$

当然，亦可对后段车厢利用达朗伯原理来取代方程(1)。



例3-8图

例3-9 转动惯量为J的飞轮可以在水平面内绕通过o点的铅直轴自由地转动。质量为m的质点由弹簧系于点o，弹簧刚度为k，原长为x_0。质点可在飞轮的径向槽内无摩擦地滑动。试用达朗伯原理求出以坐标(x，θ)表示的运动方程。证明这些方程中有一个表示总动量矩守恒。

［解］ 取飞轮和质点为研究对象，x、θ 为广义坐标。质点的惯性力有：牵连离心惯性力$m\dot{\theta}^2(x_0+x)$，牵连切向惯性力 $m\ddot{\theta}(x_0+x)$，相对运动惯性力$m\ddot{x}$，哥氏惯性力$2m\dot{\theta}\dot{x}$。根据达朗伯原理，对飞轮-质点系统可写出对 o 轴的力矩方程

$$\Sigma m_0(F)=0$$

$$J\ddot{\theta}+m\ddot{\theta}(x_0+x)^2+2m\dot{\theta}\dot{x}(x_0+x)=0$$

即

$$[J+m(x_0+x)^2]\ddot{\theta}+2m(x_0+x)\dot{\theta}\dot{x}=0 \qquad (1)$$

再取质点为研究对象。此时，质点除受惯性力外，还受弹性恢复力kx作用，于是在ox方向可写出力的平衡方程

$$m\dot{\theta}^2(x_0+x)-m\ddot{x}-kx=0$$

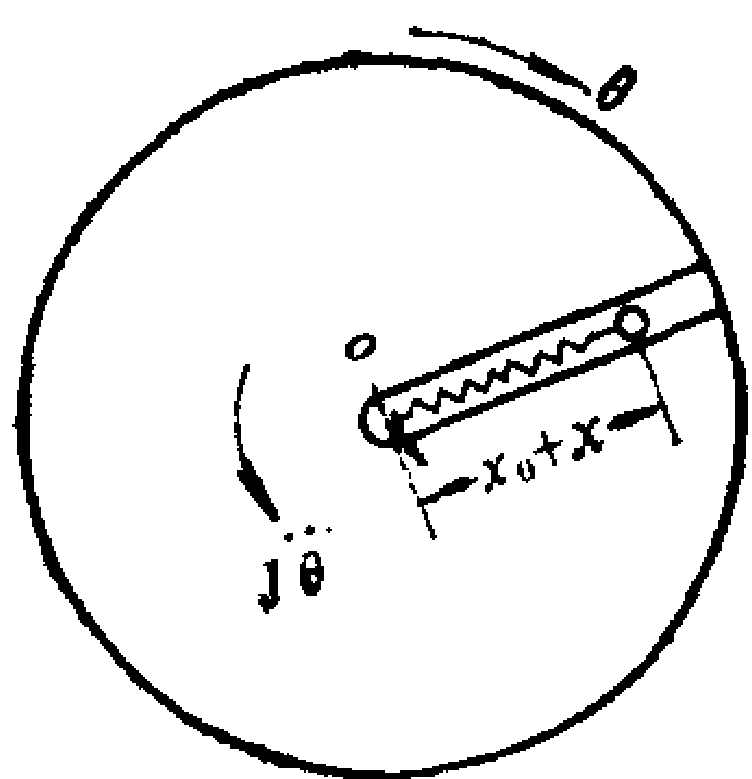
即

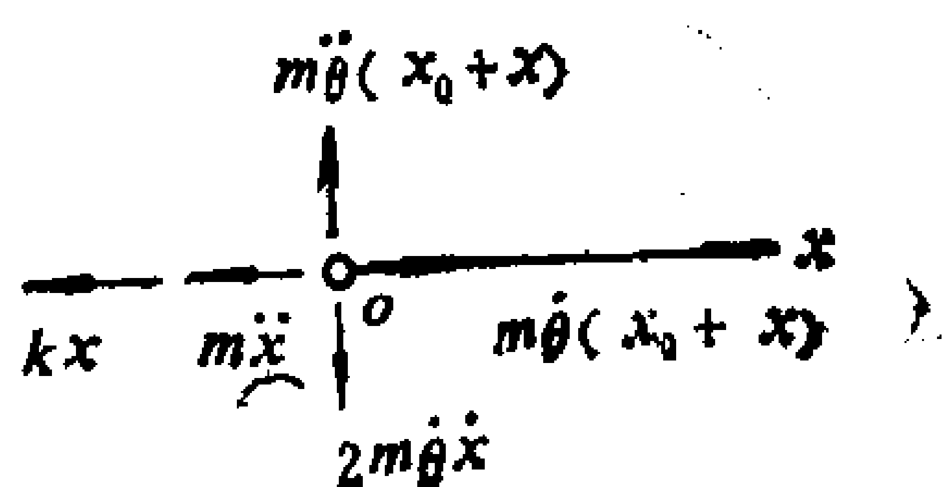
$$m\ddot{x}-m(x_0+x)\dot{\theta}^2+kx=0 \qquad (2)$$

方程(1)可积分为

$$J\dot{\theta}+m(x_0+x)^2\dot{\theta}=\text{const}$$

这表示飞轮一质点系统对o轴的动量矩守恒。



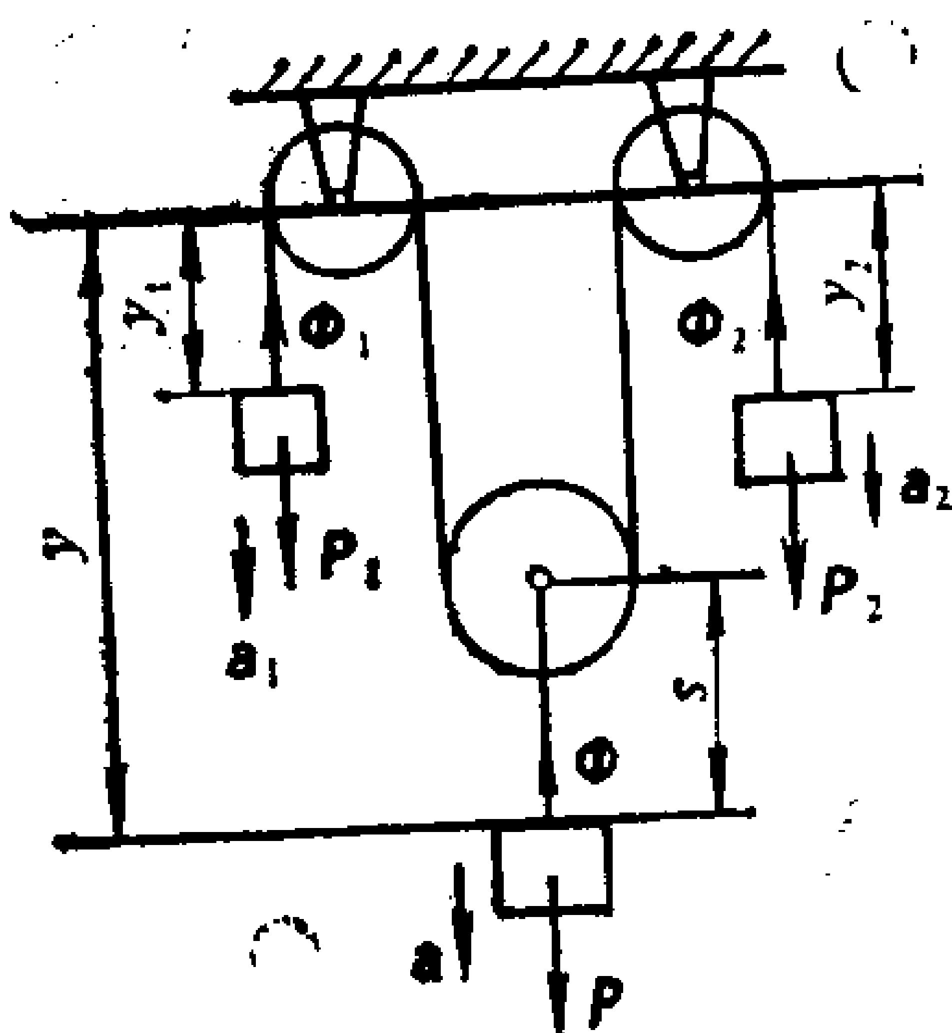


例3-9图

例3-10 如图已知$P_1=20$N，$P_2=30$N，$P=40$N，滑轮与绳重及轴上摩擦均不计。试用动力学普遍方程求三个重

物的加速度。

[解] 取整个系统为研究对象。系统约束条件为



题3-10图

$$y_1+\pi r_A+y_2+\pi r_B+2(y-s)+\pi r_o=L$$

故系统有两个自由度。对上式取变分，并求导得

$$\delta y_1+\delta y_2+2\delta y=0$$

$$\delta y=-\frac{\delta y_1+\delta y_2}{2} \qquad (1)$$

$$\ddot{y}_1+\ddot{y}_2+2\ddot{y}=0$$

$$a=-\frac{a_1+a_2}{2} \qquad (2)$$

三重物假想的惯性力分别为

$$\Phi_1=\frac{P_1}{g}a_1,\quad \Phi_2=\frac{P_2}{g}a_2,\quad \Phi=\frac{P}{g}a$$

根据动力学普遍方程有

$$\left(P_1-\frac{P_1}{g}a_1\right)\delta y_1+\left(P_2-\frac{P_2}{g}a_2\right)\delta y_2$$

$$+\left(P-\frac{P}{g}a\right)\delta y=0 \qquad (3)$$

将(1)、(2)代入(3)，得

$$\left[P_1-\frac{P_1}{g}a_1-\frac{1}{2}\left(p+\frac{P}{g}\,\frac{a_1+a_2}{2}\right)\right]\delta y_1$$

$$+\left[P_2-\frac{P_2}{g}a_2-\frac{1}{2}\left(P+\frac{P}{g}\,\frac{a_1+a_2}{2}\right)\right]\delta y_2=0$$

因为 y_1和y_2是独立的，故得

$$P_1-\frac{P_1}{g}a_1-\frac{1}{2}\left(p+\frac{P}{g}\frac{a_1+a_2}{2}\right)=0 \qquad (4)$$

$$P_2-\frac{P_2}{g}a_2-\frac{1}{2}\left(p+\frac{P}{g}\frac{a_1+a_2}{2}\right)=0 \qquad (5)$$

代入P_1、P_2和P之值，解得

$$a_1=-\frac{1}{11}g, \quad a_2=\frac{3}{11}g \qquad (6)$$

将(6)代入(2)，得

$$a=-\frac{1}{11}g \qquad (7)$$

本题亦可用给出特殊虚位移的方法来求解。先令$\delta y_2=0$，$\delta y_1\neq 0$，则$\delta y=-\frac{1}{2}\delta y_1$，动力学普遍方程给出

$$\left(P_1-\frac{P_1}{g}a_1\right)\delta y_1+\left(P-\frac{P}{g}a\right)\left(-\frac{1}{2}\delta y_1\right)=0 \qquad (8)$$

再令$\delta y_1=0$，$\delta y_2\neq 0$，则$\delta y=-\frac{1}{2}\delta y_2$，动力学普遍方程给出

$$\left(P_2-\frac{P_2}{g}a_2\right)\delta y_1+\left(P-\frac{P}{g}a\right)\left(-\frac{1}{2}\delta y_2\right)=0 \qquad (9)$$

联合(8)、(9)及(2)，便可解出a_1，a_2和a。

例3-11 一物体A重P，当下降时借一无重量且不可伸长的绳使一轮C沿轨道滚而不滑。绳子跨过定滑轮D并绕在半径为R的动滑轮上，动滑轮固定地装在半径为r的C轴上，

两者共重Q，对中心O的惯性半径为 ρ。试用动力学普遍方程求重物A的加速度。

［解］ 取整个系统为研究对象。因为轮C在轨道上纯滚动，故重物A的位移s与轮C的转角φ间有关系

$$s=(R-r)\varphi$$

取变分并求导得

$$\delta s=(R-r)\delta\varphi \tag{1}$$

$$a=(R-r)\varepsilon \tag{2}$$

重物A的惯性力为 $\Phi=\frac{P}{g}a$，轮轴B和C对O的惯性力$\Phi_0=Qr\varepsilon/g$，惯性力偶矩为$Q\rho^2\varepsilon/g$。根据动力学普遍方程，有

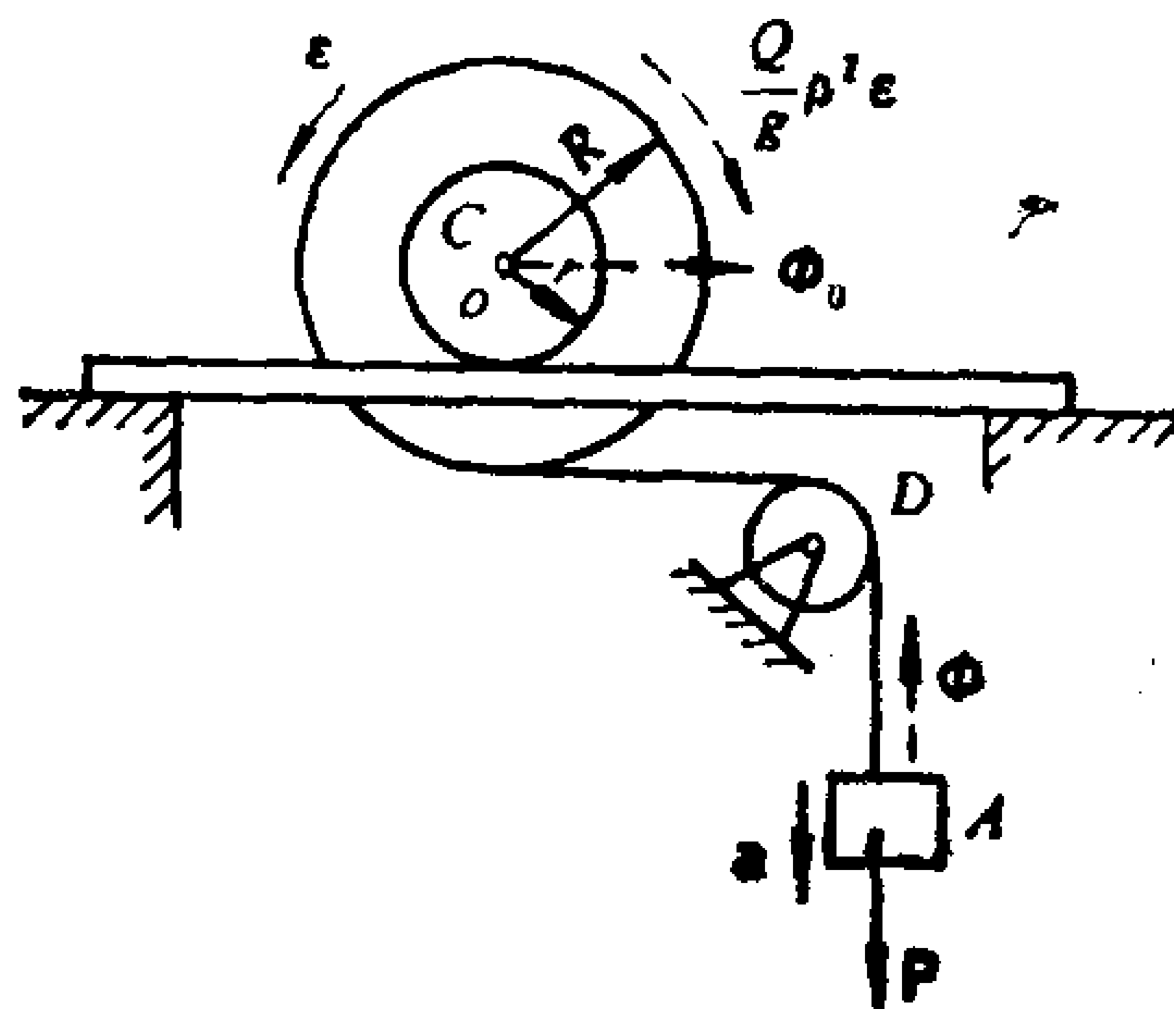
$$\left(P-\frac{P}{g}a\right)\delta s-\frac{Q}{g}(\rho^2+r^2)\varepsilon\delta\varphi=0 \tag{3}$$

将(1)和(2)代入(3)，得

$$\left(P-\frac{P}{g}a\right)(R-r)\delta\varphi-\frac{Q}{g}(\rho^2+r^2)\frac{a}{R-r}\delta\varphi=0$$

由此解得

$$a=\frac{P(R-r)^2}{P(R-r)^2+Q(\rho^2+r^2)}g$$



例3-11图

例3-12 楔块重Q，使重为P的铅垂杆BC运动。如在楔块上有水平力$\boldsymbol{F}$作用，且$\alpha=45°$，不计摩擦，试求杆的加速度。

［解］ 取楔块A和铅垂杆BC为研究对象，有如下的运动学关系

$$\delta s_{BC}=s\delta_A \operatorname{tg}\alpha=\delta s_A \tag{1}$$

$$a_{BC}=a_A \operatorname{tg}\alpha=a_A \tag{2}$$

楔块A的惯性力为$\Phi_1=Qa_A/g$，杆BC的惯性力为$\Phi_2=Pa_{BC}/g$，由动力学普遍方程给出

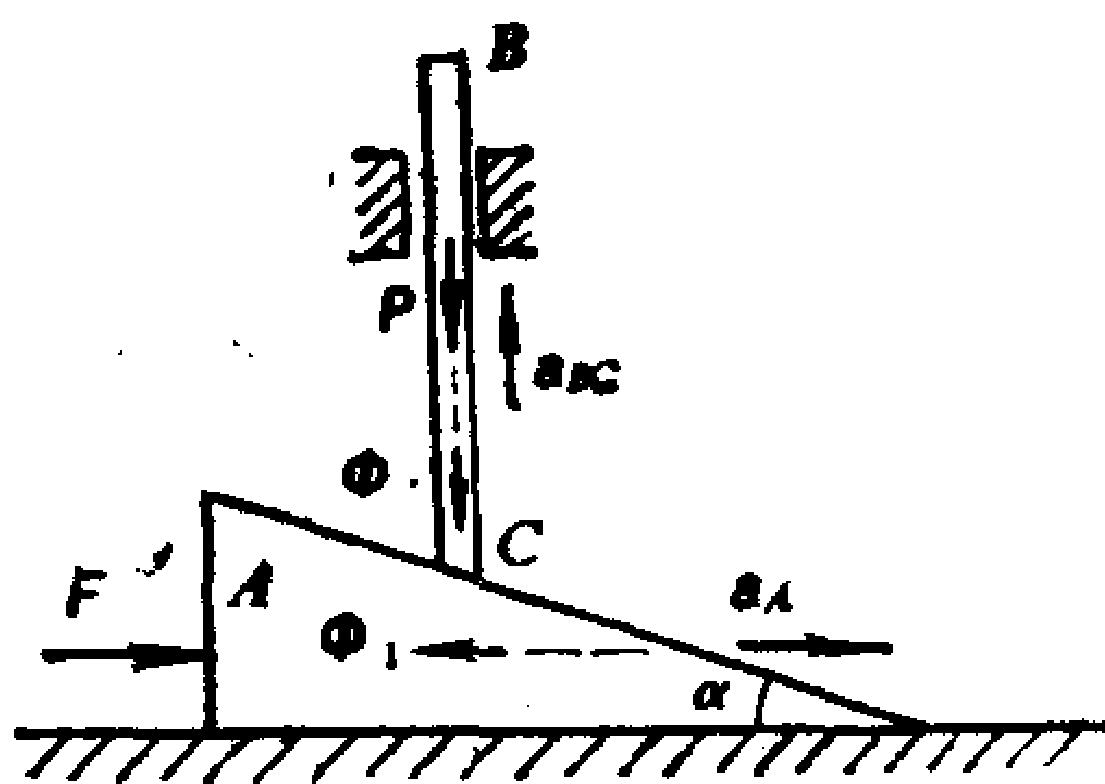
$$\left(F-\frac{Q}{g}a_A\right)\delta s_A-\left(P+\frac{P}{g}a_{BC}\right)\delta s_{BC}=0 \tag{3}$$

将(1)、(2)代入(3)

$$\left(F-\frac{a}{g}a_{BC}\right)\delta s_{BC}-\left(P+\frac{P}{g}a_{BC}\right)\delta s_{BC}=0$$

于是有

$$a_{BC}=\frac{F-P}{P+Q}g$$



例3-12图

三、习 题

3-1 重为 P 的小环在铅垂平面内沿弯成双曲线 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ 形状的光滑金属丝运动。求小环在 $B(0,b)$ 点对金属丝的压力。假定小环在位置 $A(a\sqrt{15},\ 4b)$ 时速度等于零。ox 轴沿水平方向。

答：$N=P\left(1+6\frac{b^2}{a^2}\right)$

3-2 重为 P 的小球以极小的速度由弯成椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1$ 形状的管子内的点 $A(0,\ 2b)$ 开始下落，oy 为铅垂轴。不计摩擦。求在 $B(a,\ b)$ 和 $O(0,\ 0)$ 点球对管子的压力。

答：$N_B=2P\frac{a}{b}$；$N_0=P\left(1+4\frac{b^2}{a^2}\right)$

3-3 重为 P 的小环沿弯成悬链线 $y=a\,\mathrm{ch}(x/a)$ 形状的光滑金属丝从高 $a+h$ 处无初速地开始下滑。求小环运动到最低点时对金属丝的压力。

答：$N=P\left(1+\frac{2h}{a}\right)$

3-4 重为 P 的小球在置于铅垂平面并弯成 $y=a^3x^{-2}/2$ 形状的管子内运动，略去摩擦。求小球运动到点 $B(a,\ a/2)$ 时对管子的压力。假定小球在 $A(a/2,\ 2a)$ 位置时速度等于零。

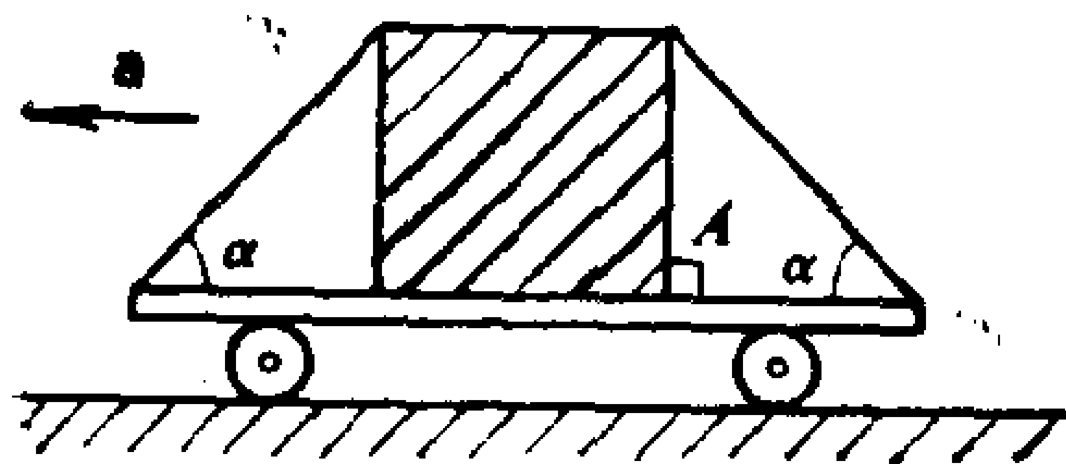
答：$N=\frac{11}{4}\sqrt{2}\,p$

3-5 重为 P 的箱子由四根钢索固定于敞车上，箱紧靠凸台 A。把箱子看作是高为 h 长为 l 的均质平行六面体，求刹车时两条钢索的张力 T。假定减速度为 a，每根钢索与水平面的夹角为 α。

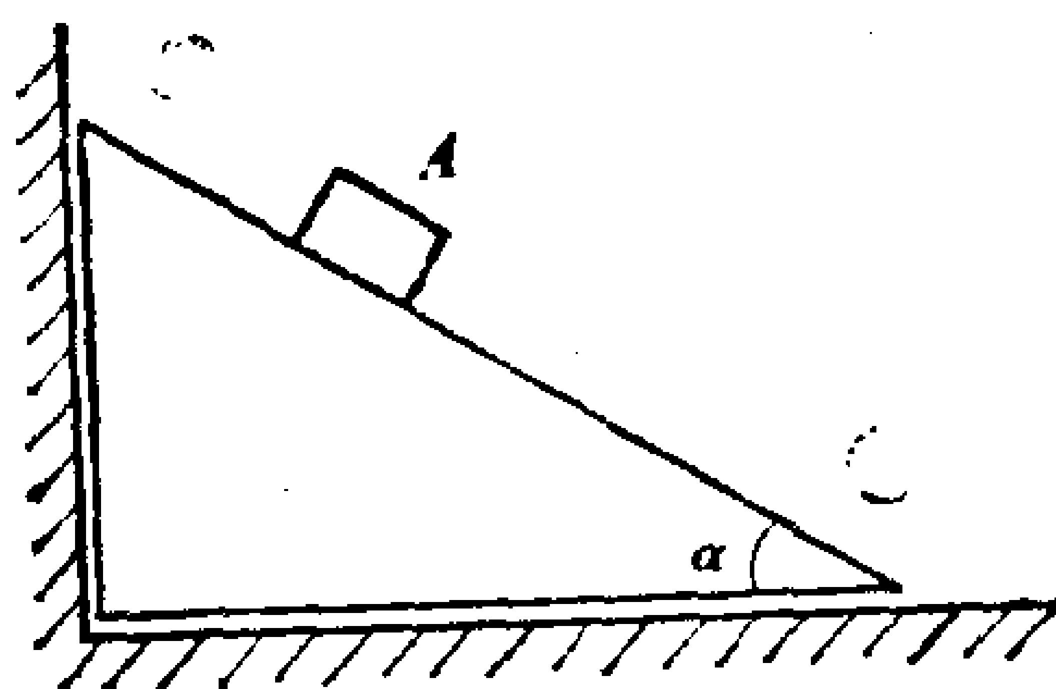
答：$T=\dfrac{P}{g}\ \dfrac{ha-lg}{h\cos\alpha+l\sin\alpha}$

3-6 重为 P 的物块 A 沿置于光滑地板上的楔子的光滑斜面上滑动。求 α 角多大时，楔子对墙压力最大。

答：$\alpha=45°$



题3-5图

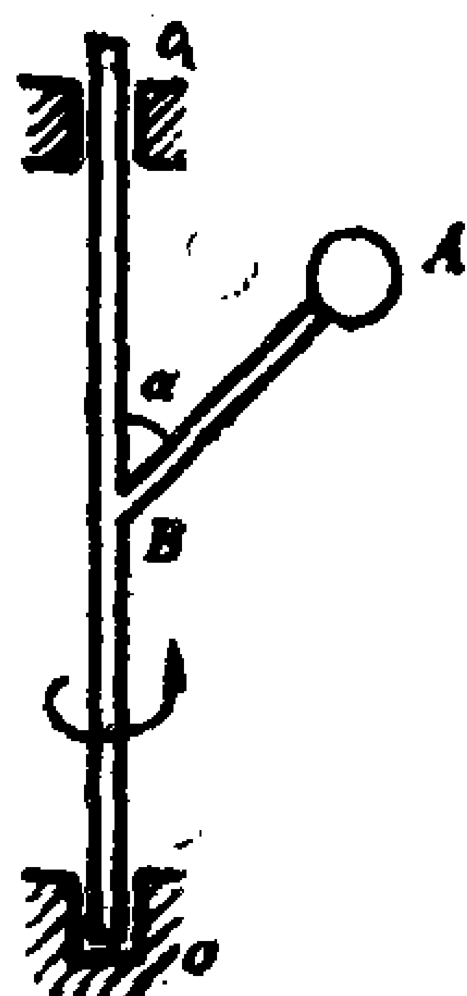


题3-6图

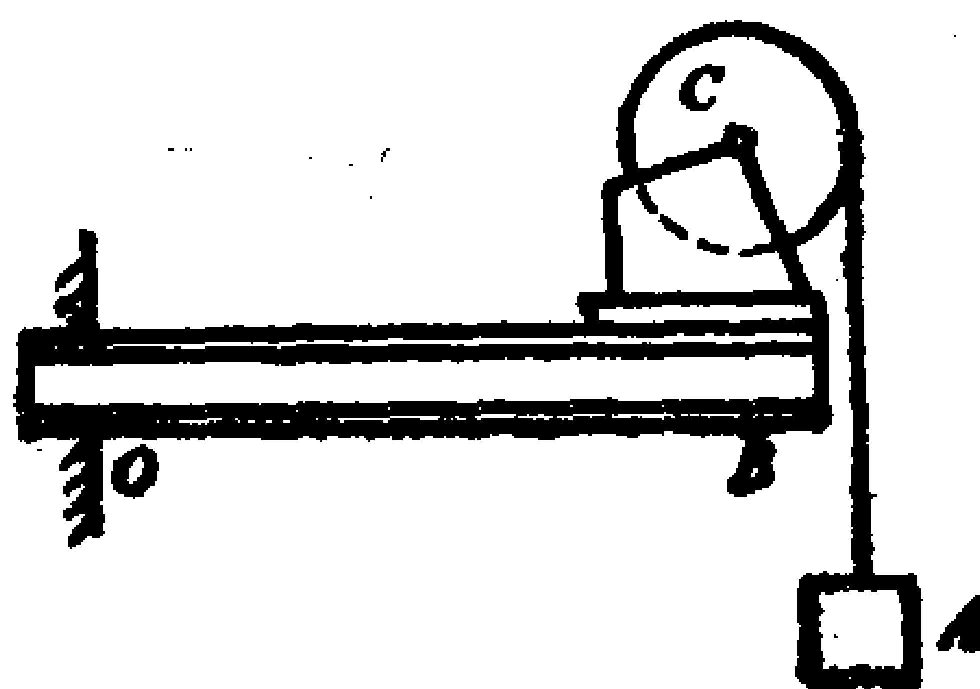
3-7 长10cm的 AB 杆固连于铅垂轴上。杆与铅垂轴的夹角 $\alpha=60°$。重为2N的小球固连于杆的 A 端，杆绕 oo_1 轴匀速转动，转速为300r/s。求杆子的拉力。不计杆重。

答：14.1N

3-8 重量为 P 的物体 A 通过鼓轮 C 下放，鼓轮固定在悬臂梁上并看成重量为 Q 半径为 r 的均质圆柱体。当鼓轮制动时，其角减速度为 ε。求固定端 O 处的附加动反力。



题3-7图



题3-8图

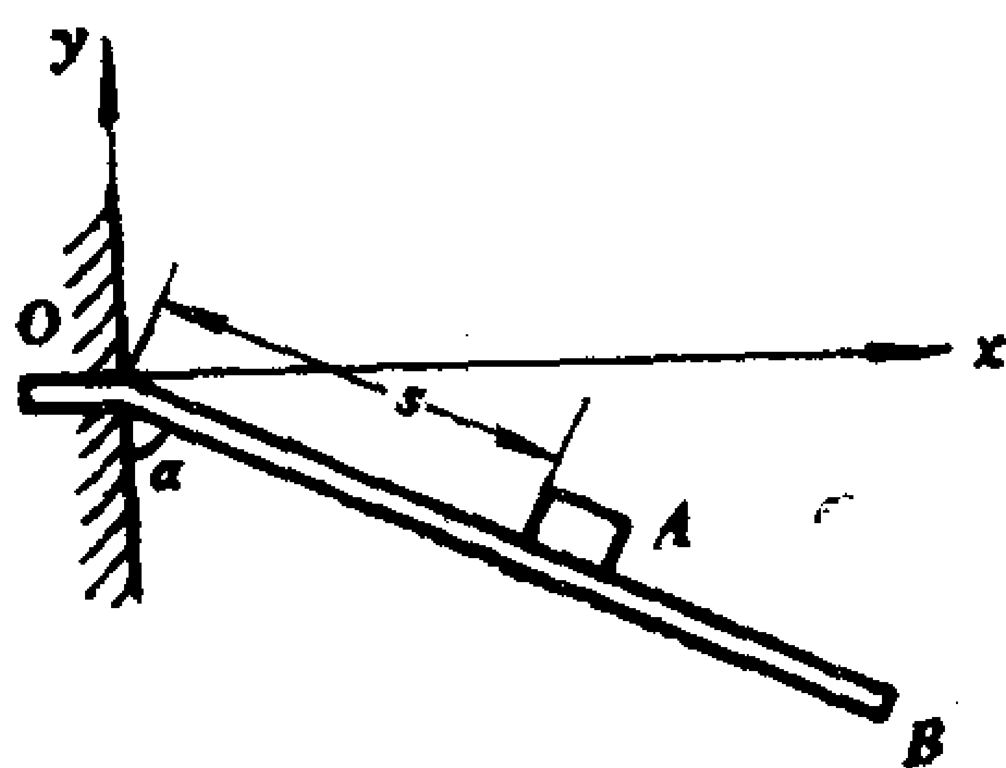
3-9 重为P的物体A沿与铅垂面夹角为α的悬臂梁滑动，不计梁重和摩擦，求用距离$OA=S$表示的固定端O的动反力。

答：$X_0=\frac{1}{2}P\sin 2\alpha$、$Y_0=P\sin^2\alpha$；$M_0=P\sin\alpha$

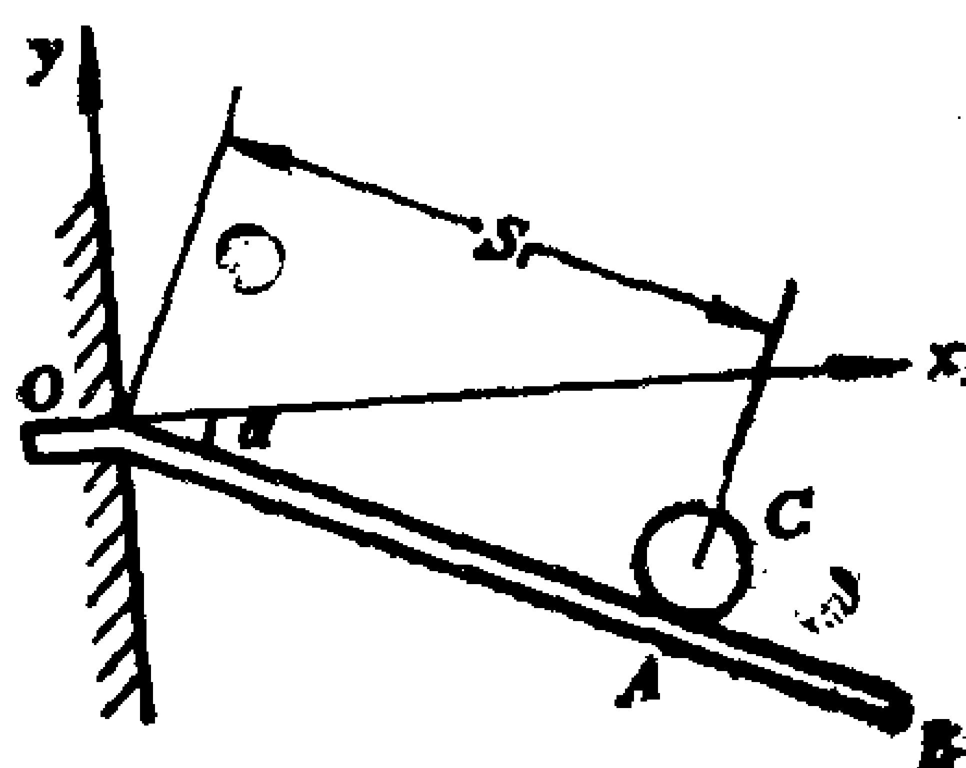
3-10 重为P的均质圆柱沿与水平面夹角为α的悬臂梁作无滑动的滚动，不计梁重，求用距离$OA=S$表示的固定端O的动反力。

答：$X_0=\frac{1}{3}P\sin 2\alpha$；$Y_c=P\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\alpha\right)$；

$$M_0=pS\cos\alpha$$



题3-9



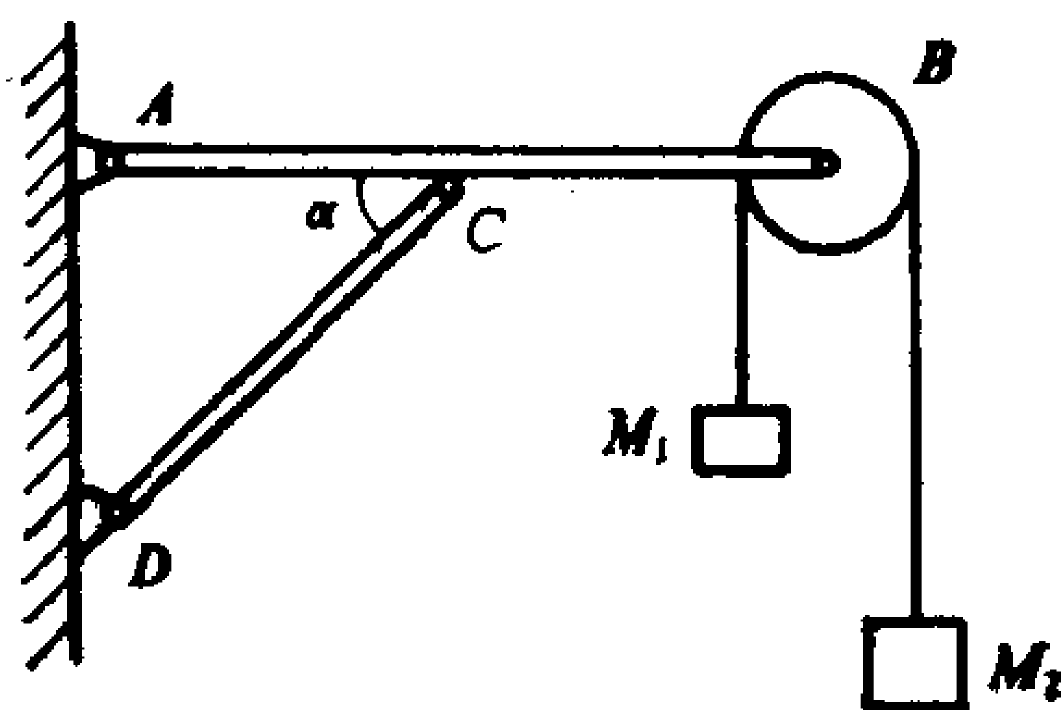
题3-10

3-11 重量分别为P_1和P_2的物体M_1和M_2用跨过理想滑轮的不可伸长的绳子相联结。略去杆的重量，求CD杆所受的力。假定$AC=a$，$AB=b$，$\angle ACD=\alpha$。

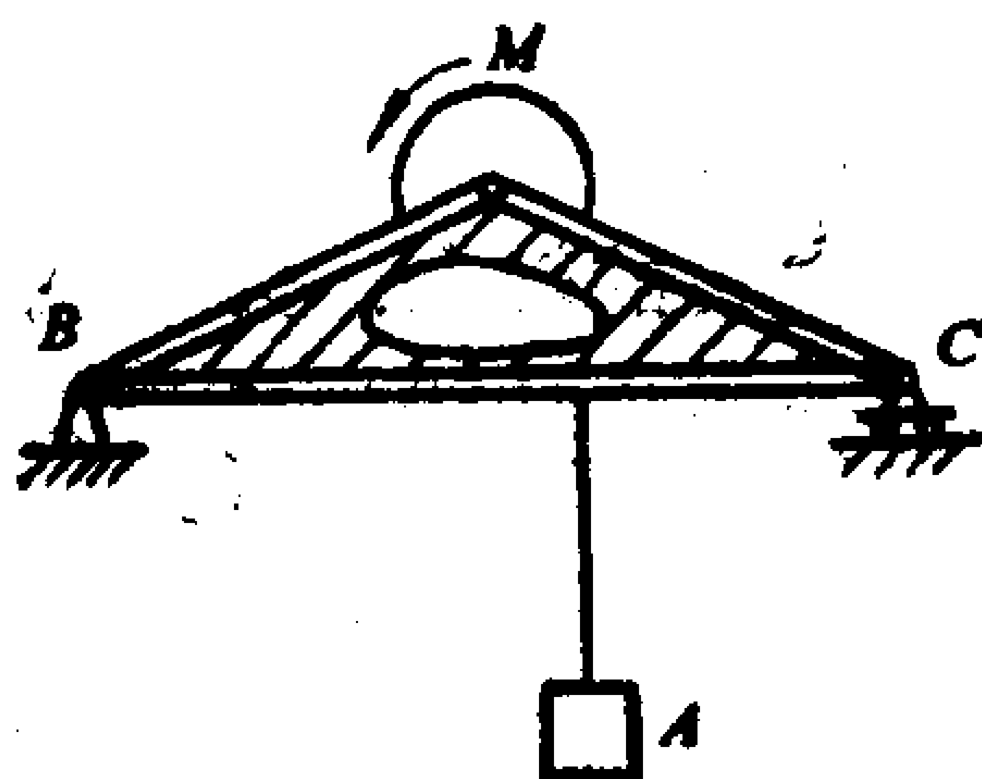
答：$S=-\dfrac{4P_1P_2}{P_1+P_2}\dfrac{b}{a\sin\alpha}$

3-12 为了提升重量为P的物体A，在对称铰车的鼓轮上施加转矩M_0铰车的总重量为P_1，鼓轮的重量为Q，其质量沿半径为r的圆筒面均匀分布。略去绳重及轴上的摩擦，求绳子的拉力及支座B和C上的压力。

答：$T=\dfrac{M+Qr}{(P+Q)r}P$；$N_B=N_C=\dfrac{1}{2}\left[P_1+\dfrac{M+Qr}{(P+Q)r}P\right]$



题3-11图



题3-12图

3-13 质量分别为m_1和m_2的质点M_1和M_2固连于无重杆的两端，杆固结在以匀角速度ω转动的轴上并与轴垂直。求在轴承A和B上的附加动压力。假定$AC=a$，$BC=b$，$M_1C=l_1$，$CM_2=l_2$。

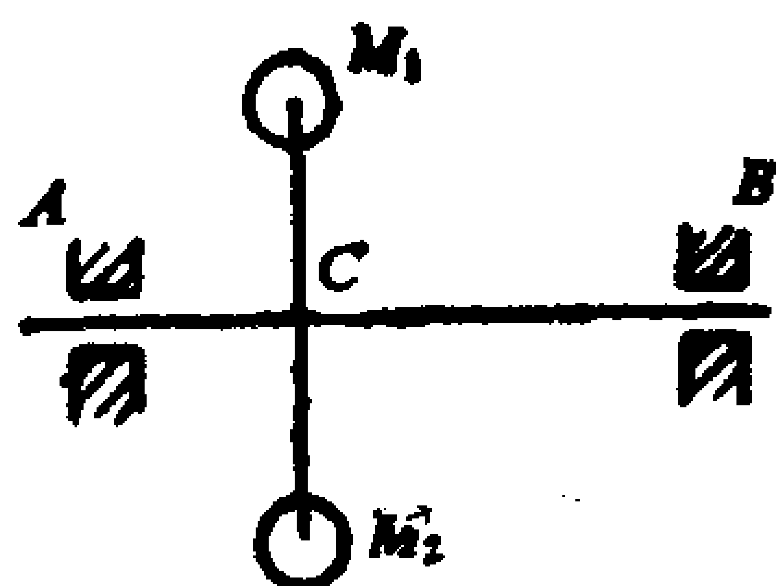
答：$R_A=\dfrac{m_1l_1-m_2l_2}{a+b}\omega^2b$；$R_B=\dfrac{m_1l_1-m_2l_2}{a+b}\omega^2a$

3-14 无重杆AA_1和BB_1固结在以匀角速度ω转动的轴

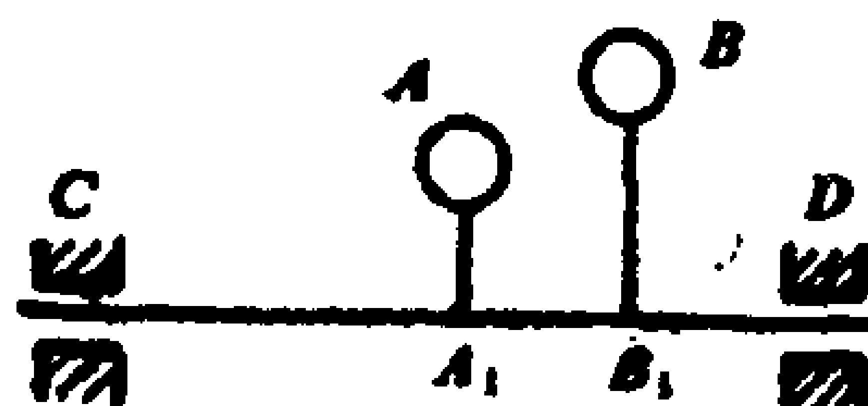
上。在杆的末端分别固连质量为m_1和m_2的物体A和B。求轴承C和D的附加动反力。假定$A_1C=a$，$A_1B_1=c$，$B_1D=b$，$AA_1=l_1$，$BB_1=l_2$。

答：$R_C=\dfrac{m_1l_1(b+c)+m_2l_2b}{a+b+c}\omega^2$

$R_D=\dfrac{m_1l_1a+m_2l_2(a+c)}{a+b+c}\omega^2$



题3-13图

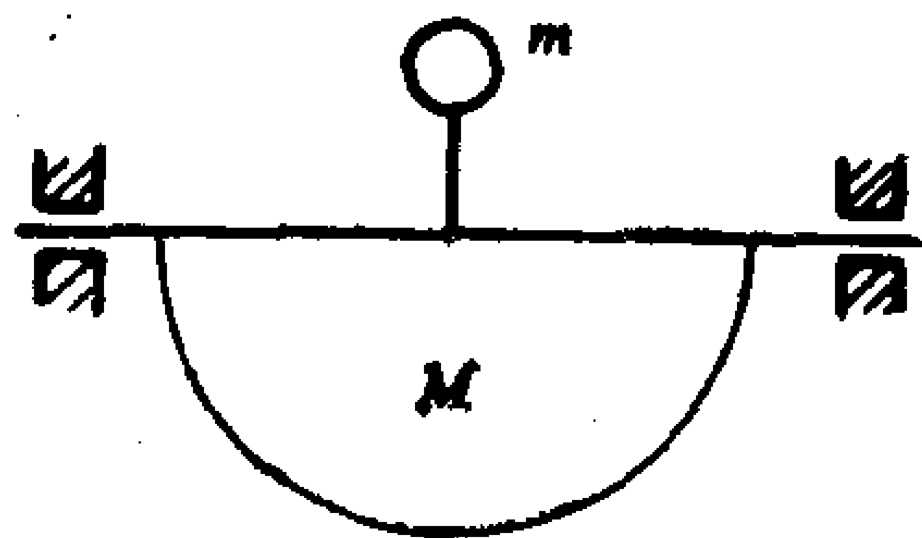


题3-14图

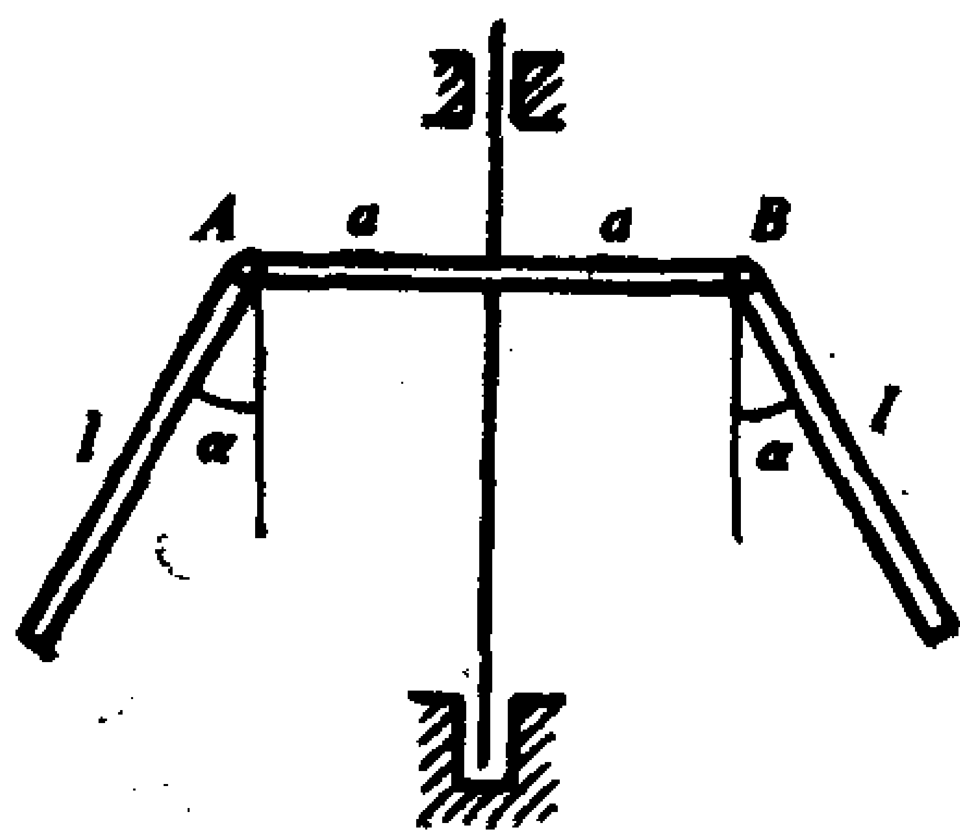
3-15　质量为M高为H的抛物线弓形均质薄板，固定在匀速旋转的轴上。为了消除轴承上的附加动压力，需要在离轴多大距离处附加质量为m的质点？

答：$h=\dfrac{2}{5}H\dfrac{M}{m}$

3-16　长$2a$的杆AB绕与其垂直的铅垂轴以匀角速度ω转



题3-15图



题3-16图

动。两根各长为l的均质杆用球铰链连结在AB杆的两端。求角速度ω与杆相对铅垂线夹角α的关系。

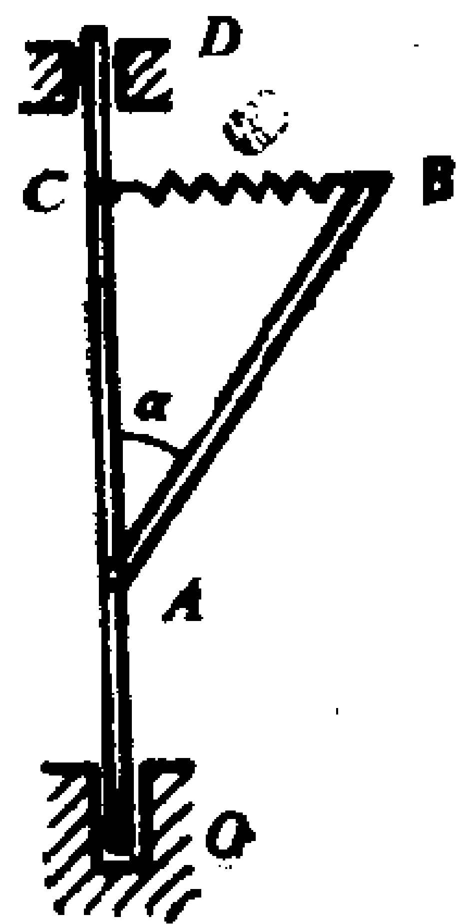
答：$\omega^2=\dfrac{3g\text{tg}\alpha}{3a+2l\sin\alpha}$

3-17　重为P长为l的均质细长杆AB用球铰链A联结在铅垂轴上。杆的B端与弹簧BC相连，弹簧的C端装有光滑无重小环，小环可沿轴滑动，系统以匀角速度ω绕轴转动。求α角与角速度ω的关系。设弹簧刚性系数为c，弹簧原长为$0.5l$。

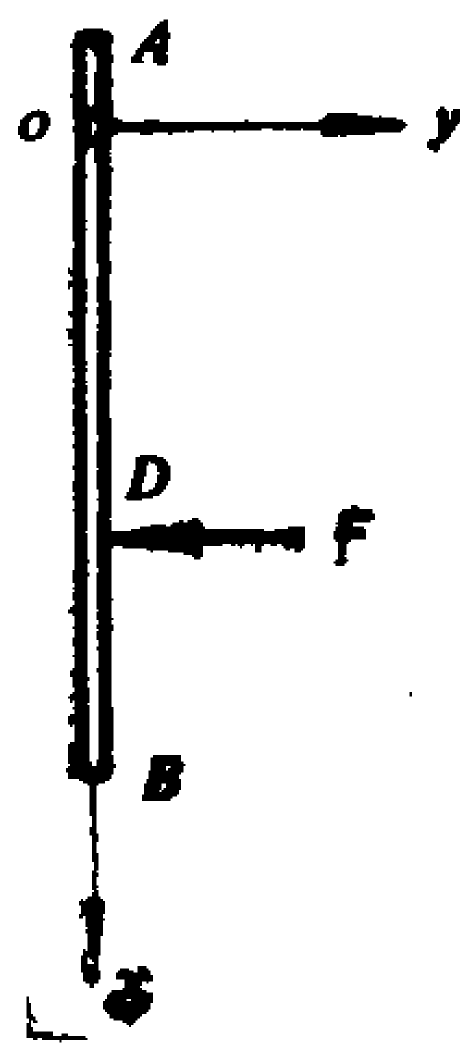
答：$\omega^2=3g\dfrac{cl(2\sin\alpha-1)-P\text{tg}\alpha}{2Pl\sin\alpha}$

3-18　重为P的均质杆AB可在铅垂平面xoy内绕水平轴oz自由旋转。杆处在稳定平衡位置时平行于oy轴的力$\boldsymbol{F}$作用于杆的D点。求运动开始时杆对轴的压力。设$OA=BD=AB/6$。

答：$N_x=P$；$N_y=\dfrac{1}{7}F$



题3-17图



题3-18图

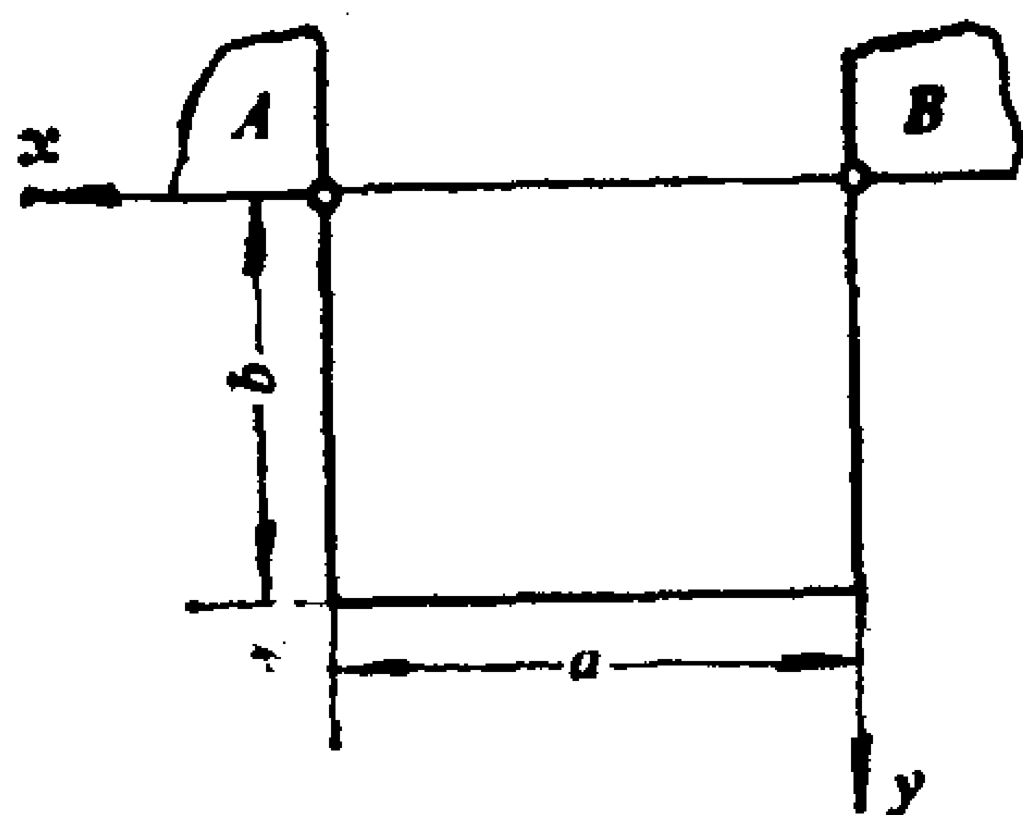
3-19　重为P的均质矩形板处在铅垂平面内并用球铰联

在支座A和B上。$a=2b$，求当移去支座A时板对支座B的压力。

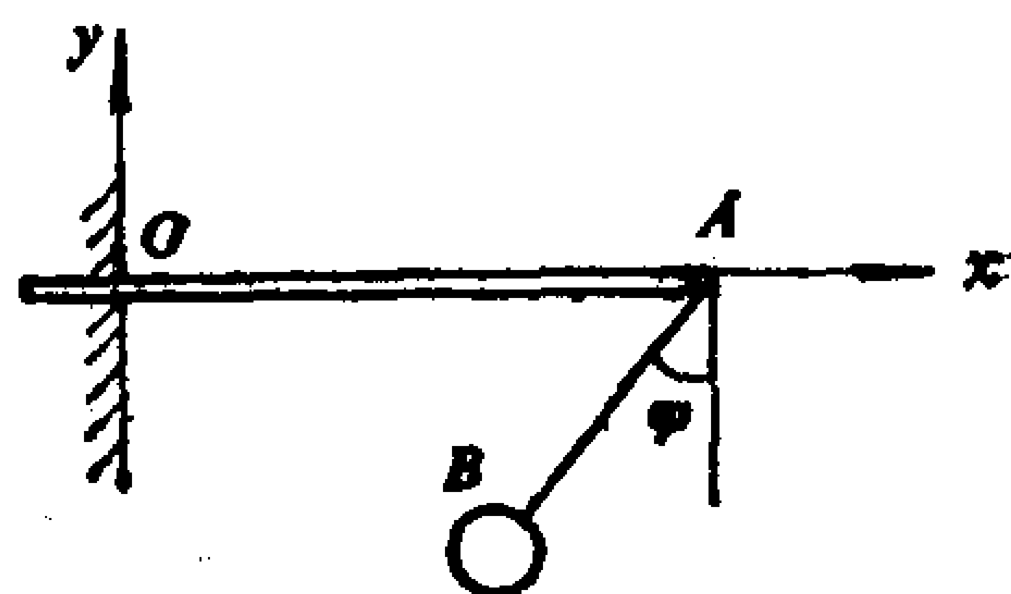
答：$N=0.5P$，与铅垂线夹角$\alpha=\arccos 0.8$

3-20 重为P的数学摆，由偏离平衡位置$\varphi_0=60°$角处无初速地释放。求长为l的无重杆OA固定端处支反力的最大分力。

答：$X_0=0.84P$；$Y_0=2P$；$M_0=2Pl$



题3-19图

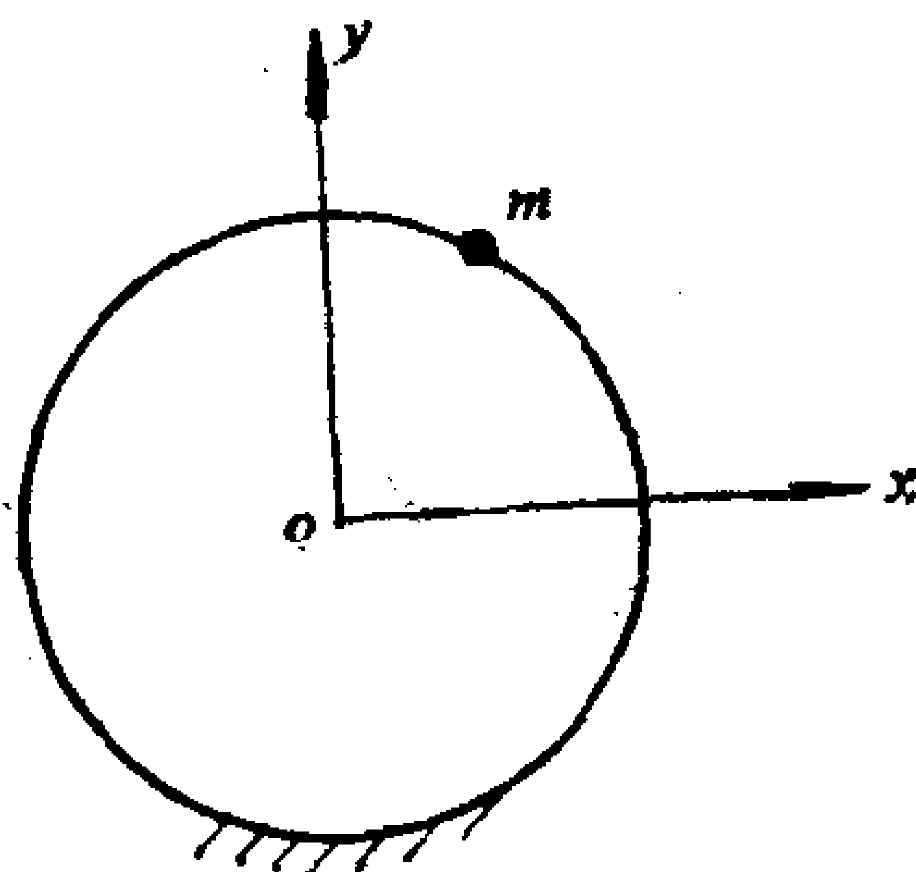


题3-20图

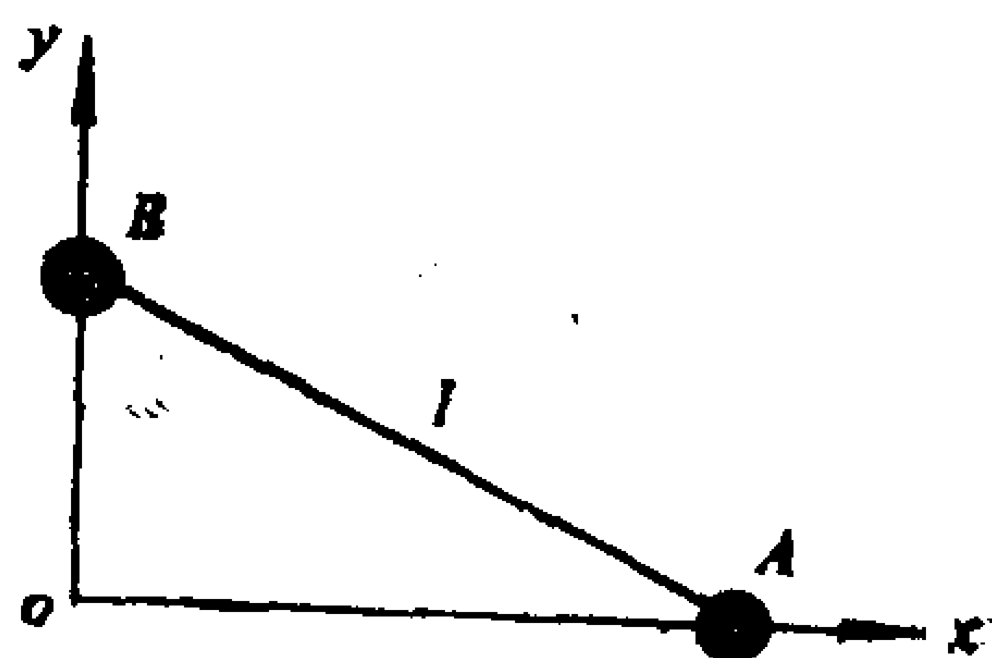
3-21 质量为m的点在半径为r的光滑的固定圆环内滑动，圆环位于铅垂平面内，试用达朗伯原理及约束方程证明质点的运动方程为：

$y\ddot{x}-x\ddot{y}-gx=0$，其中g为重力加速度。

3-22 质量为$2m$的点A和质量为m的点B，用长为l的无



题3-21图



题3-22图

质量杆连在一起，质点A受到约束，只能沿水平的x轴运动，而质点B仅能沿铅直的y轴运动，试利用达朗伯原理证明运动方程为：$2y\ddot{x}-x\ddot{y}-gx=0$，式中$g$为重力加速度。

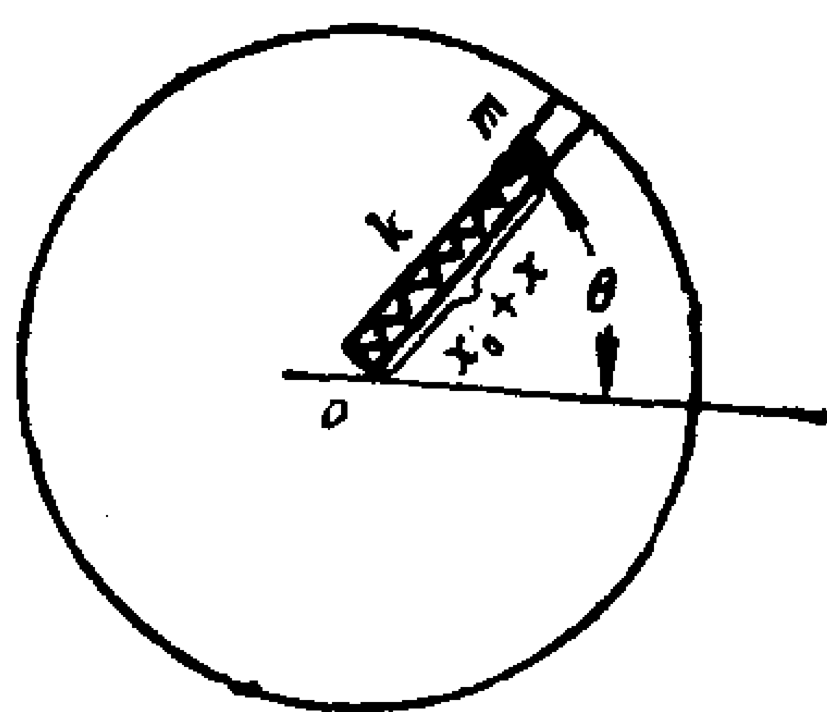
3-23 飞轮的转动惯量为J，能在水平面内绕过o的垂直轴自由地转动。质点m可沿飞轮之径向槽无摩擦的滑动，并用一系于o点的弹簧支承住，弹簧原长为x_0，弹簧常数为k，试利用达朗伯原理求解质点的运动微分方程，表成x、θ的函数；并证明其中有一个方程表示系统的动量矩守矩。

答：$-kx-m\ddot{x}+m(x+x_0)\dot{\theta}^2=0$

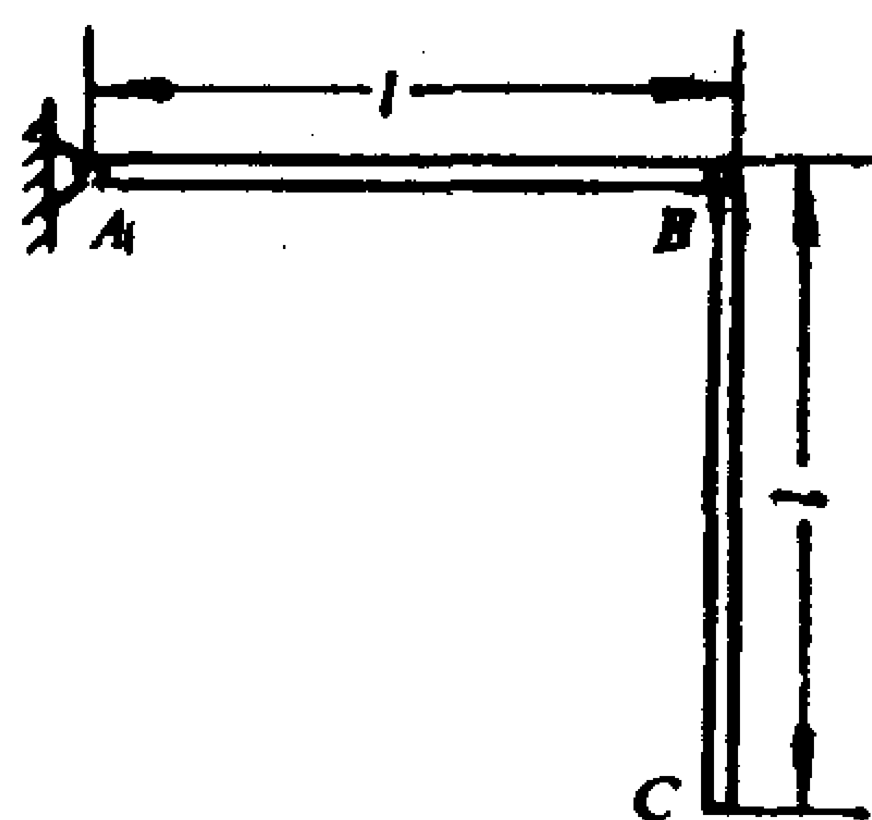
$2m(x+x_0)\dot{x}\dot{\theta}+m(x+x_0)^2\times\ddot{\theta}+J\ddot{\theta}=0$

3-24 两均质杆各重P，在图示位置从静止开始释放，求此瞬时A处的反力，已知系统在铅垂面内。

答：$X_A=0$，$Y_A=\frac{5}{16}P$



题3-23图



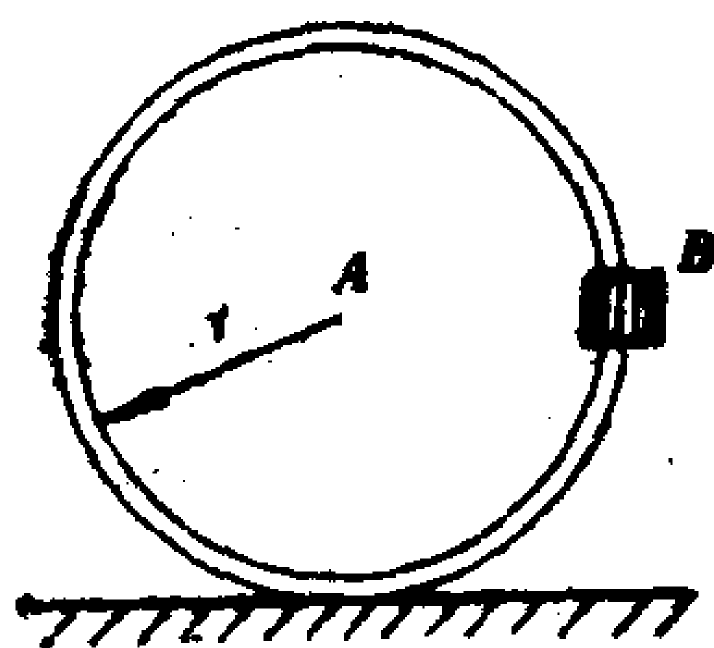
题3-24图

3-25 质量为m的小物块固结在环的B点，环的质量也为m，半径为r，系统从静止开始运动，开始时只滚不滑，且AB为水平。求环的角加速度和B点的加速度。

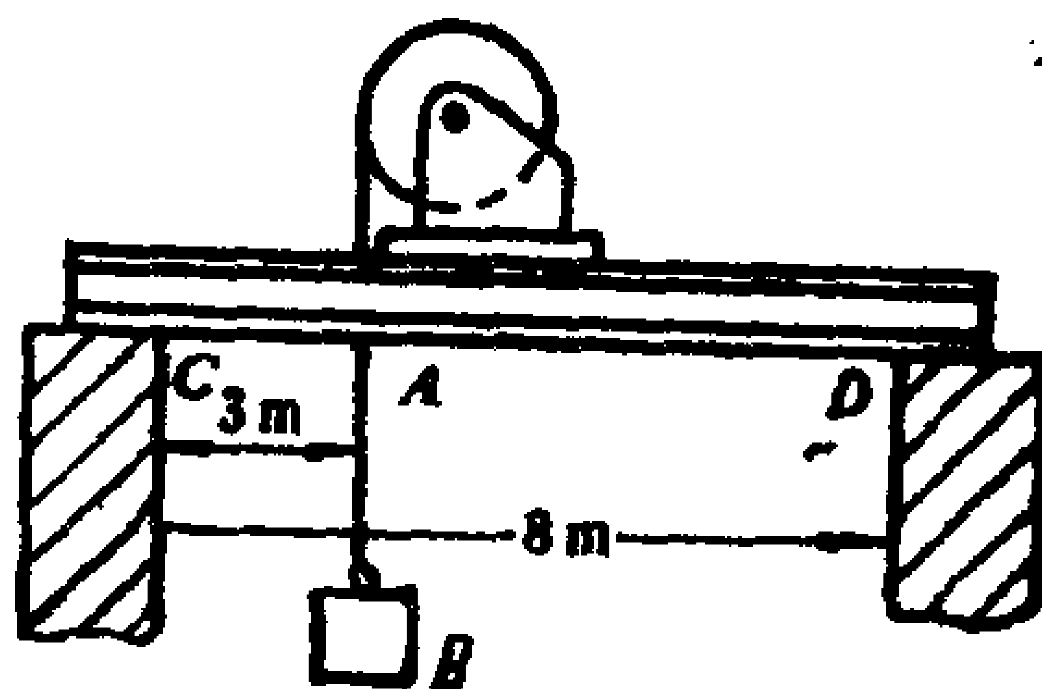
答：$\varepsilon=\frac{g}{4r}$，$a_B=\frac{\sqrt{2}}{4}g$

3-26 铰车按装在梁上，梁的两端搁在两支座C与D上；$CD=8\text{m}$，$AC=3\text{m}$。铰车起重为20kN的重物B，此重物以0.5m/s^2的等加速度上升，试求支座C与D上由于惯性力而引起的附加压力。

答：637N：383N



题3-25图



题3-26图

3-27 汽车的重量为P，以加速度w作直线运动。如汽车重心c距地面之高度为h，求其前后轮的铅垂压力。汽车之前后大轴到通过重心之垂线的距离分别等于a与b。

问汽车该怎样行驶，方能使前后轮的压力相等？

答：$N_1=\dfrac{P(gb-wh)}{g(a+b)}$；$N_2=\dfrac{P(ga+wb)}{g(a+b)}$

当汽车以减速$w=g\dfrac{a-b}{2h}$制动时。

3-28 一复滑车如图所示。问当重为Q的重物用此滑车来提升时，重为P的另一重物以多大的加速度w下降？又问在何种条件下重物P作等速运动？滑车与绳的质量均不计。

重物Q的加速度是重物P的加速度的1/4。

答：$w=4g\dfrac{4P-Q}{16P+Q}$；$\dfrac{P}{Q}=\dfrac{1}{4}$

3-29 重为P、顶角为2α的光滑尖劈将静止在光滑水平桌面上的两木块向外推开，每一木块的重量为P_1。写出尖劈与木块的运动方程式，并求出尖劈对每一木块的压力。

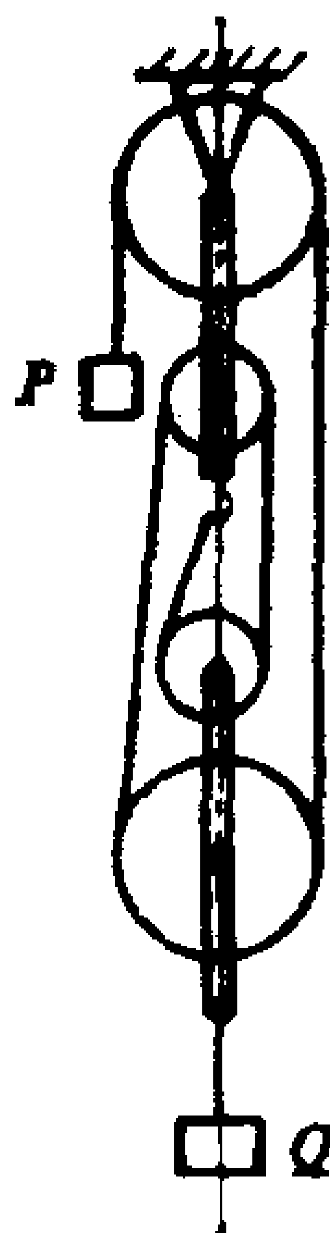
答：尖劈运动方程式为

$$s=\frac{wt^2}{2}，其中\ w=g\frac{P\text{ctg}\alpha}{P\text{ctg}\alpha+2P_1\text{tg}\alpha}；$$

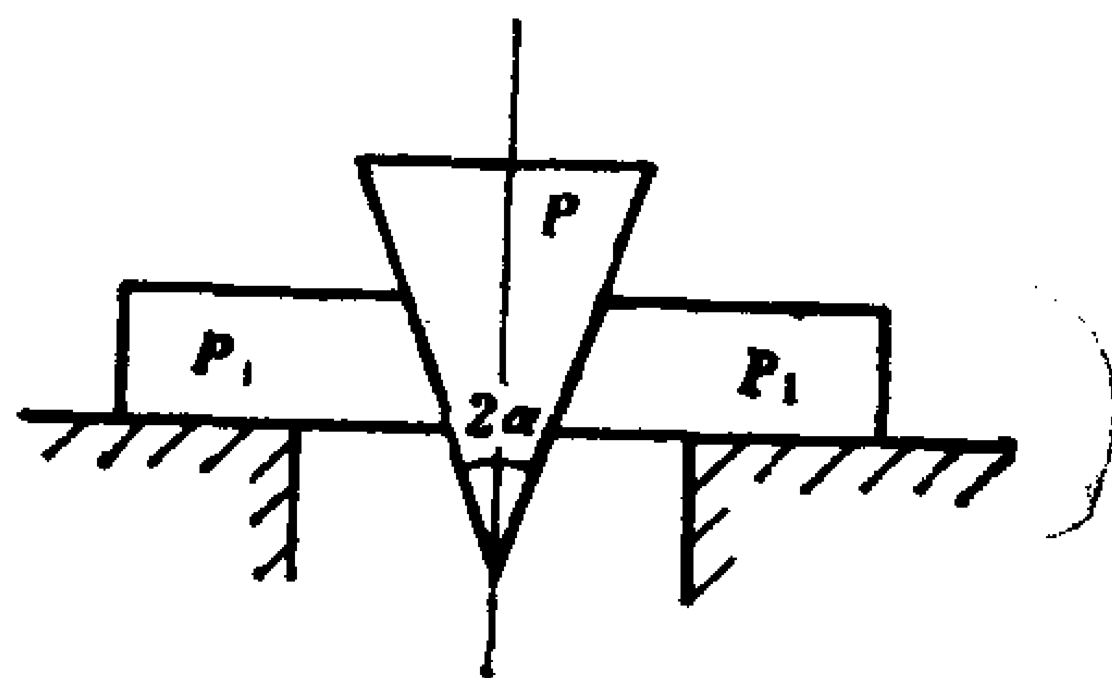
木块的运动方程式为

$$S_1=\frac{w_1t^2}{2}，其中w_1=g\frac{P}{P\text{ctg}\alpha+2P_1\text{tg}\alpha}；$$

压力 $$N=\frac{PP_1}{(P\text{ctg}\alpha+2P_1\text{tg}\alpha)\cos\alpha}$$



题3-28图



题3-29图

3-30 半径为20cm的均质圆盘按规律$\varphi=3t^2$绕轴转动，此轴垂直于盘面而通过圆盘中心，如圆盘的切向惯性力的主矩等于40N·cm，求圆盘的重量。

答：33N

3-31 长为l，重为P的物质直杆以等角速度绕固定轴O（球铰链）转动，转出一个以OA为轴而顶点在O的圆锥面。试计算杆离铅垂方向的偏角，以及杆子在铰链O上的压力N。

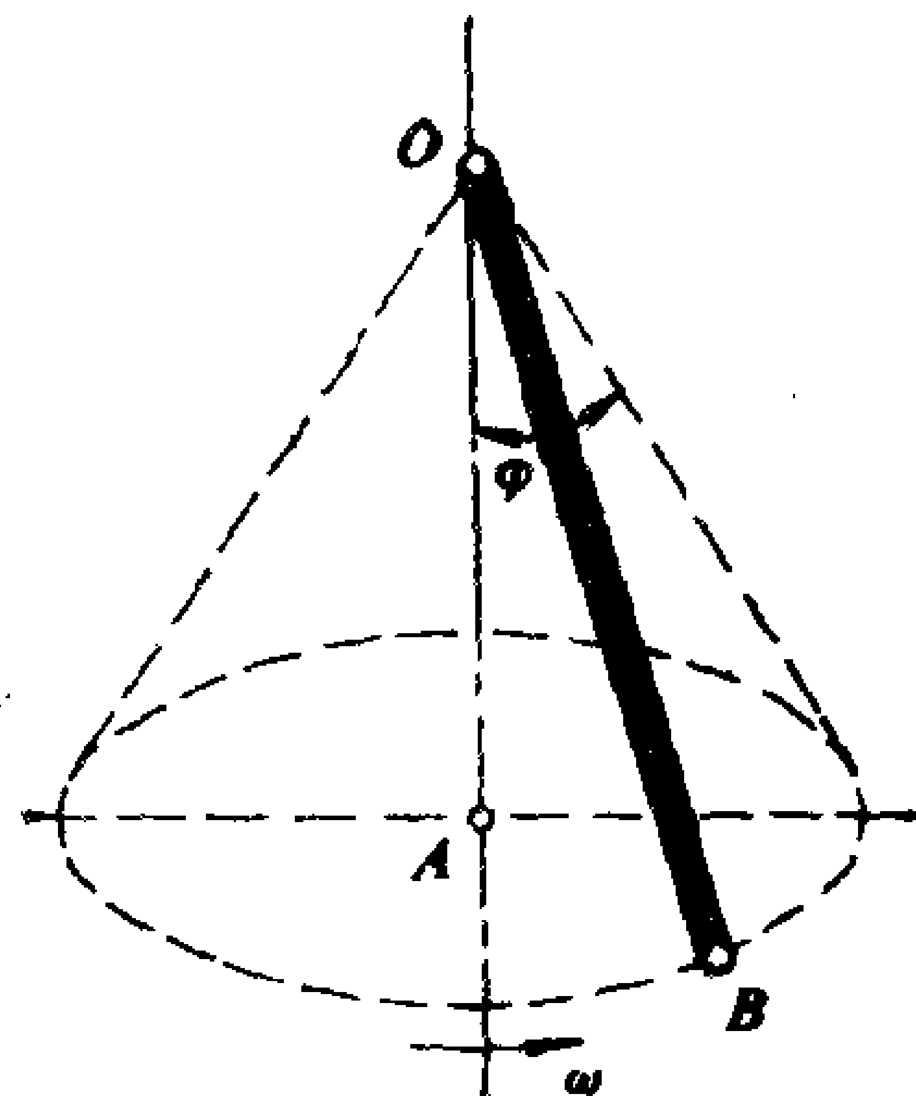
答：$\varphi = \arccos \frac{3g}{2l\omega^2}$；

$$N = \frac{1}{2}\frac{P}{g}l\omega^2\sqrt{1+\frac{7g^2}{4l^2\omega^2}}$$

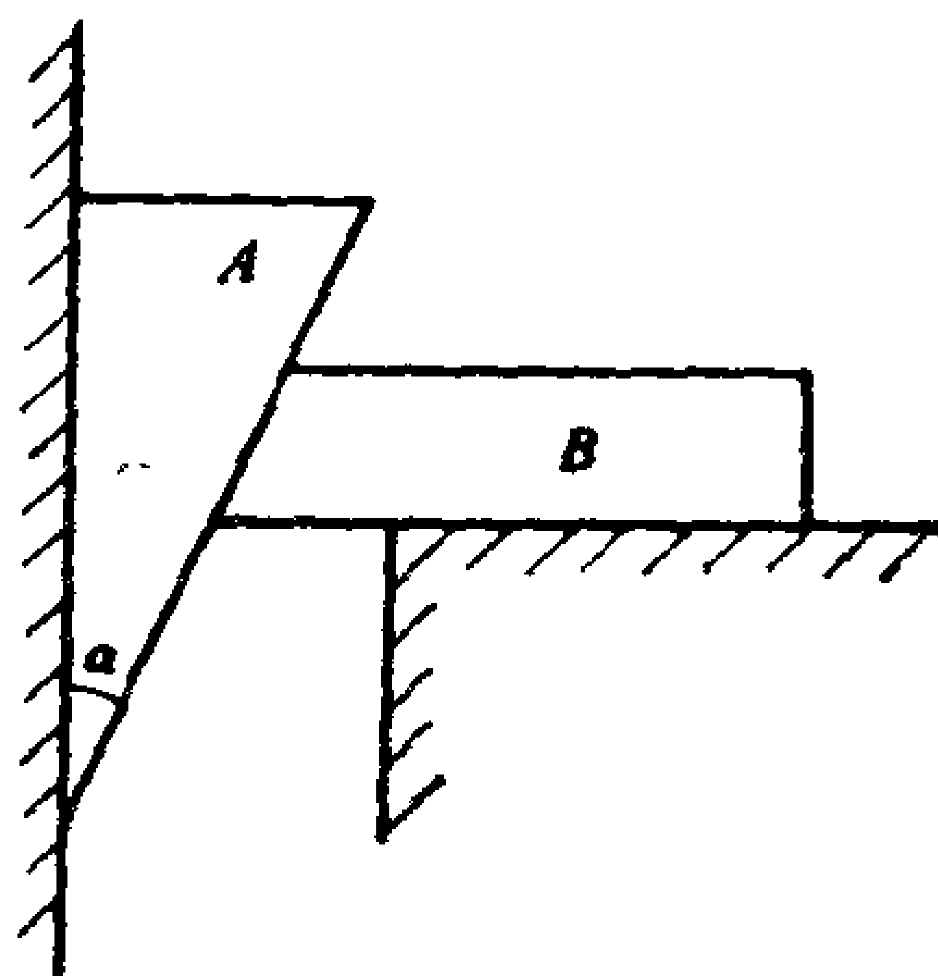
3-32 尖劈A重P，角为α，此尖劈一面靠在光滑墙上，另一面靠在重为Q的光滑棱柱B。B可沿固定水平面作无摩擦的滑动。求尖劈及棱柱的加速度w及w_1，又求尖劈对棱柱施加的压力N。

答：$w = \frac{P}{P+Q\text{tg}^2\alpha}g$；$w_1 = \frac{P\text{tg}\alpha}{P+Q\text{tg}^2\alpha}g$

$$N = \frac{PQ\sin\alpha}{P\cos^2\alpha + Q\sin^2\alpha}$$



题3-31图



题3-32图

3-33 直角尖劈重P，其角为α，放在光滑水平面上，另一重Q的物体沿尖劈无摩擦地滑动。求此系统的运动，又求

水平面上的压力及物体对尖劈的压力。

答：尖劈的加速度 $w=\dfrac{Q\sin 2\alpha}{2(P+Q\sin^2\alpha)}g$

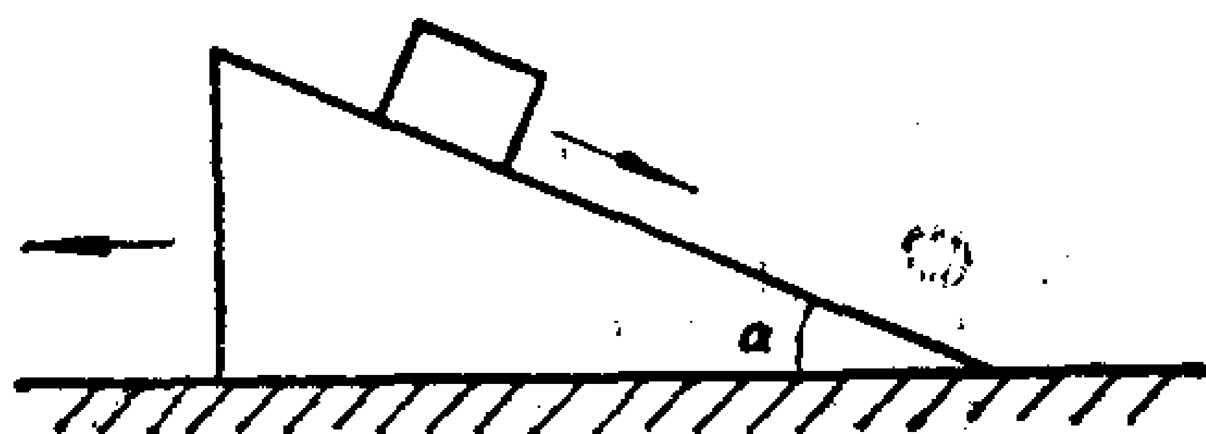
物体相对尖劈加速度 $w_1=\dfrac{(P+Q)\sin\alpha}{P+Q\sin^2\alpha}g$

水平面上压力 $N=\dfrac{P(P+Q)}{P+Q\sin^2\alpha}$

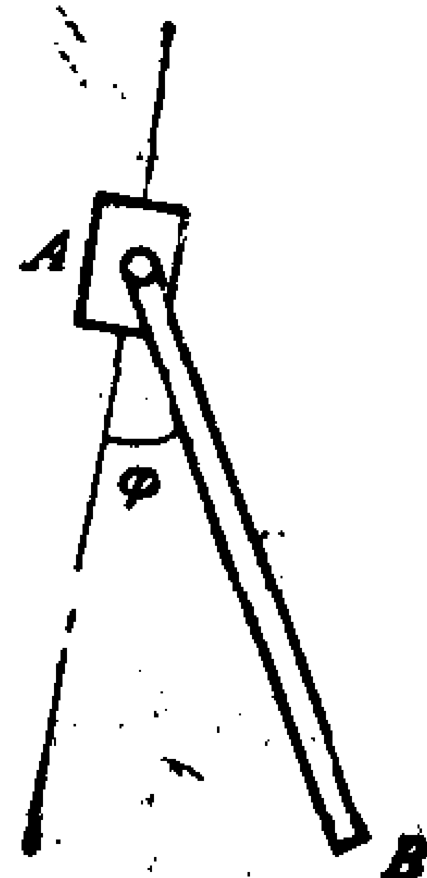
物体对尖劈的压力 $N_1=\dfrac{PQ\cos\alpha}{P+Q\sin^2\alpha}$

3-34 长为$2a$之均质杆AB可绕滑块A转动，滑块A则沿固定铅垂线向下滑动，其加速度 $w<g$，开始时杆与铅垂线夹角$\varphi=\varphi_0$，如φ_0甚小，求杆在铅垂位置附近作微小振动的周期。

答：$\ddot{\varphi}+\dfrac{3(g-w)}{4a}\varphi=0$；$T=2\pi\sqrt{\dfrac{4a}{3(g-w)}}$



题3-33图



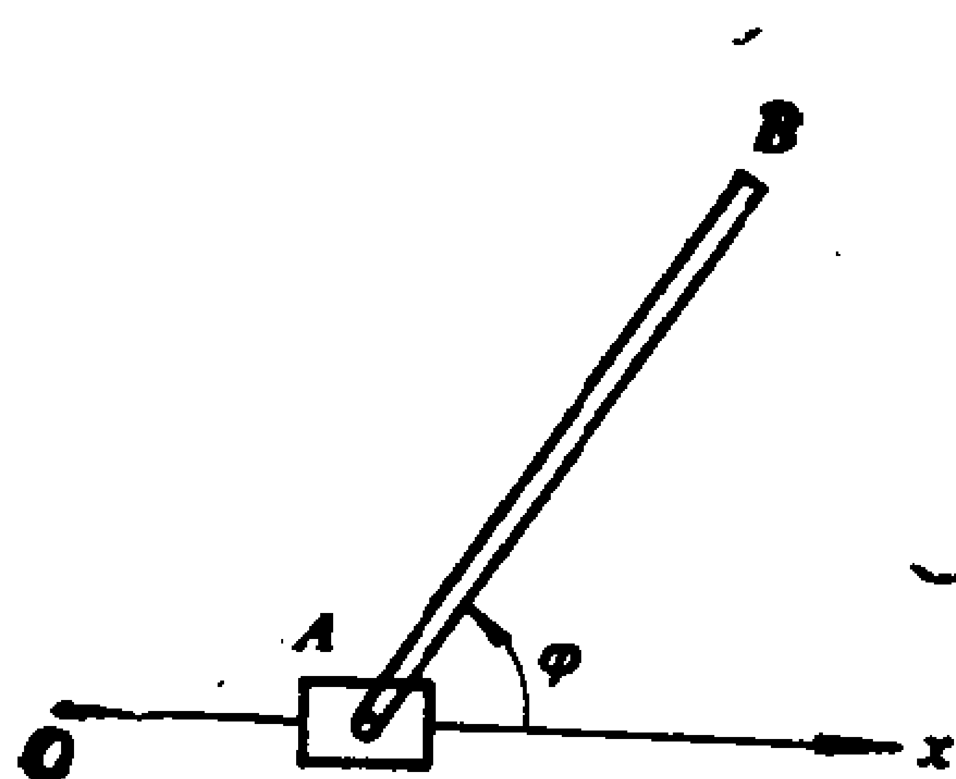
题3-34图

3-35 AB杆重P长$2a$，A端有滑块。今用绳拉此滑块使其沿水平直线 ox 运动。如欲使杆绕A以等角速ω顺时针方向转动，滑块A应有何速度？如开始时$\varphi=\varphi_0$，试以 φ 之函数表示此速度v。

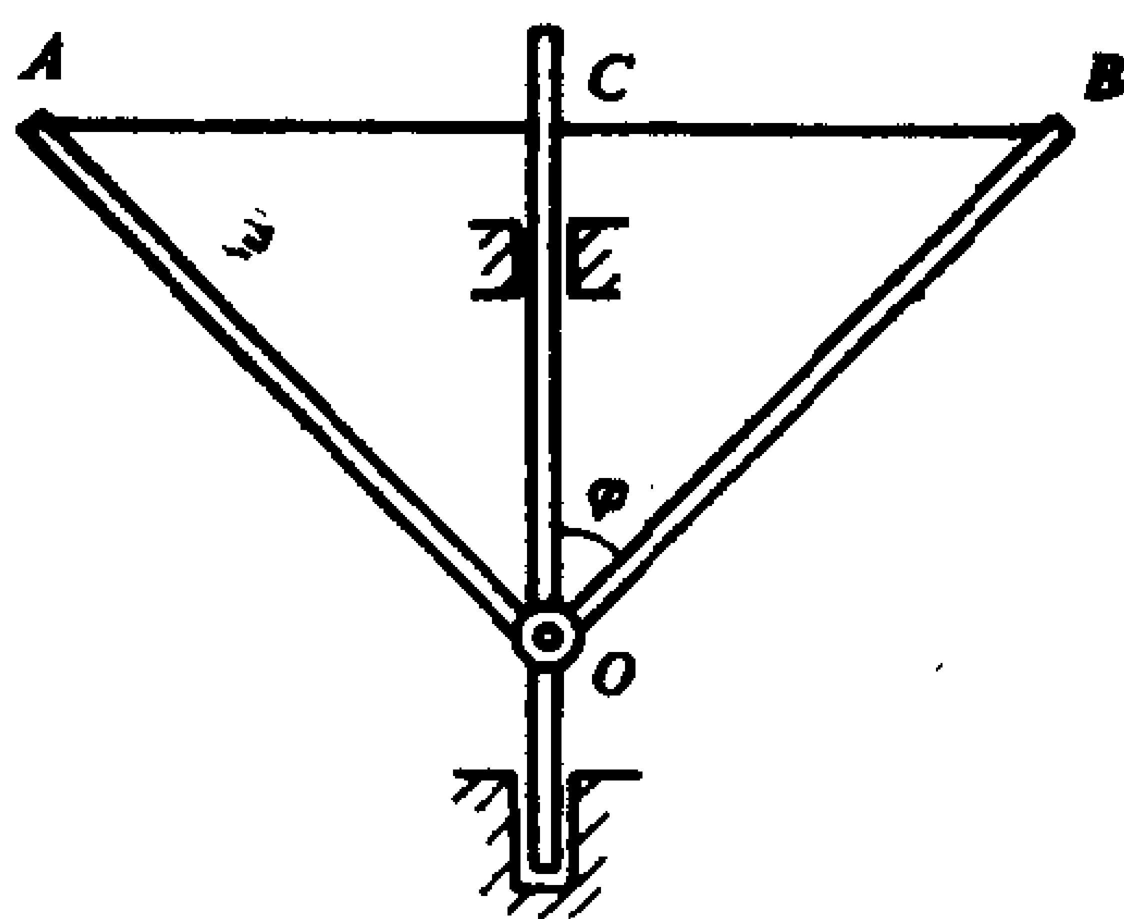
答：$u=\frac{g}{\omega}\ \ln\frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi}$

3-36 两均质杆OA与OB各重P，用铰链O连在垂直杆OC上，其A与B端又用不可伸长之绳(水平)连在杆之C点，三角形AOB开始以等角速度ω绕OC轴转动，如$OA=OB=a$，$AC=CB=l$，求绳之张力T。

答：$T=\frac{Pl}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2-l^2}}+\frac{2\omega^2}{3g}\right]$



题3-35图



题3-36图

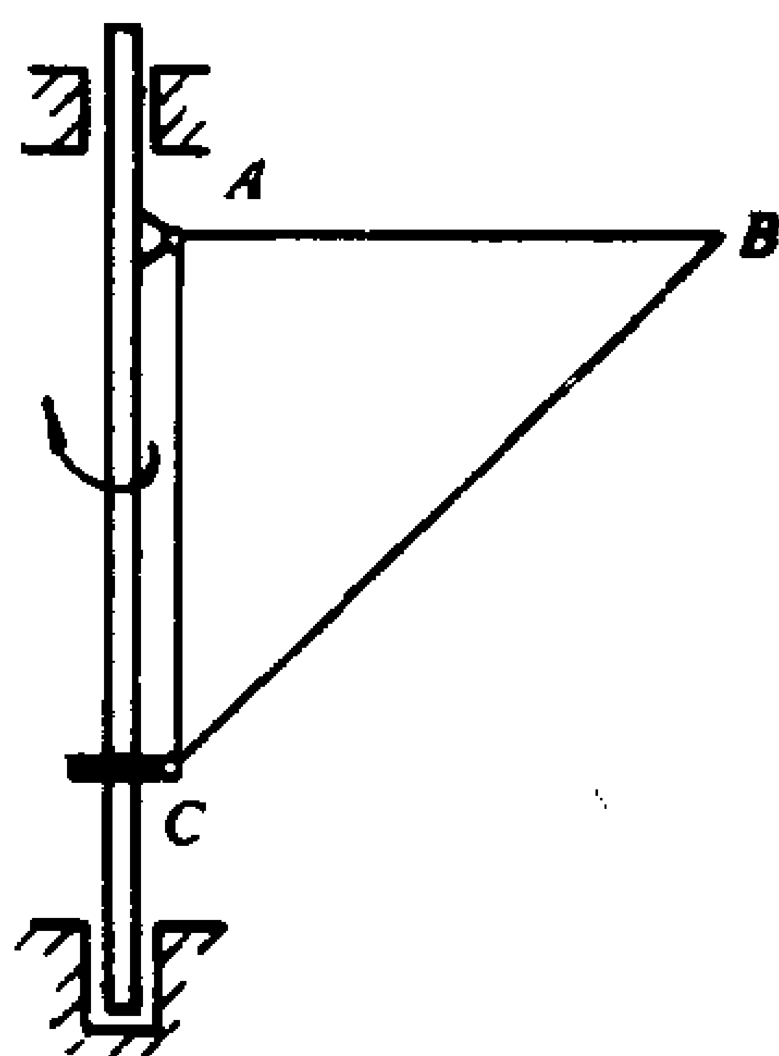
3-37 均匀直角等腰三角形ABC重P，其顶点A铰接于一固定铅垂轴上，顶点C连着一环套在此轴上，此三角形由于惯性以角速度ω绕此轴转动，如欲使C点的反作用力等于零，角速度ω之值应为多少？并求此时A点的反作用力。

答：$\omega=2\sqrt{\frac{g}{l}}$；　$R_A=\frac{5}{3}P$

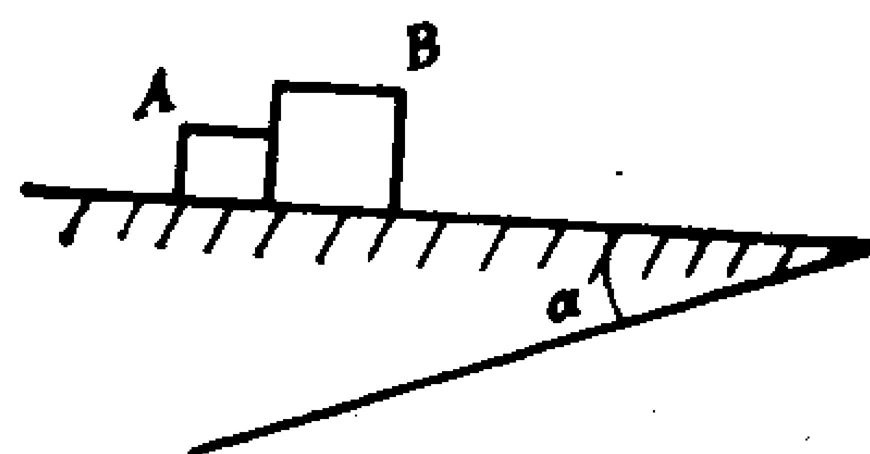
3-38 物块A和B沿倾角$\alpha=30^\circ$的斜面滑下。设物块的重量分别为$P_A=100\text{N}$和$P_B=200\text{N}$，物块与斜面间的动摩擦系数分别为$f'_A=0.15$和$f'_B=0.30$。求物块运动时相互之间的

压力。

答：$F=8.7\text{N}$



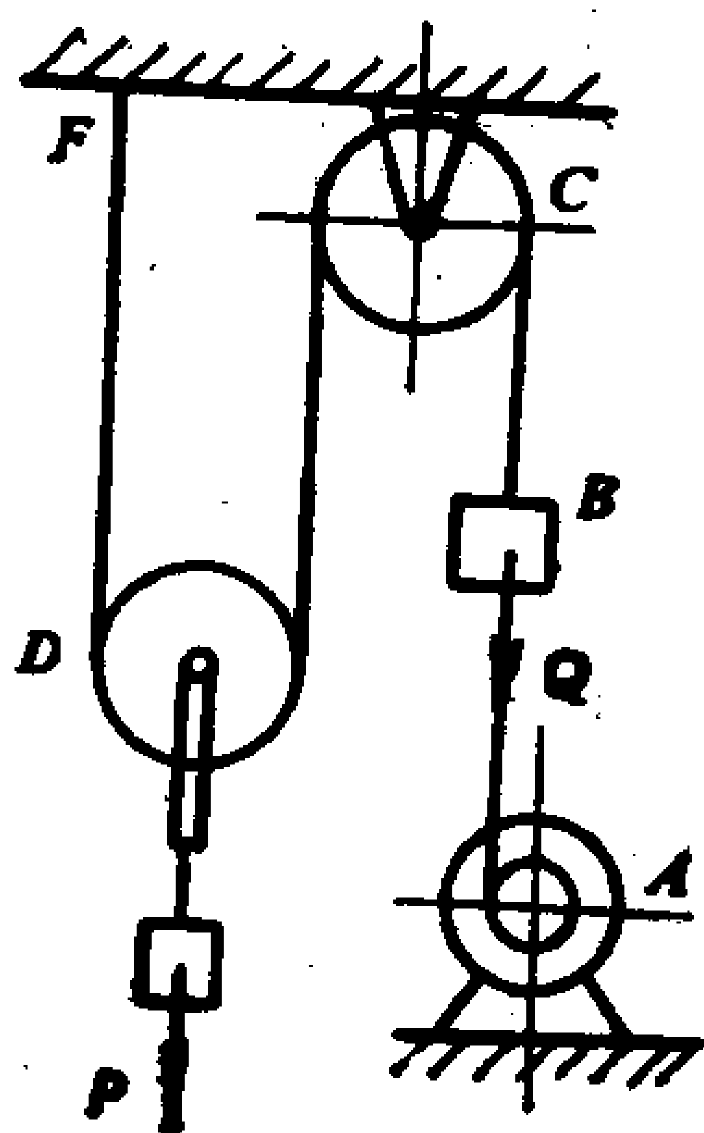
题3-37图



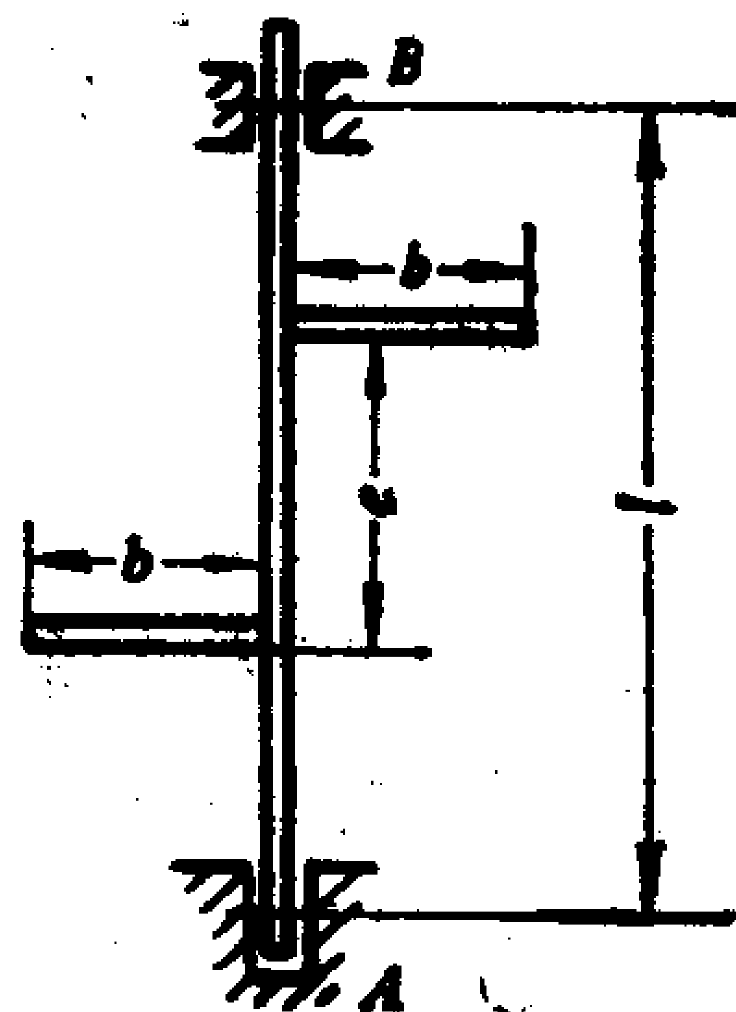
题3-38图

3-39 两重物$P=20\text{kN}$和$Q=8\text{kN}$，连接如图示，并由电动机拖动。如电动机转子所带动的绳的张力为3kN，不计滑轮重，求重物P的加速度和绳FD的张力。

答：$w_p=37.7\text{cm/s}^2$　$T_{FD}=10.38\text{kN}$



题3-39图



题3-40图

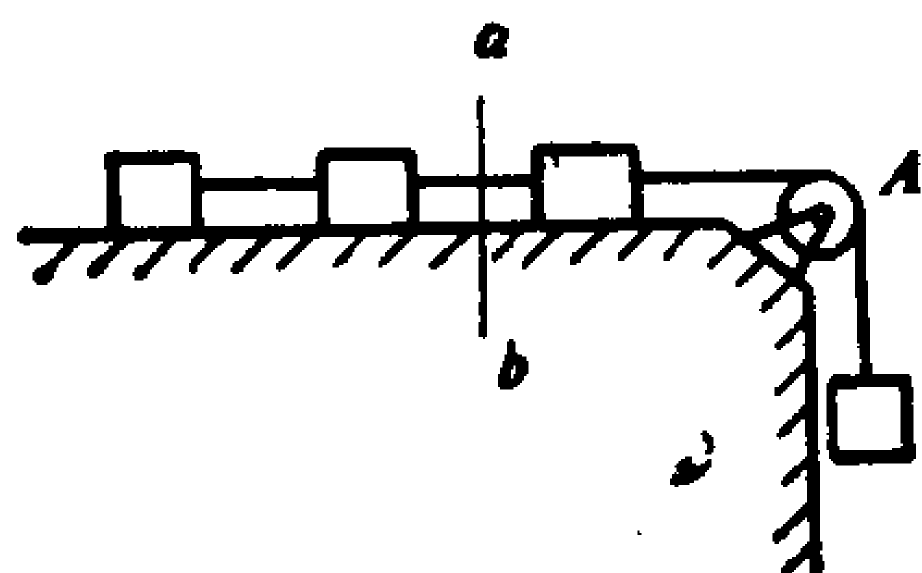
3-40 两杆各长为 b，重 P，垂直地固结在铅垂轴 AB 上，且与轴在同一平面内，两杆间的距离为 e。已知：$AB=l$；AB 轴的转动角速度为 ω。求轴承 A 和 B 的动反力。

3-41 四个重量均为 P 的重物，用绳相连接，绳子跨过一定滑轮 A，其中三个重物放在光滑的水平面上，第四个重物则铅垂悬挂，如图所示。略去绳重。求：(1) 系统的加速度；(2)在截面 ab 处，绳子的张力。

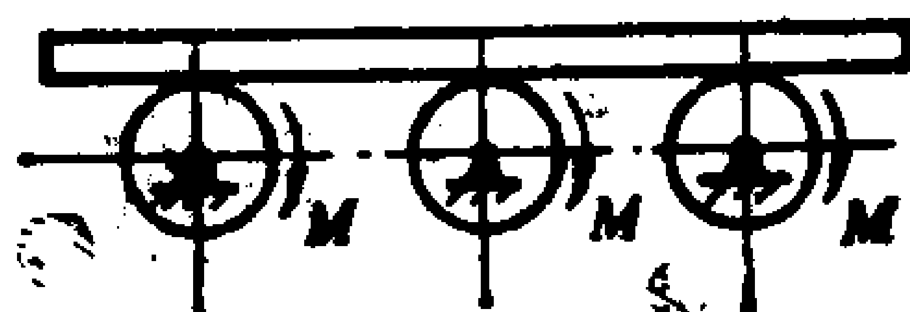
答：(1) $w=\frac{1}{4}g$；(2) $T=\frac{1}{2}P$

3-42 在三个均质轮上，各作用一转动力矩 M，带动轮上的重杆运动。已知：每个轮的半径为 r，重量为 P；杆重为 Q。如轮与杆之间无相对滑动，轴的摩擦不计，求杆的加速度。

答：$w=\dfrac{6Mg}{(2Q+3P)r}$



题3-41图



题3-42图

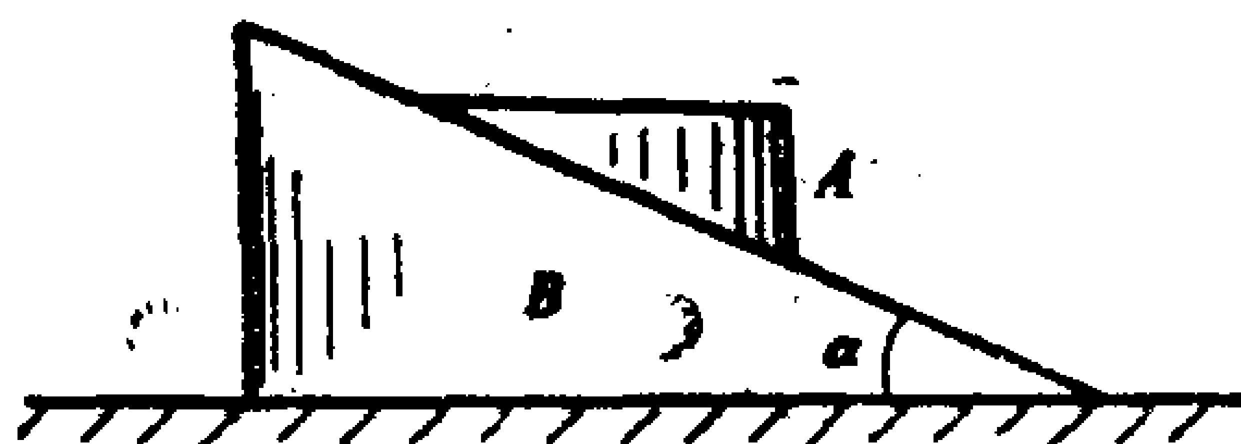
3-43 三棱柱 A 沿三棱柱 B 的光滑斜面滑动，A 和 B 各重 P 和 Q，三棱柱 B 的斜面与水平面成 α 角。如开始时物系静止，求三棱柱 B 的加速度。略去摩擦。

答：$w=g\dfrac{P\sin 2\alpha}{2(Q+P\sin^2\alpha)}$

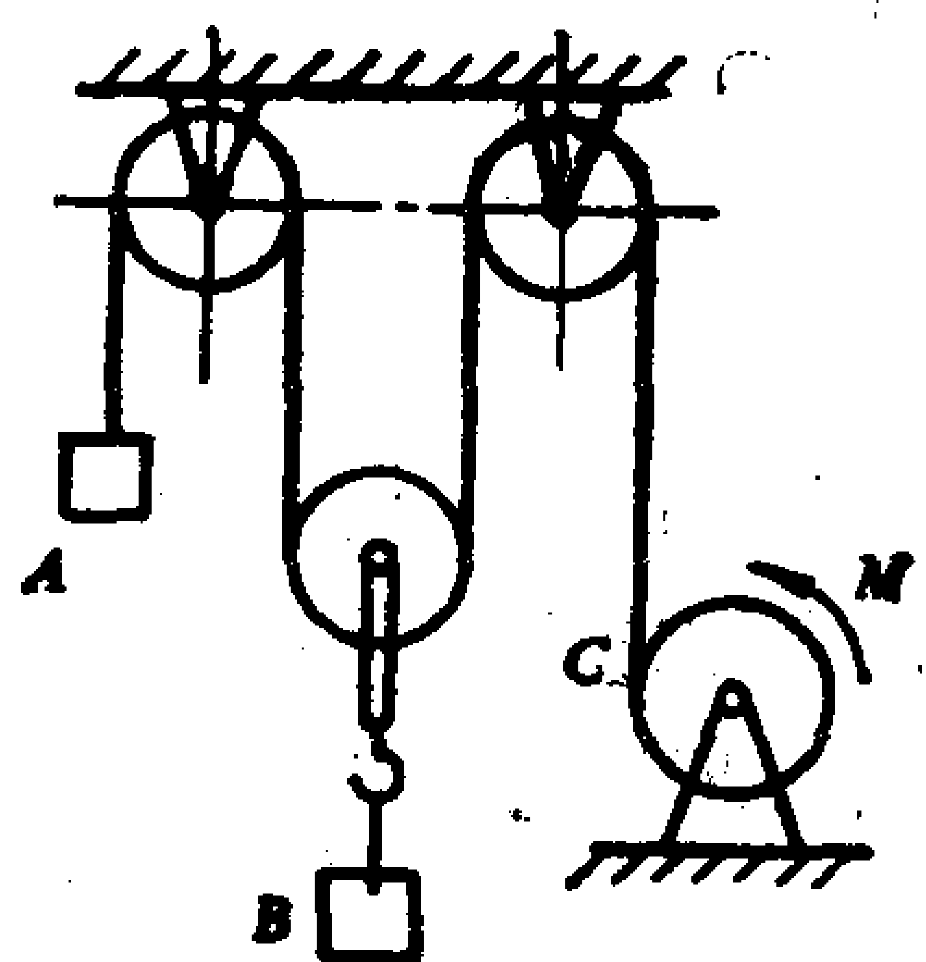
3-44 鼓轮 C 的半径为 R，转动惯量为 J，作用在其上的

力矩为 M。在滑轮组上悬挂重物 A 和 B，其质量各为 m_1 和 m_2，动滑轮的半径为 R。略去滑轮的质量和摩擦。求铰盘的角加速度。

答： $$\varepsilon=\frac{M(m_2+4m_1)-3gRm_1m_2}{J(m_2+4m_1)+R^2m_1m_2}$$



题3-43图



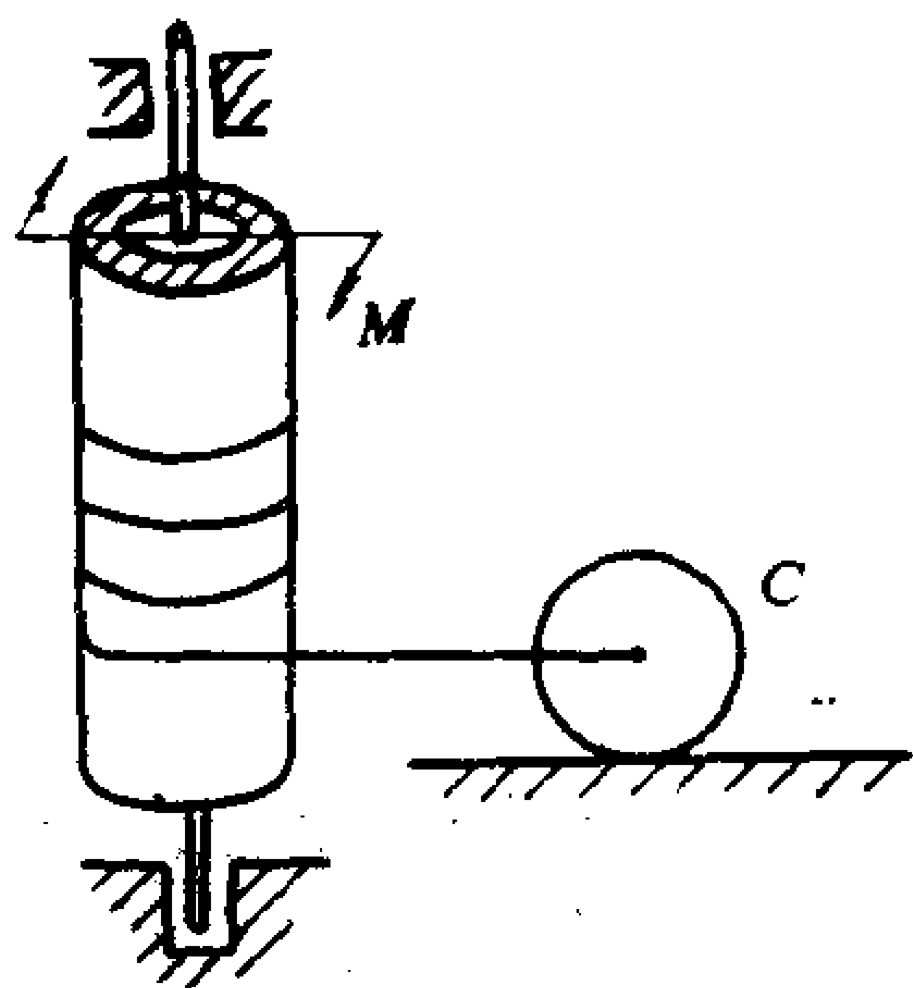
题3-44图

3-45 重量为 P 的竖立鼓轮可视为一空心圆柱，其外半径为 R，内半径为 r。鼓轮上缠以无重绳索，拖动一均质圆柱滚子沿水平面无滑地滚动。滚子重量为 Q。如在鼓轮上作用一矩为 M 的力偶，试求其角加速度。

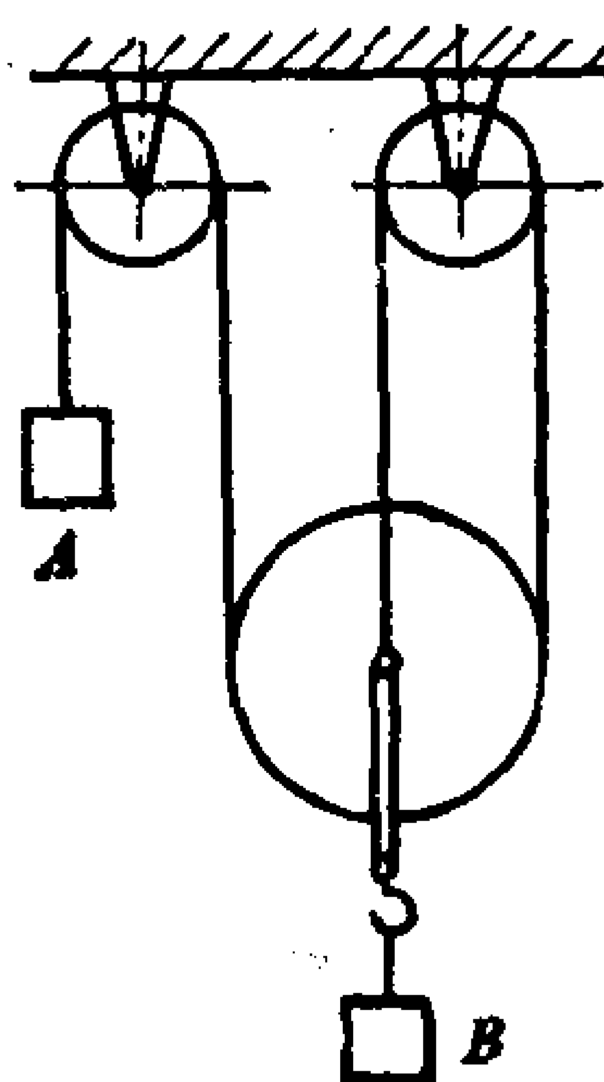
答： $$\varepsilon=\frac{2Mg}{P(R^2+r^2)+3QR^2}$$

3-46 不计滑轮及绳索的质量，A 的重量为 P，B 的重量为 Q。试求重物 A 下降时的加速度。此时重物 B 上升。

答：$$a=3g\,\frac{3P-Q}{9P+Q}$$



题3-45图

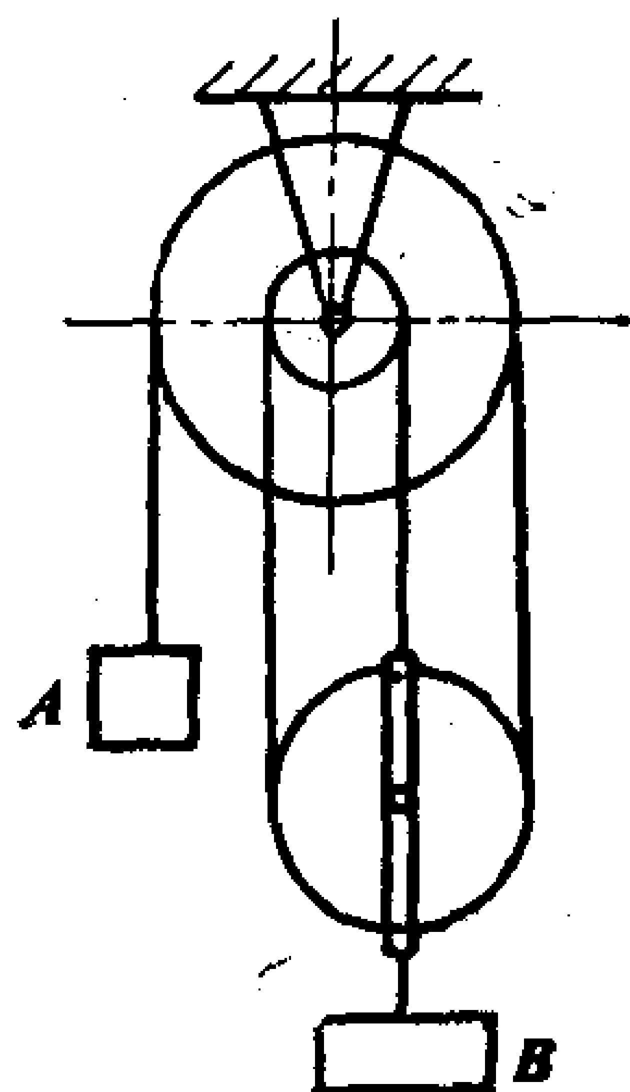


题3-46图

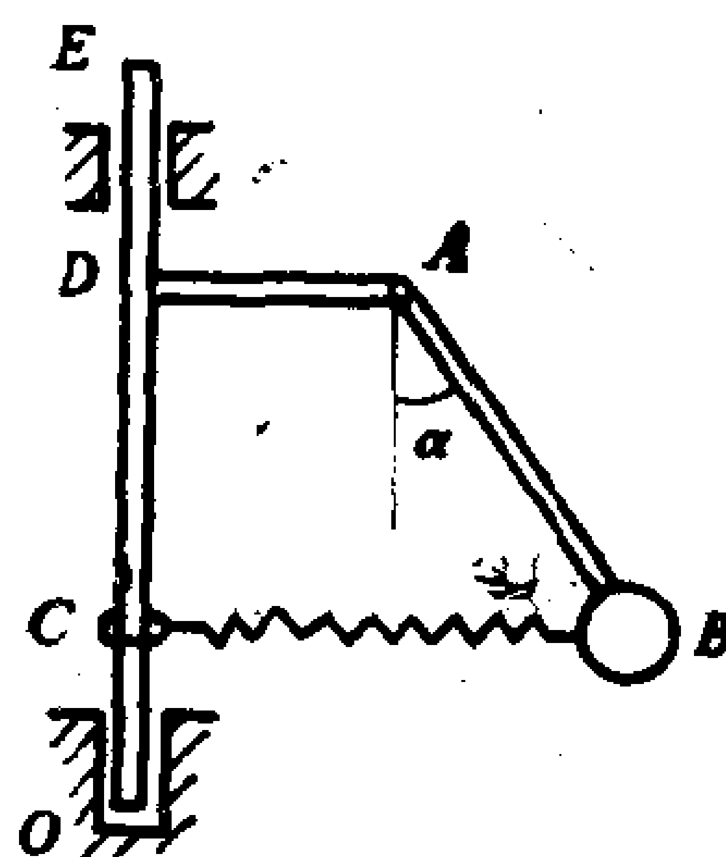
3-47 不计绳索质量及轴上摩擦，试求重量为P_1的重物A的加速度。设重物B的重量为P_2，静滑轮的转动惯量等于J，动滑轮可视为均质圆盘，其重为Q，半径等于$2r$。

答：$a_A=3g\dfrac{(3P_1-P_2-Q)r^2}{(9P_1+P_2+3Q)r^2+Jg}$

3-48 长度为a的AD杆以角速度ω绕铅垂轴匀速转动。



题3-47图



题3-48图

另一长度为l的无重杆AB铰接于AD杆，在其B端固连一个重量为P的球。球与弹簧BC相连。弹簧的C端系一无重光滑环，能沿OE轴滑动。设弹簧的刚性系数等于c，且当$\alpha=0$时弹簧无变形。试求角速度ω与AB杆对铅垂线的偏角α之间的关系。

答：$\omega^2=g\dfrac{P\text{tg}\alpha+cl\sin\alpha}{P(a+l\sin\alpha)}$

3-49 半径为r的薄壁圆管沿棱柱体的斜面无滑动地滚动，而棱柱体则以匀加速度w沿水平面平动。斜面与水平面成倾角α。不计滚动摩擦，试求：(1) 圆管的角加速度ε；(2) 圆管与棱柱体斜面之间的滑动摩擦系数；(3) 圆管向上运动的条件。

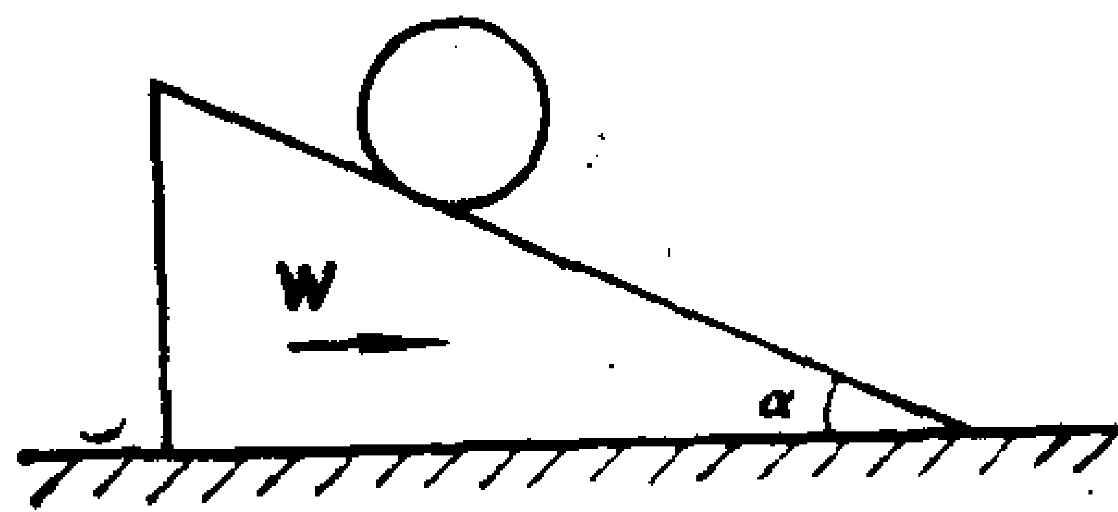
答：(1) $\varepsilon=\dfrac{1}{2r}(g\sin\alpha-w\cos\alpha)$；

(2) $f=\dfrac{g\sin\alpha-w\cos\alpha}{2(g\cos\alpha+w\sin\alpha)}$；

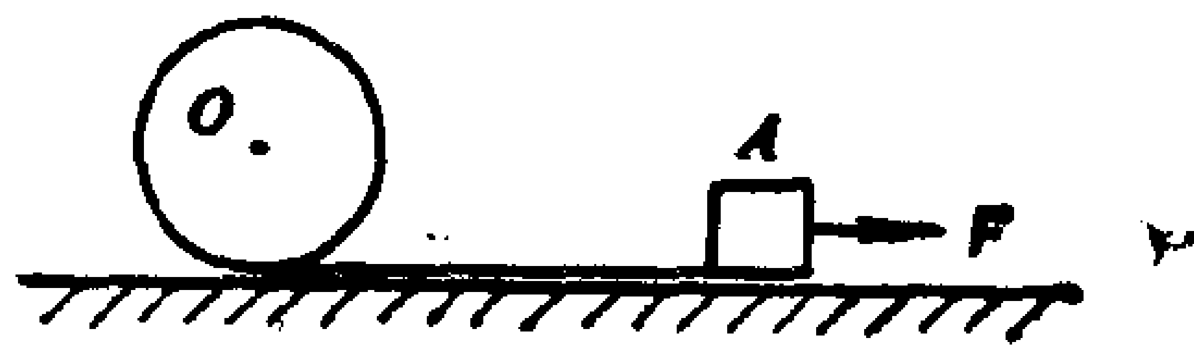
(3) $w>g\text{tg}\alpha$

3-50 在一个重量为P_1的均质圆柱上绕一根绳，其一端连到重量为P_2的物体A上。物体A放在水平面上。如在A上施加水平力F，试求O轴及物体A的加速度。绳重不计，A与平面间摩擦不计。

答：$a_0=\dfrac{F}{P_1+3P_2}g$；$a_A=\dfrac{3F}{P_1+3P_2}g$



题3-49图



题3-50图

3-51 重量为P的板自由地放在光滑的支承上，且与水平成角α。如物体与板之间的摩擦系数等于f，试问重量为Q的物体A以多大加速度相对板子上升？

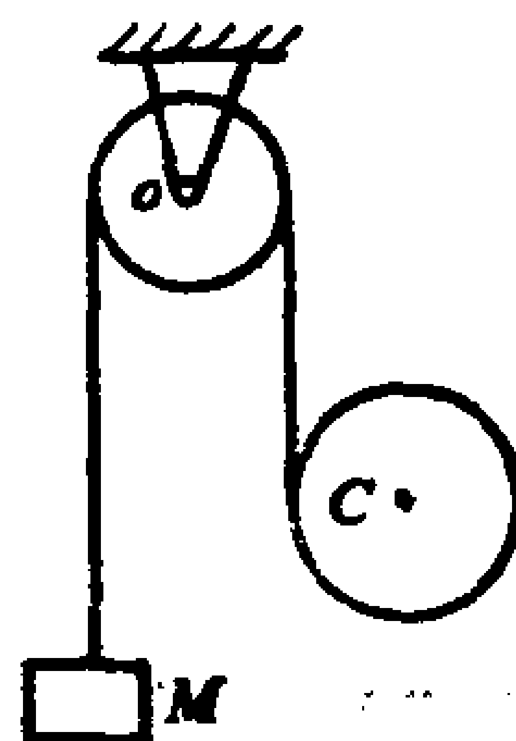
答：$a_r=g\dfrac{P+Q}{P}f\cos\alpha$

3-52 重量为P的实心圆柱，在其中间缠以绳子，此绳的另一端跨过滑轮O同重量为Q的重物M相连接。设重物M上升，不计滑轮和绳的质量，试求重物M及圆柱轴C的加速度。

答：$a_M=\dfrac{P-3Q}{P+3Q}g$；$a_c=\dfrac{P+Q}{P+3Q}g$



题3-51图



题3-52图

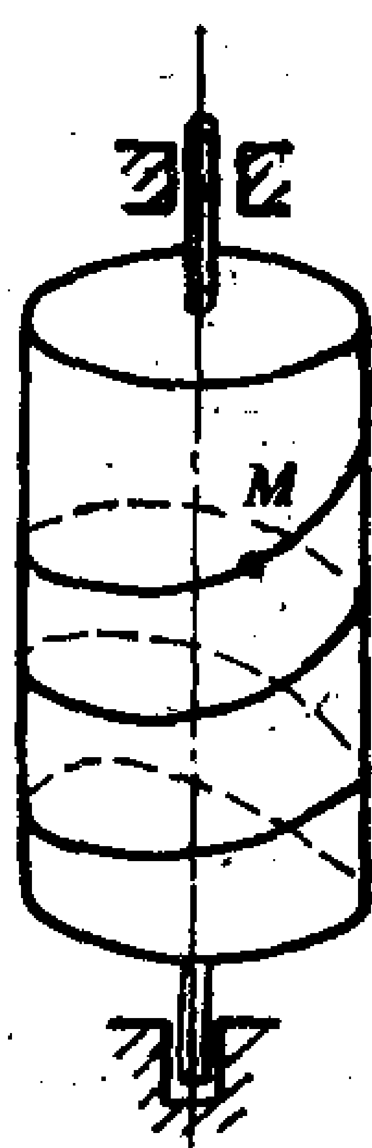
3-53 小球M在自重P的作用下沿均质圆柱表面的螺旋槽向下运动。圆柱半径为r重为Q。略去槽的尺寸及摩擦，试求圆柱的角速度。设螺距等于h，且运动自静止状态开始。

答：$\varepsilon=\dfrac{4\pi ghP}{(2P+Q)h^2+4\pi^2Qr^2}$

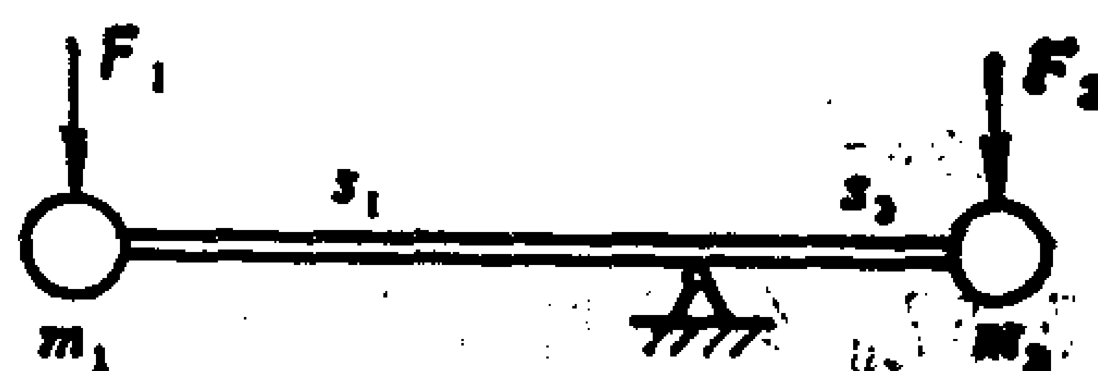
3-54 质量分别为m_1和m_2的质点，由过固定支点的水平轻杆相连。外力$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$保持与杆垂直，并且与支点的距离分别为s_1和s_2。用动力学普遍方程求杆在平面内的瞬时

角加速度ε。

$$答：\varepsilon=\frac{F_1s_1-F_2s_2}{m_1s_1^2+m_2s_2^2}$$



题3-53图



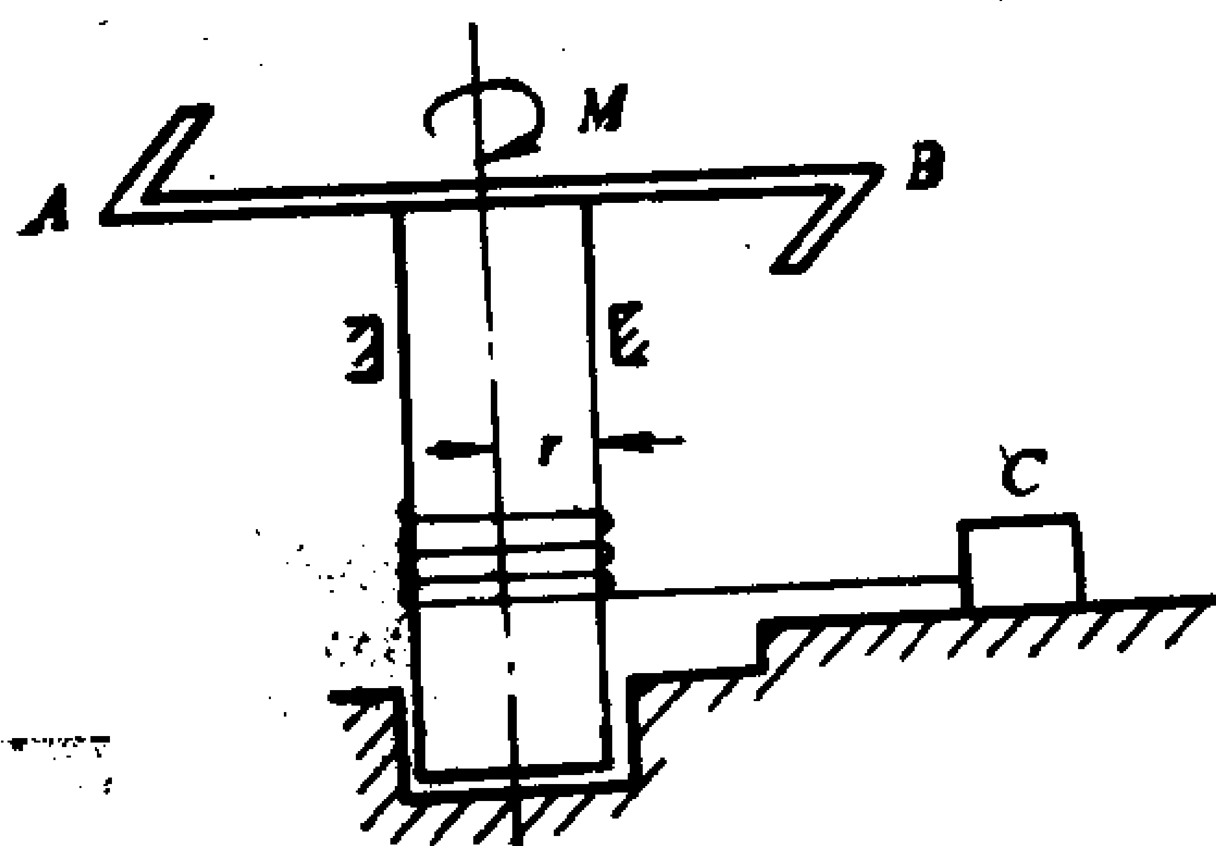
题3-54图

3-55 半径为r的铰盘，其手柄上作用有一矩为M的力偶，铰盘上的绳子与重为P的滑块c相连。滑块与水平面间的滑动摩擦系数为f，若绳与铰盘的重量略去，试求滑块c的加速度。

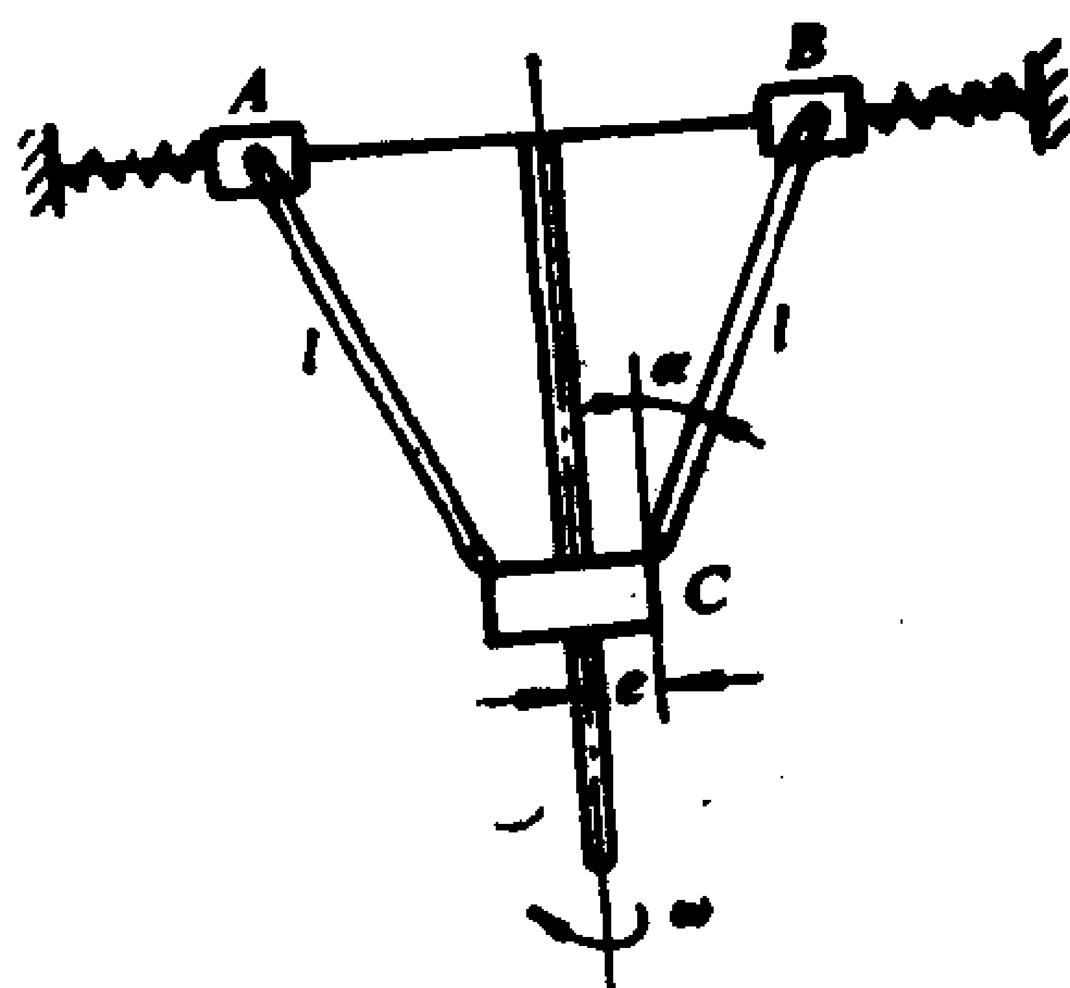
$$答：a=g\frac{M-fPr}{Pr}$$

3-56 图示为一离心式弹簧调速器，重物A与B的重量$P_A=P_B=150\text{N}$，位于光滑的水平杆上，此杆与铅垂转轴相连，滑套C的重量$W=100\text{N}$，C与A、B用长$l=25\text{cm}$的两连杆相连。两弹簧的刚度系数皆为$k=150\text{N/cm}$，固定于杆的两端，其靠近内侧的端点与重物A、B相连。弹簧将重物A、B压向旋转中心轴，中心轴的轴线与c点的水平距离$e=3\text{cm}$。试求当开角$\alpha=60^\circ$时，调速器的旋转速度？已知当$\alpha=30^\circ$时，弹簧无变形。连杆的重量及所有摩擦力略去不计。

答：$\omega=19.67(\text{rad/s})$



题3-55图

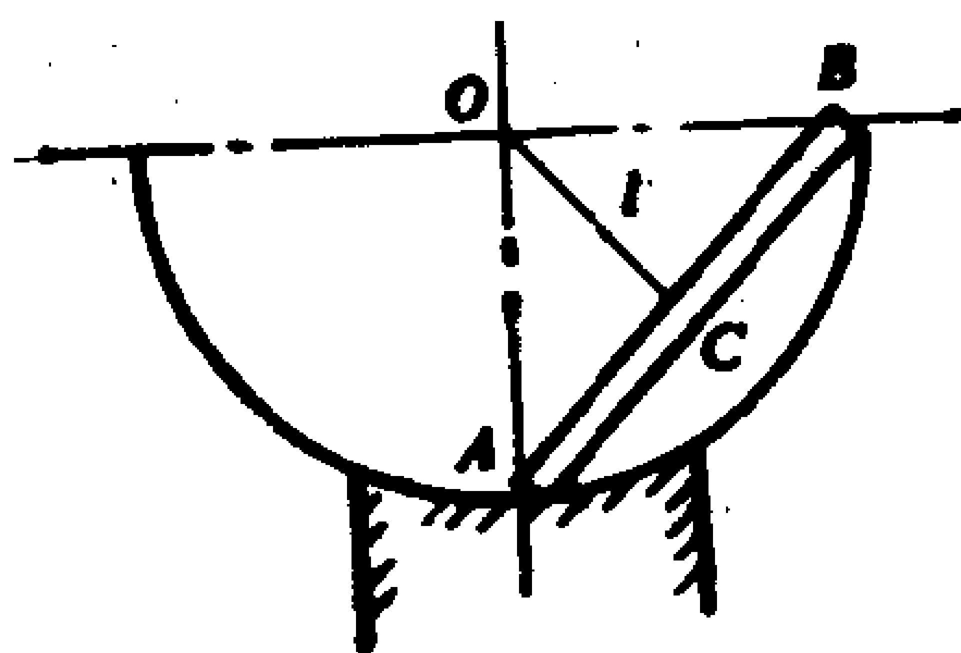


题3-56图

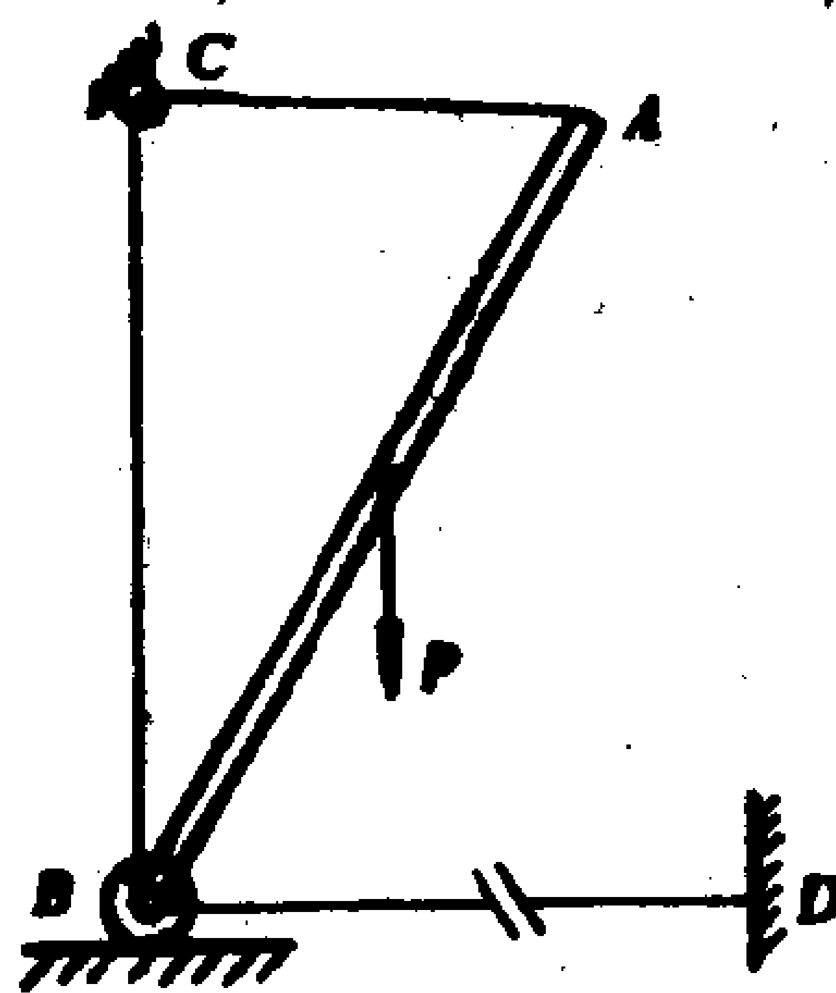
3-57 匀质杆AB长$2l$，重P，沿光滑的圆弧轨道运动(如图示)。AB的中点C与圆弧中心O的距离为l。开始运动时，AB与水平成45°，初速为零。求此时轨道对杆的约束反力。

答：$N_A=\frac{5}{8}P$，$N_B=\frac{3}{8}P$

3-58 匀质杆AB重P，长$2l$，一端放在光滑地面上，并用两细绳支持(如图示)。求当BD绳切断的瞬间，B的加速



题3-57图



题3-58图

度，AC 中的拉力以及地面的约束反力。

答：$a_B=\frac{3\sqrt{3}}{8}g$，$T_{AC}=\frac{3\sqrt{3}}{16}P$　$N=\frac{13}{16}P$

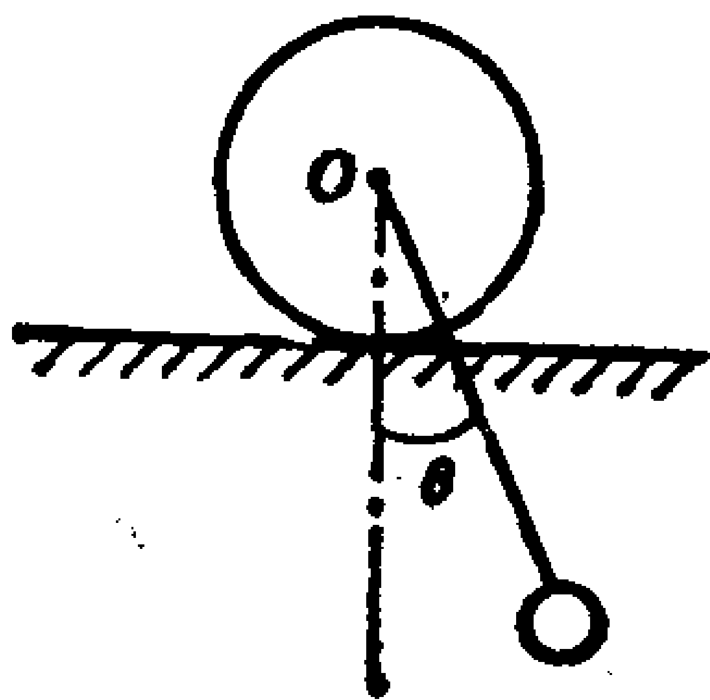
3-59　一重量为 P_1 的单摆，其支点固定在一圆轮的中心O。圆轮重P_2，放在水平面上，圆轮与平面间有足够的摩擦力阻止滑动。设圆轮可视为匀质圆盘，求在图示位置无初速地开始运动时，轮心O的加速度。

答：$a=\frac{P_1\sin 2\theta}{3P_2+2P_1\sin^2\theta}g$

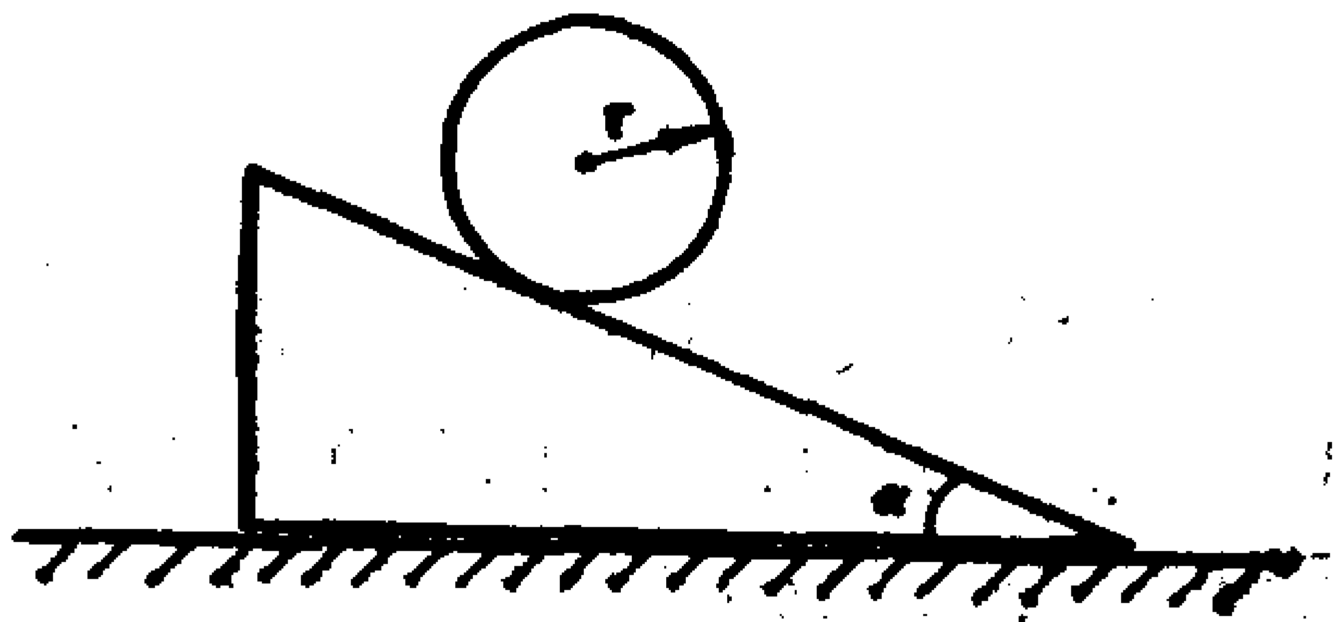
3-60　一重为P_1的斜面置于光滑水平面上，在斜面上，放一半径为r，重为P_2的匀质圆柱(如图示)。圆柱只能在斜面上滚动，不计滚动阻力，求圆柱中心相对于斜面的加速度，以及斜面运动的加速度。

答：$a_r=\frac{2(P_1+P_2)\sin\alpha}{3(P_1+P_2)-2P_2\cos^2\alpha}g$

$a=\frac{P_2\sin 2\alpha}{3(P_1+P_2)-2P_2\cos^2\alpha}g$



题3-59图



题3-60图

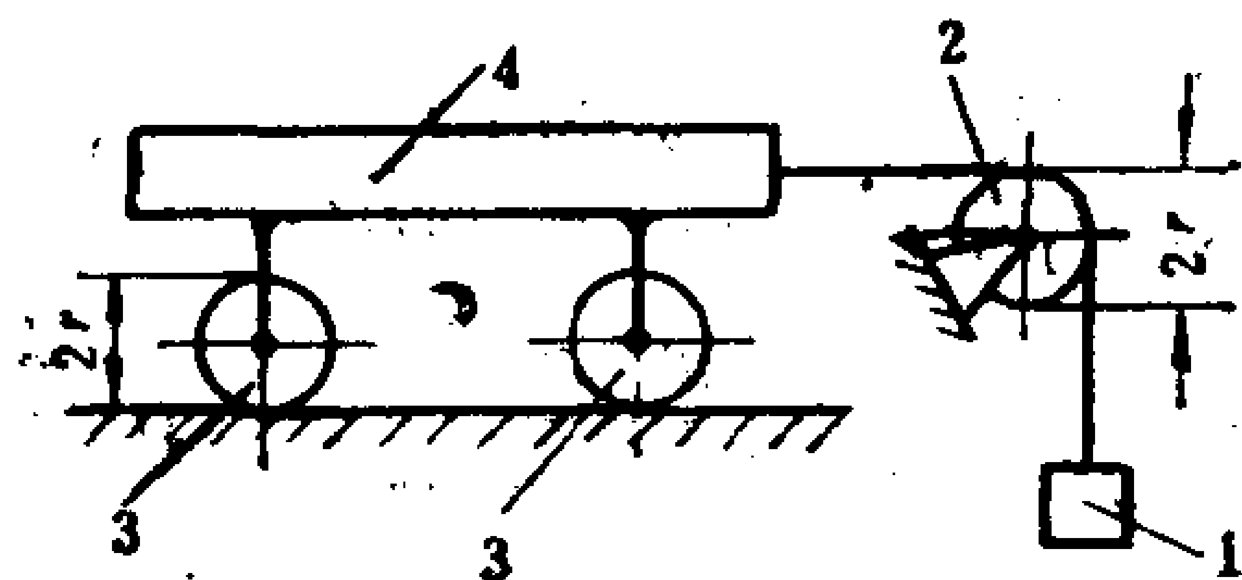
3-61　已知：图示各重 $G_1=2G$，$G_2=G$，$G_3=G$，$G_4=8G$，四轮重量相同，试利用动力学普遍方程求重物加速度a_1及拴重物的绳子的张力T。

答：$a_1=\frac{4}{33}g$，$T=\frac{58}{33}G$

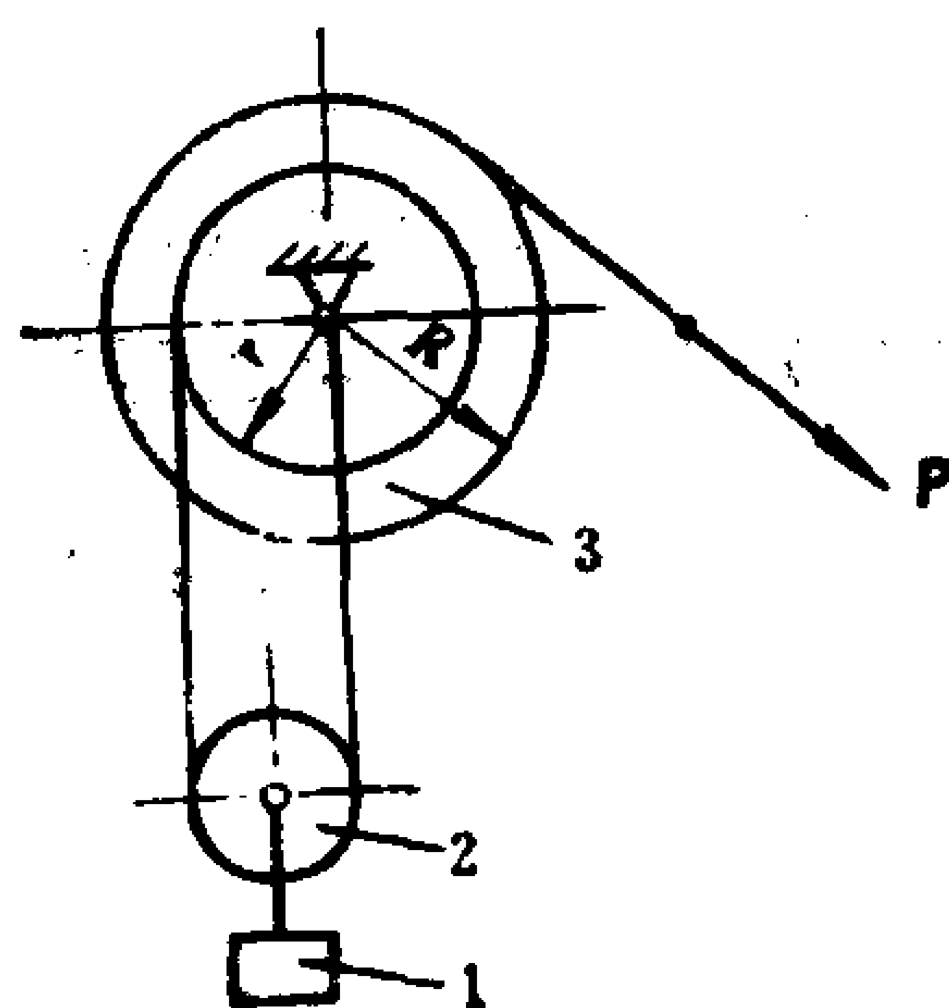
3-62 已知：$G_1=5G, G_2=0.1G, G_3=0.2G, \frac{R}{r}=3$，惯性半径 $i_{3x}=\sqrt{2}r$，求重物1的加速度a_1以及拴重物的绳子的张力T。

答：$a_1=\frac{4}{27}\left(\frac{6P}{G}-5.1\right)g$，向上

$T=\frac{15}{27}(8P+2.2G)$



题3-61图



题3-62图

3-63 已知杆1的质量为m，齿轮2的质量为$2m$，齿轮3的质量为$3m$，轮2对轴的惯性半径为$2r$，系统在水平面内运动，常力偶矩M_1作用于杆1，M_2作用于轮2。试用动力学普遍方程建立系统在广义坐标φ_1，φ_2中的运动微分方程。

答：$mr^2(6.96\ddot{\varphi}_1-3.96\ddot{\varphi}_2)=M_1$

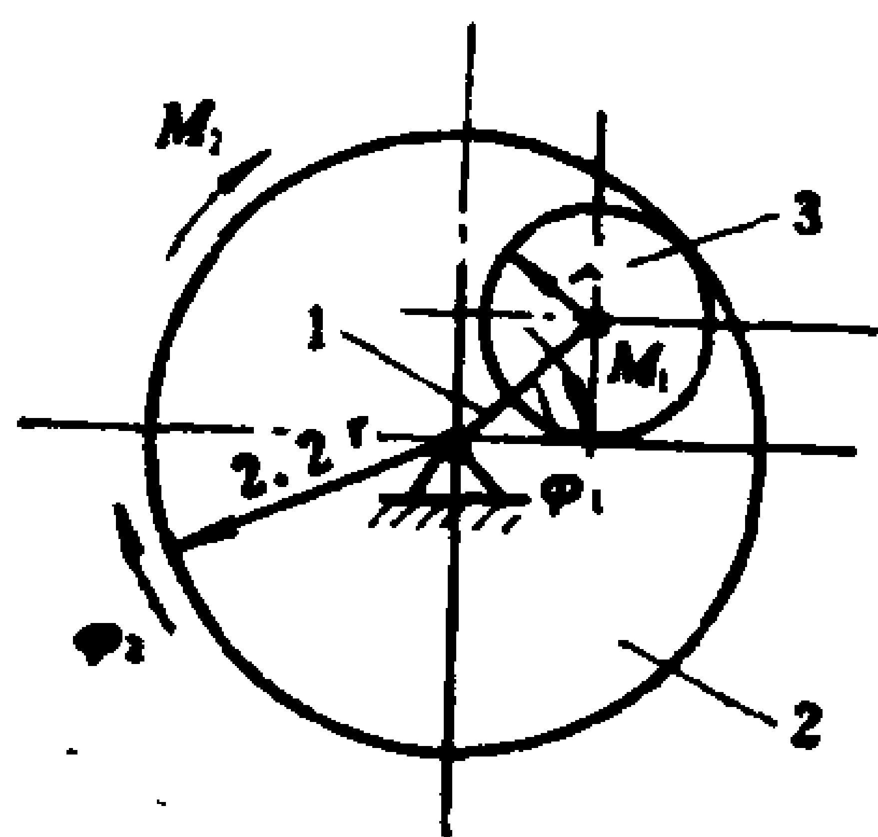
$mr^2(-3.96\ddot{\varphi}_1+15.26\ddot{\varphi}_2)=M_2$

3-64 已知质点质量$m_1=m$，三角形质量$m_2=3m$，车

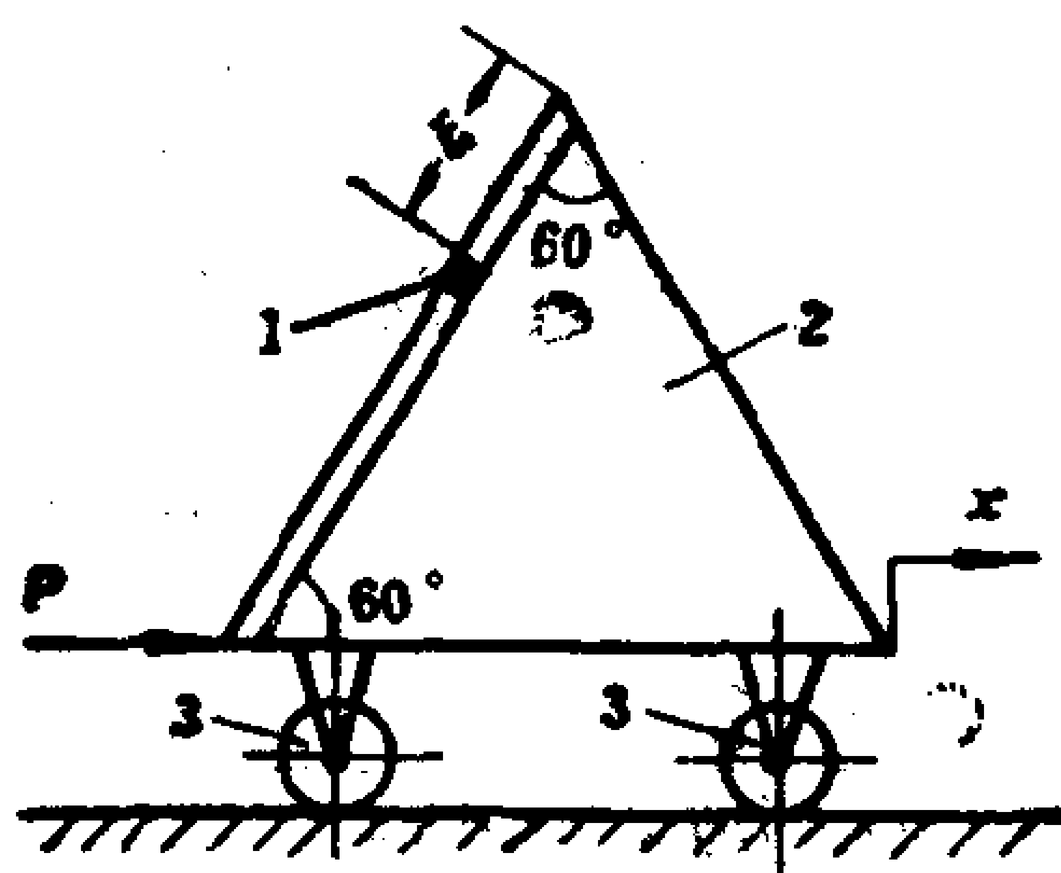
轮质量$m_3=m$(共四个)，所受力$\boldsymbol{P}$为常力。质点m_1相对m_2运动时，受粘性阻尼作用，(阻力大小与相对速度成比例，比例系数为b)。试以ξ，x为广义坐标，利用动力学普遍方程建立系统的运动微分方程。

答：$m(20\ddot{x}-\ddot{\xi})-b\,\dot{\xi}=2P$

$m(2\,\ddot{\xi}-\ddot{x})+2b\,\dot{\xi}=0$



题3-63图



题3-64图

第四章　拉格朗日方程

一、基本理论与公式

第二类拉格朗日方程是对具有双面、理想、完整约束的力学系统建立的方程，它是完整系统全部分析力学的基础。

1.　拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{4-1}$$

(1) 系统的动能T

1°非定常(完全不稳定)系统

$$T=T_2+T_1+T_0$$

其中

T_2=广义速度的二次式

T_1=广义速度的线性式

T_0=不含有广义速度的项

2°半不定常(半不稳定)系统

$$T=T_2+T_1+T_0$$

3°定常(完全稳定)系统

$$T=T_2$$

(2) 广义力Q_s

计算方法有三种：

1°按定义

$$Q_s = \sum_{i=1}^{N}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial p_s}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) \quad (4\text{-}1a)$$

2°虚功方法

$$Q_s = \frac{\Sigma \delta A_s}{\delta q_s} \quad (4\text{-}1b)$$

其中$\Sigma\delta A_s$为所有主动力在虚位移δq_s上作的元功之和。

3°有势力情形

$$Q_s = -\frac{\partial V}{\partial q_s} \text{ 或 } Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s} \quad (4\text{-}1c)$$

式中V为系统势能，U为系统力函数，且$U=-V$。

2. 有势力情形的拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \quad (s=1,2,\cdots,n) \quad (4\text{-}2)$$

其中

拉格朗日函数(或动势)$L=T-V$或$L=T+U$

3. 循环积分与能量积分

(1) 循环坐标与循环积分。L中不显含的广义坐标称为循环坐标(或可遗坐标)。如L中有r个循环坐标，则有对应的r个循环积分：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=C_k \quad (k=1,2,\cdots,r\leqslant n) \quad (4\text{-}3)$$

(2) 能量积分

1°定常系统($T=T_2$)

$$T+V=h=\text{const} \quad (\text{或} T-U=h)$$

式中

$$T+V=E \quad (\text{系统的机械能量}) \tag{4-4}'$$

2°半不定常系统($T=T_2+T_1+T_0$)

$$T_2-T_0+V=h^*=\text{const}(\text{或}T_2-T_0-U=h^*) \tag{4-4}$$

T_2-T_0+V 不同于前者的机械能量，故称为"广义"机械能量。

4. 拉格朗日方程的降阶法

(1) 应用循环积分降阶的罗兹(*Routh*)法。若系统中有 r 个循环坐标($q_1, q_2, \cdots q_r$)则罗兹方程为

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}-\dfrac{\partial R}{\partial q_j}=0 & (j=r+1, r+2, \cdots, n) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=\beta_k=\text{const} & (k=1,2,\cdots,r) \end{cases} \tag{4-5}$$

式中罗兹函数

$$R=L-\sum_{k=1}^{r}\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

(2) 应用能量积分降阶的惠特克(*Whittaker*)法。系统有能量积分

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r-L=h=\text{const}$$

取n个广义坐标中任一个(如q_1)为自变量(相当于时间t的地位)，通过变换

$$q_r^1=\frac{dq_r}{dq_1}, \quad \dot{q}_r=\dot{q}_1 q'_r \quad (r=2,3,\cdots,n)$$

使原方程降低一阶，成为形如拉格朗日方程的惠特克方程

$$\frac{d}{dq_1}\frac{\partial L'}{\partial q'_r}-\frac{\partial L'}{\partial q_r}=0 \quad (r=2,3,\cdots,n) \tag{4-6}$$

式中

$$L'=L'(q'_2,\ q'_3,\ \cdots,\ q'_n,\ q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n)$$

5. 变量可分离的拉格朗日方程和刘维方程

（1）分离变量和局部能量积分。若系统的所有广义坐标 q_1，q_2，…，q_n全为分离保守的，即可写成

$$T=\sum_{s=1}^{n}T_s,\qquad V=\sum_{s=1}^{n}v_s$$

其中

$$T_s=\frac{1}{2}u_s(q_s)\dot{q}_s^2,\ V_s=W_s(q_s)$$

则有 n 个分离变量的局部能量积分

$$T_s+V_s=\frac{1}{2}u_s(q_s)\dot{q}_s^2+W_s(q_s)=C_s=\text{const} \tag{4-7}$$

$$(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

（2）刘维(*Liouville*)方程。若力学系统的动能和势能可以分别写成

$$T=\frac{1}{2}\Big\{u_1(q_1)+u_2(q_2)+\cdots+u_n(q_n)\Big\}$$

$$\times\Big\{V_1(q_1)\dot{q}_1^2+V_2(q_2)\dot{q}_2^2+\cdots+V_n(q_n)\dot{q}_n^2\Big\}$$

$$V=\frac{W_1(q_1)+W_2(q_2)+\cdots+W_n(q_n)}{u_1(q_1)+u_2(q_2)+\cdots+u_n(q_n)}$$

通过变换 $\dot{q}_s^*=\sqrt{V_s(q_s)}\dot{q}_s$上面的$T$和$V$的式子成为

$$T=\frac{1}{2}\left\{u_1^*(q_1)^*+u_2^*(q_2^*)+\cdots+u_n^*(q_n^*)\right\}$$

$$+\left\{\dot{q}_1^{*2}+\dot{q}_2^{*2}+\cdots+\dot{q}_n^{*2}\right\}$$

$$V=\frac{W_1^*(q_1^*)+W_2^*(q_2^*)+\cdots+W_n^*(q_n^*)}{u_1^*(q_1^*)+u_2^*(q_2^*)+\cdots+u_n^*(q_n^*)}$$

为了书写简便起见，下面略去所有星号(*)

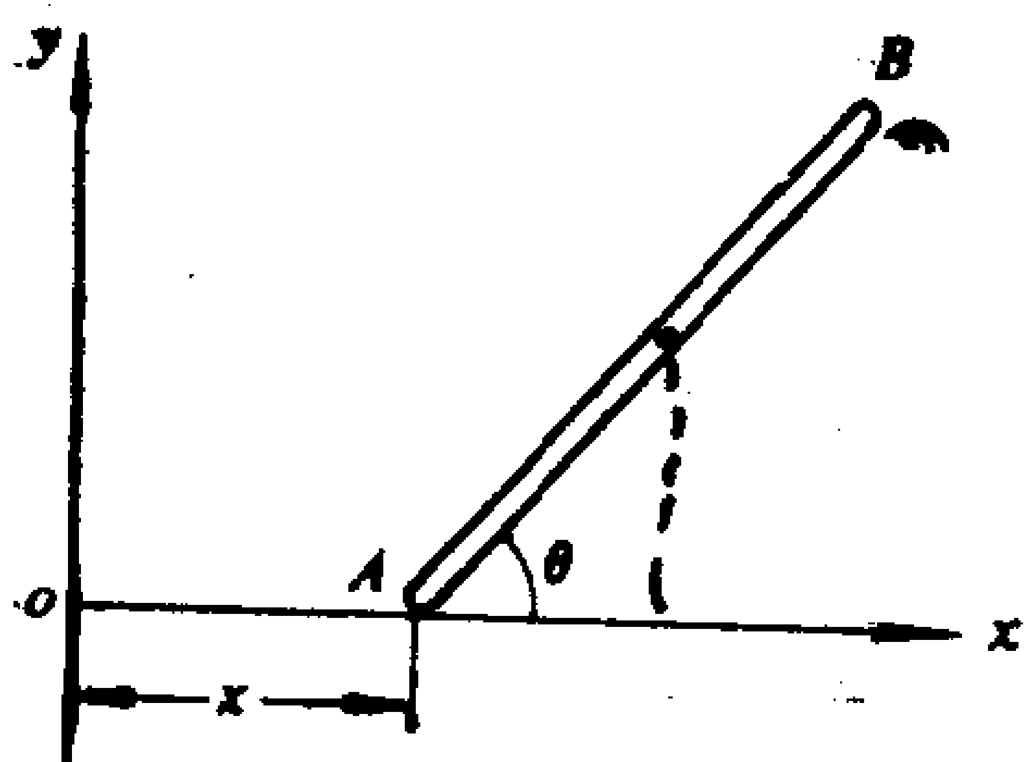
刘维方程

$$\frac{dq_1}{\sqrt{hu_1(q_1)-W_1(q_1)+\gamma_1}}=\frac{dq_2}{\sqrt{hu_2(q_2)-W_2(q_2)+\gamma_2}}=$$

$$\cdots=\frac{dq_n}{\sqrt{hu_n(q_n)-W_n(q_n)+\gamma_n}} \qquad (4\text{-}8)$$

其中h，γ_1，γ_2，$\cdots\gamma_n$为积分常数，且$\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n=0$。

二、范　例



例4-1图

例4-1　质量为m，长为l的均质细杆被限制在xy平面内运动，且其A端恒保持在x轴上。若采用(x，θ)作为广义坐标，试求动能的表达式

［解］　杆AB质心C的坐标为

$$x_C=x+\frac{l}{2}\cos\theta,\quad y_c=\frac{l}{2}\sin\theta$$

质心C的速度分量为

$$\dot{x}_c=\dot{x}-\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta,\ \dot{y}_c=\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta$$

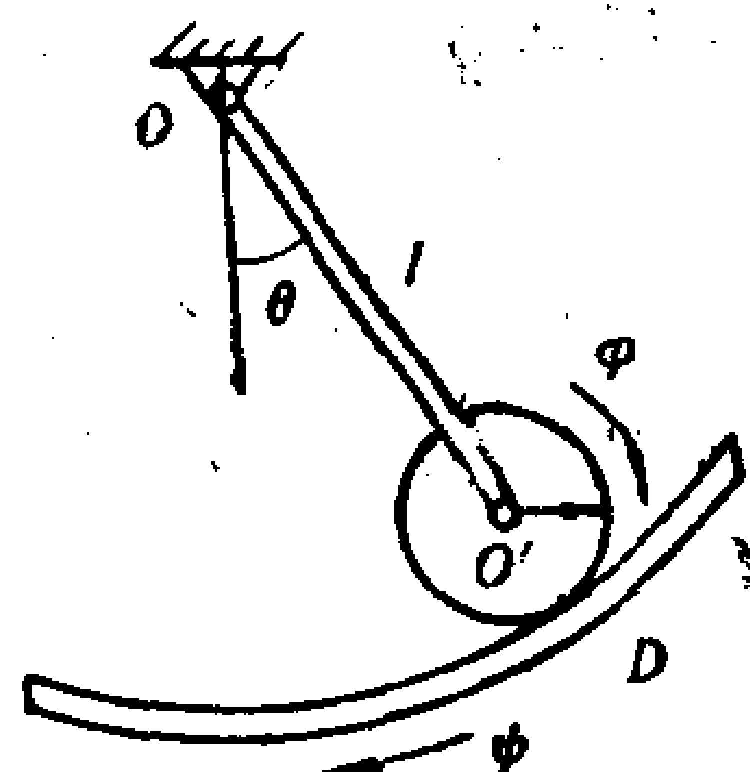
于是，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_c^2+\dot{y}_c^2)+\frac{1}{2}J_c\dot{\theta}^2$$

$$=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2-l\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta)+\frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2$$

$$=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta$$

例4-2 给定的系统具有一根长为l、质量为m的刚性细杆，此杆可以绕O点转动。半径为r，质量为m的匀质圆盘经由销子O'连结于细杆一端，圆盘则在转动着的圆筒内表面上无滑动地滚动。已知圆筒对于其中心轴O的惯性矩为J。试求出将$\dot{\varphi}$表为$\dot{\theta}$和$\dot{\psi}$的函数的约束方程，这里所指的各个角速度都是绝对角速度。试写出用$\dot{\theta}$和$\dot{\psi}$表示的总动能。



例4-2图

〔解〕 圆盘与圆筒接触点的速度为

$$(l+r)\dot{\psi}=-l\dot{\theta}+\dot{\varphi}r \qquad (1)$$

故

$$\dot{\varphi}=\frac{l}{r}\dot{\theta}+\frac{l+r}{r}\dot{\psi} \qquad (2)$$

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}\frac{m}{3}l^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}\frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}J_0\dot{\psi}^2 \qquad (3)$$

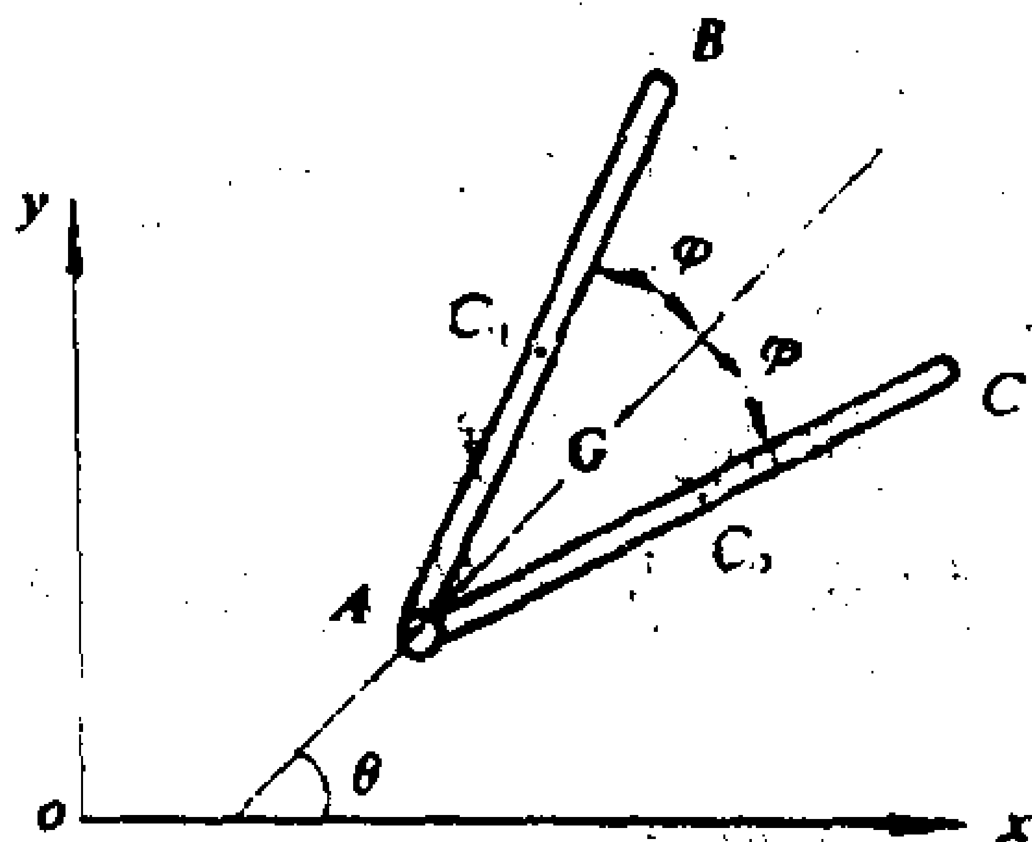
将(2)代入(3)得

$$T=\frac{11}{12}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}ml(l+r)\dot{\theta}\dot{\psi}+\frac{1}{2}\left[J_0+\frac{1}{2}m(l+r)^2\right]\dot{\psi}^2 \tag{4}$$

例4-3 两均质杆AB和AC在A点铰接，每根杆的质量为m，长度为$2a$，两杆可在水平面上自由运动。设系统质心G的坐标为$(x、y)$，两杆与ox轴的夹角为$\theta\pm\varphi$，oxy为平面上的固定直角坐标系(见图)。求证系统的动能是

$$T=m[\dot{x}^2+\dot{y}^2+(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi)a^2\dot{\theta}^2+(\frac{1}{3}+\cos^2\varphi)a^2\dot{\varphi}^2$$

[证明] 按质心定义可知AB杆质心C_1和BC杆质心C_2到G点距离为



例4-3图

$$C_1G=C_2G=a\sin\varphi$$

而

$$x_{c_1}=x-a\sin\varphi\sin\theta,\quad y_{c_1}=y+a\sin\varphi\cos\theta$$

$$x_{c_2}=x+a\sin\varphi\sin\theta,\quad y_{c_2}=y-a\sin\varphi\cos\theta$$

于是

$$\dot{x}_{c1}^2+\dot{y}_{c1}^2+\dot{x}_{c2}^2+\dot{y}_{c2}^2=2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+2a^2(\dot{\theta}^2\sin^2\varphi+\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi) \qquad (1)$$

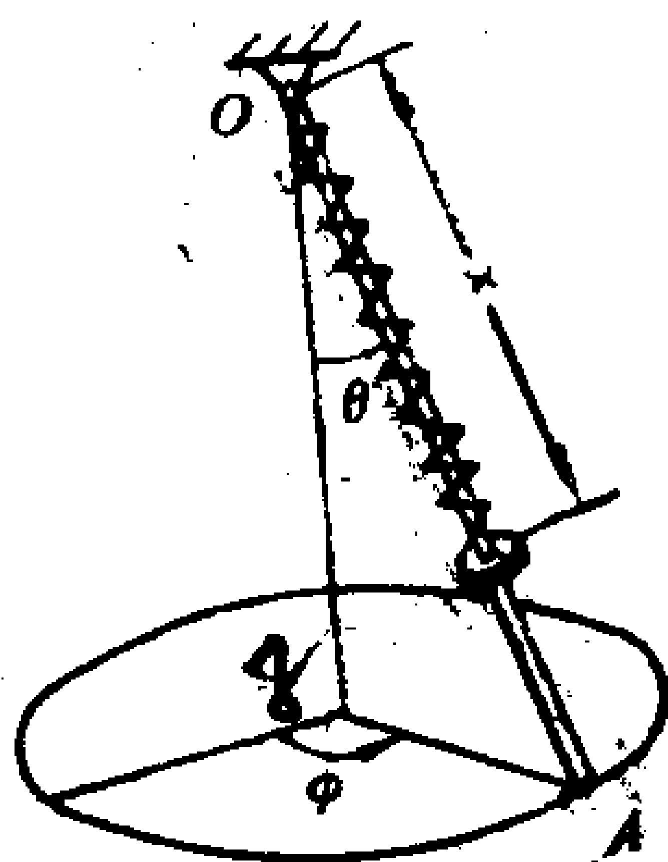
系统动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_{c1}^2+\dot{y}_{c1}^2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}m(2a)^2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2+\frac{1}{2}m(\dot{x}_{c2}^2+\dot{y}_{c2}^2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}m(2a)^2(\dot{\theta}-\dot{\varphi})^2 \qquad (2)$$

将(1)代入(2)，得

$$T=m\left[\dot{x}^2+\dot{y}^2+\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)a^2\dot{\theta}^2+\left(\frac{1}{3}+\cos^2\varphi\right)\times a^2\dot{\varphi}^2\right] \qquad (3)$$

例4-4 质量为 m，长为 $2a$ 的均质杆 OA，其 O 端与固定点铰接，杆与向下竖直线 OZ 的夹角为 θ。平面 AOZ 与固定竖直面的夹角为 φ。质量为 λm 的光滑小环套在杆 OA 上、小环与固定点 O 之间由弹簧相连，弹簧的自然长度为 a，弹性系数为 nmg/a。求证系统的动能为



例4-4图

$$T=\frac{2}{3}ma^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{\lambda m}{2}(\dot{x}^2+x^2\dot{\theta}^2+x^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

其中 λ，n 为常量，x 是小环和 O 点的距离。

[证明] 杆 OA 的动能可用积分算出

$$T_1=\frac{1}{2}\int_0^{2a}[(\dot{\varphi}x\sin\theta)^2+(\dot{\theta}x)^2]\frac{m}{2a}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\frac{m}{2a}(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)\int_0^{2a}x^2\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}ma^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

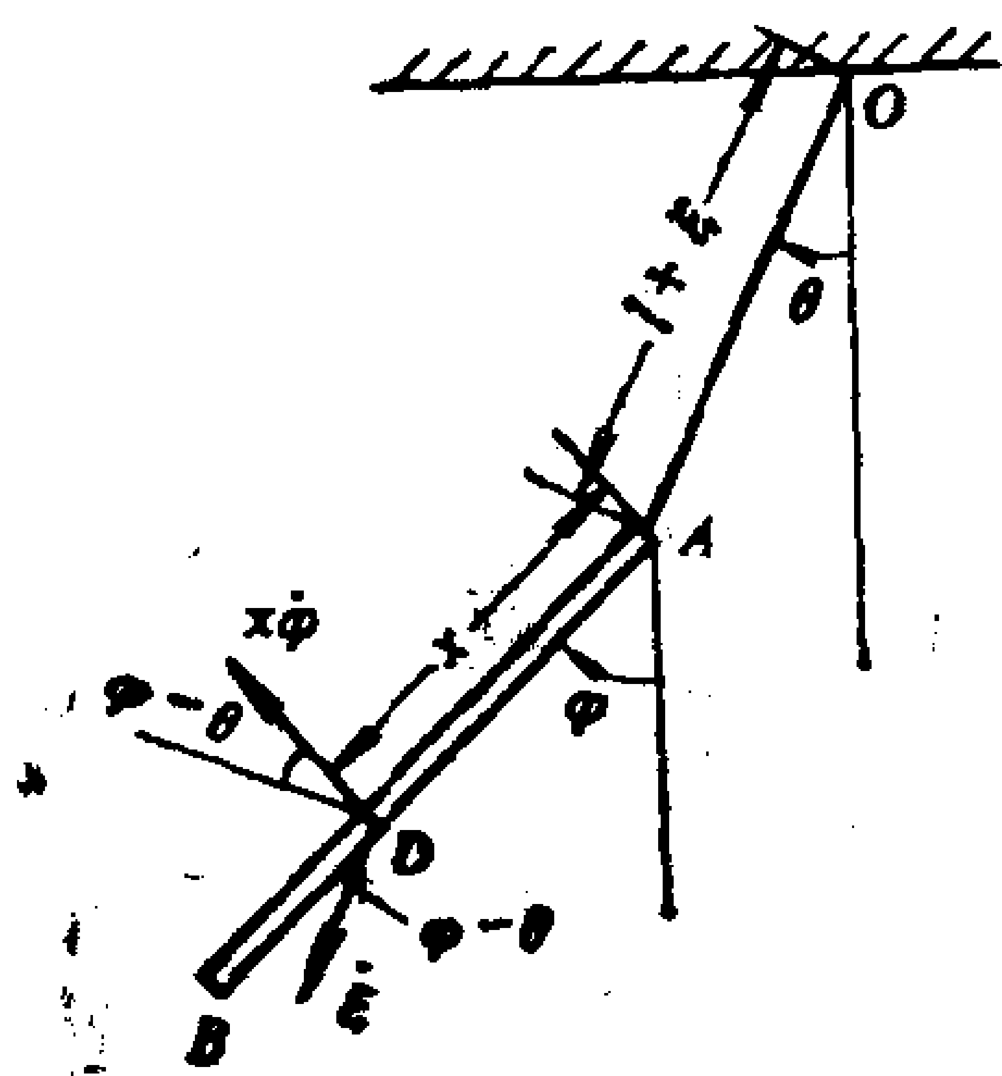
小环的动能为

$$T_2=\frac{1}{2}\lambda m(\dot{x}^2+x^2\dot{\theta}^2+x^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

于是系统的动能可求出为

$$T=T_1+T_2=\frac{2}{3}ma^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

$$+\frac{1}{2}\lambda_m(\dot{x}^2+x^2\dot{\theta}^2+x^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$



例4-5图

例4-5 均质杆AB，质量为m，长度为$2a$，其A端通过一根轻的弹性绳OA与固定点O相连。绳的自然长度为l，弹性系数为k，杆与拉紧的绳子一起在过O点的竖直平面内运动。用θ和φ分别表示OA，AB与向下竖直线的夹角，用$l+\xi$表示弹性绳OA的长度。证明杆子的动能是

$$T=\frac{m}{2}\left[\dot{\xi}^2+(l+\xi)^2\dot{\theta}^2+\frac{4}{3}a^2\dot{\varphi}^2\right]$$

$$+ma\dot{\varphi}\left[(l+\xi)\dot{\theta}\cos(\varphi-\theta)-\dot{\xi}\sin(\varphi-\theta)\right]$$

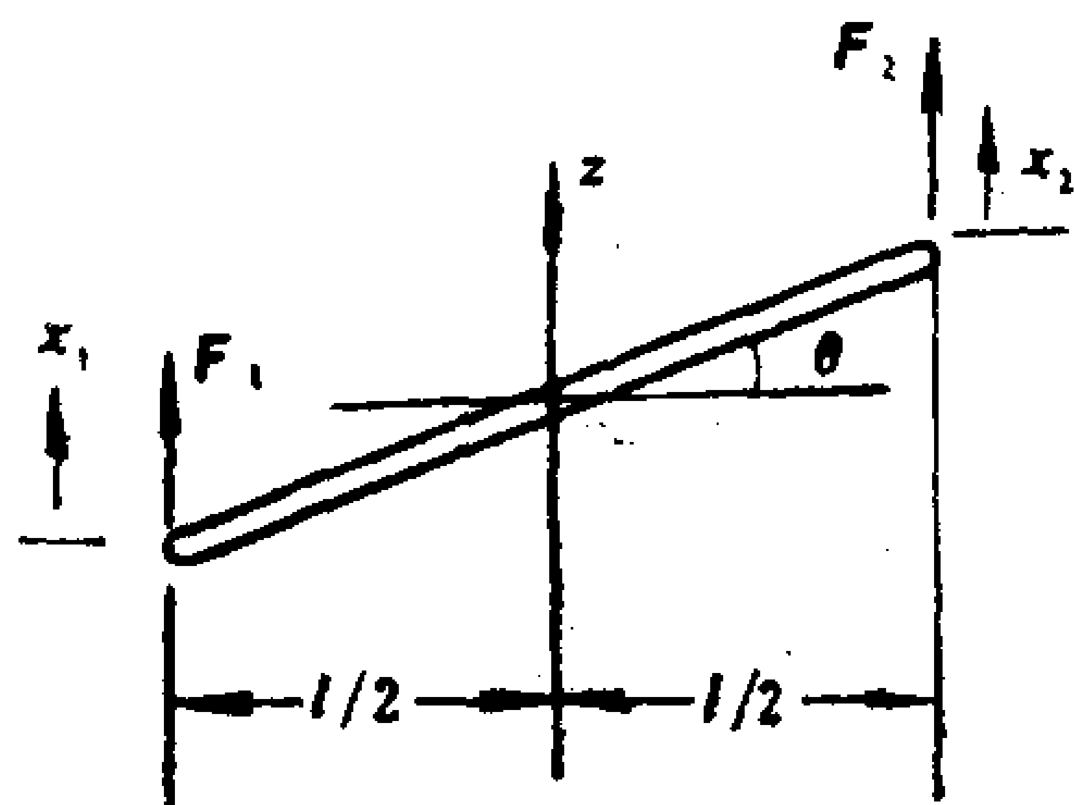
［证明］ 先求AB杆上某点D的速度平方，我们有

$$
\begin{aligned}
v_D^2 &= [\dot{\varphi}x+(l+\xi)\dot{\theta}\cos(\varphi-\theta)-\dot{\xi}\sin(\varphi-\theta)]^2 \\
&\quad +[(l+\xi)\dot{\theta}\sin(\varphi-\theta)+\dot{\xi}\cos(\varphi-\theta)]^2(l+\xi)\dot{\theta} \\
&= (l+\xi)^2\dot{\theta}^2+\dot{\xi}^2+\dot{\varphi}^2x^2+2(l+\xi)\dot{\theta}\cos(\varphi-\theta)\dot{\varphi}x \\
&\qquad -2\dot{\varphi}x\dot{\xi}\sin(\varphi-\theta)
\end{aligned}
$$

而系统的动能为

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\int_0^{2a}\left(\frac{m}{2a}dx\right)\Big[\dot{\xi}^2+(l+\xi)^2\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2x^2 \\
&\qquad +2(l+\xi)\dot{\theta}\cos(\varphi-\theta)\dot{\varphi}x \\
&\qquad -2\dot{\varphi}x\dot{\xi}\sin(\varphi-\theta)\Big] \\
&= \frac{m}{2}\left[\dot{\xi}^2+(l+\xi)^2\dot{\theta}^2+\frac{4}{3}a^2\dot{\varphi}^2\right. \\
&\qquad +ma\dot{\varphi}\Big[(l+\xi)\dot{\theta}\cos(\varphi-\theta) \\
&\qquad \left.-\dot{\xi}\sin(\varphi-\theta)\Big]\right]
\end{aligned}
$$

例4-6 长l的刚杆进行小运动，我们以$(x_1,\ x_2)$来表示小运动中杆端的铅直位移。杆的位形由广义坐标(z,θ)给定，其中z是杆中心的铅直位移，θ是转角。试就作用于杆端上的已知力计算广义力θ_z、θ_θ。



例4-6图

[解] 在小运动条件下(θ是小量)有

$$x_1 = z - \frac{l}{2}\theta, \quad x_2 = z + \frac{l}{2}\theta$$

于是

$$\delta x_1 = \delta z - \frac{l}{2}\delta\theta, \quad \delta x_2 = \delta z + \frac{l}{2}\delta\theta$$

给定虚位移

$$\delta z \neq 0, \quad \delta\theta = 0$$

则

$$\delta x_1 = \delta x_2 = \delta z$$

主动力的虚功之和为

$$\delta A_z = F_1\delta x_1 + F_2\delta x_2 = (F_1 + F_2)\delta z$$

按(4.1b)，有

$$Q_z = \frac{(F_1 + F_2)}{\delta z}\delta z = F_1 + F_2$$

再给定虚位移 $\delta\theta \neq 0$，$\delta z = 0$，则

$$\delta x_1 = -\frac{l}{2}\delta\theta, \quad \delta x_2 = \frac{l}{2}\delta\theta$$

主动力的虚功之和便为

$$\delta A_\theta = F_1\delta x_1 + F_2\delta x_2 = (F_2 - F_1)\frac{l}{2}\delta\theta$$

按(4.1b)得

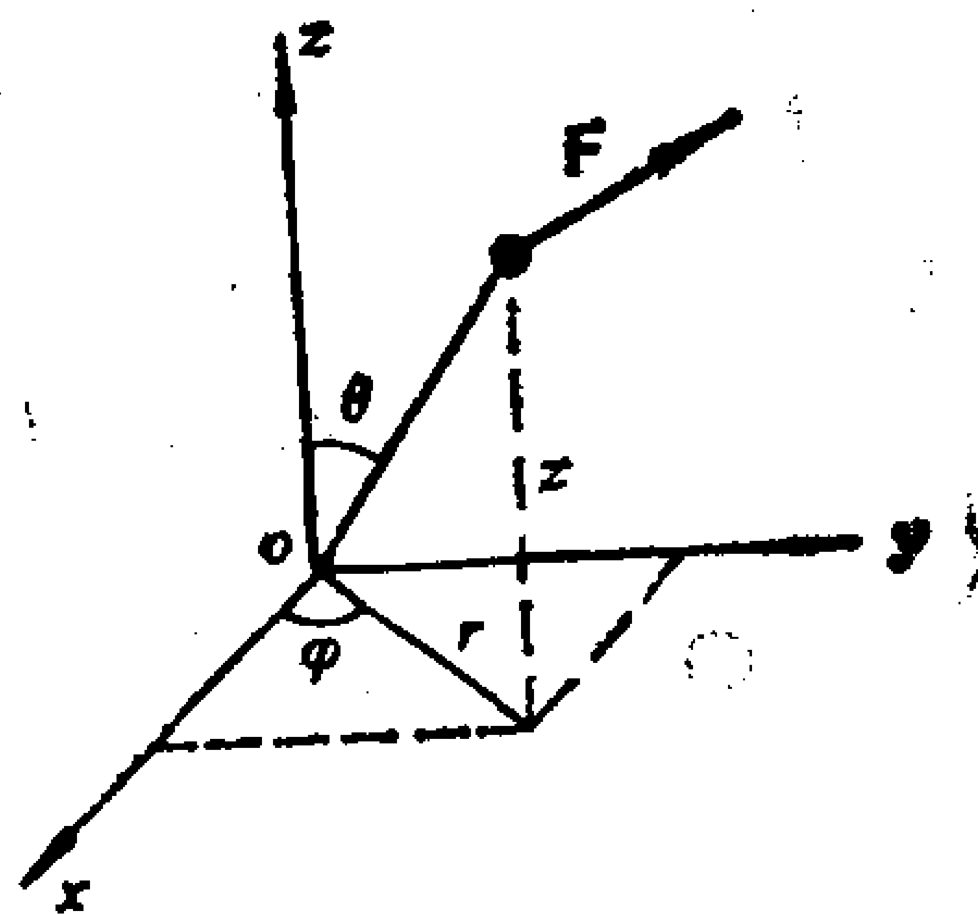
$$Q_\theta = \frac{\delta A_\theta}{\delta_\theta} = \frac{l}{2}(F_2 - F_1)$$

例 4-7 自由质点在力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$的作用下运动。如果取下列曲线坐标：

(1) 柱坐标r，φ，z：$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=z$；

(2) 球坐标r，φ，θ：$x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi$，

$$z=r\cos\theta;$$



例4-7图

(3) 抛物线坐标 u，v，φ：

$$x=\sqrt{uv}\cos\varphi,\quad y=\sqrt{uv}\sin\varphi,\quad z=(u-v)/2$$

作为广义坐标，试求广义力的表达式。

[解] (1)在柱坐标下，有

$$\begin{cases}\delta x=\delta r\cos\varphi-r\sin\varphi\delta\varphi\\ \delta y=\delta r\sin\varphi+r\cos\varphi\delta\varphi\\ \delta z=\delta z\end{cases}\tag{1}$$

首先，令 $\delta r\neq0$，$\delta\varphi=\delta z=0$，则

$$\delta x=\delta r\cos\varphi,\quad \delta y=\delta r\sin\varphi$$

主动力的虚功之和为

$$\delta A_r=F_x\delta_x+F_y\delta y+F_z\delta z=F_x\cos\varphi\delta r+F_y\sin\varphi\delta r$$

按(4.1b)，得

$$Q_r=\frac{\delta A_r}{\delta r}=\frac{(F_x\cos\varphi+F_y\sin\varphi)\delta r}{\delta r}=F_x\cos\varphi+F_y\sin\varphi\tag{2}$$

其次，令　$\delta\varphi\neq 0$，$\delta r=\delta z=0$，则

$$\delta x=-r\sin\varphi\delta\varphi,\quad \delta y=r\cos\varphi\delta\varphi$$

我们有

$$\delta A_\varphi=-F_x\sin\varphi r\delta\varphi+F_y\cos\varphi r\delta\varphi$$

$$Q_\varphi=\frac{(-F_x\sin\varphi+F_y\cos\varphi)r\delta\varphi}{\delta\varphi}$$

$$=(-F_x\sin\varphi+F_y\cos\varphi)r \tag{3}$$

最后，令　$\delta z\neq 0$，$\delta r=\delta\varphi=0$，则

$$\delta x=\delta_y=0,\quad \delta_z\neq 0$$

我们有

$$\delta A_z=F_z\delta z,\qquad Q_z=\frac{F_z\delta z}{\delta z}=F_z \tag{4}$$

（2）在球坐标下，有

$$\begin{cases}\delta x=\sin\theta\cos\varphi\delta r+r\cos\theta\cos\varphi\delta\theta-r\sin\theta\sin\varphi\delta\varphi\\ \delta y=\sin\theta\sin\varphi\delta r+r\cos\theta\sin\varphi\delta\theta+r\sin\theta\cos\varphi\delta\varphi\\ \delta z=\delta r\cos\theta-r\sin\theta\delta\theta\end{cases} \tag{5}$$

首先，令　$\delta r\neq 0$，$\delta\varphi=\delta\theta=0$，则

$$\delta x=\sin\theta\cos\varphi\delta r,\quad \delta y=\sin\theta\sin\varphi\delta r,$$
$$\delta z=\cos\theta\delta r$$

于是有

$$\delta A_r=F_x\sin\theta\cos\varphi\delta r+F_y\sin\theta\sin\varphi\delta r$$

$$+F_z\cos\theta\delta r$$

$$Q_r=\frac{\delta A_r}{\delta r}=F_x\sin\theta\cos\varphi+F_y\sin\theta\sin\varphi$$

$$+F_z\cos\theta \qquad (6)$$

其次，令 $\delta\varphi\neq0$，$\delta r=\delta\theta=0$，则

$$\delta x=-r\sin\theta\sin\varphi\delta\varphi,\quad \delta y=r\sin\theta\cos\varphi\delta\varphi,$$

$$\delta z=0$$

$$\delta A_\varphi=-F_x\sin\theta\sin\varphi r\delta\varphi$$

$$+F_y\sin\theta\cos\varphi r\delta\varphi$$

$$Q_\varphi=\frac{\delta A_\varphi}{\delta\varphi}=(-F_x\sin\theta\sin\varphi+F_y\sin\theta\cos\varphi)r \qquad (7)$$

最后，令 $\delta\theta\neq0$，$\delta r=\delta\varphi=0$，则

$$\delta x=\cos\theta\cos\varphi r\delta\theta,\quad \delta y=\cos\theta\sin\varphi r\delta\theta,$$

$$\delta z=-\sin\theta r\delta\theta$$

$$\delta A_\theta=F_x\cos\theta\cos\varphi r\delta\theta+F_y\cos\theta\sin\varphi r\delta\theta$$

$$-F_z\sin\theta r\delta\theta$$

$$Q_\theta=\frac{\delta A_\theta}{\delta\theta}=(F_x\cos\theta\cos\varphi+F_y\cos\theta\sin\varphi$$

$$-F_z\sin\theta)r \qquad (8)$$

(3) 在抛物线坐标下，有

$$\begin{cases}\delta x=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\delta u+\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}\cos\varphi\delta v-\sqrt{uv}\sin\varphi\delta\varphi\\ \delta y=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}\sin\varphi\delta u+\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}\sin\varphi\delta v+\sqrt{uv}\cos\varphi\delta\varphi\\ \delta z=\frac{1}{2}(\delta u-\delta v)\end{cases} \qquad (9)$$

首先，令 $\delta u \neq 0$，$\delta v = \delta\varphi = 0$，则

$$\delta x = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} \cos\varphi \delta u, \delta y = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} \sin\varphi \delta u,$$

$$\delta z = \frac{\delta u}{2}$$

$$\delta A_u = \frac{1}{2} F_x u^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} \cos\varphi \delta u + \frac{1}{2} F_y u^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}}$$

$$\sin\varphi \delta u + \frac{1}{2} F_z \delta u$$

$$Q_u = \frac{\delta A_u}{\delta u} = \frac{1}{2}\left[F_x u^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} \cos\varphi\right.$$

$$\left. + F_y u^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} \sin\varphi + F_z\right] \tag{10}$$

其次，令 $\delta v \neq 0$，$\delta u = \delta\varphi = 0$，则

$$\delta x = \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} \cos\varphi \delta v,$$

$$\delta y = \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} \sin\varphi \delta v,$$

$$\delta z = -\frac{1}{2} \delta v$$

$$\delta A_v = \frac{1}{2} F_x u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} \cos\varphi \delta v$$

$$+ \frac{1}{2} F_y u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} \sin\varphi \delta v - \frac{1}{2} F z \delta v$$

$$Q = \frac{\delta Av}{\delta v} = \frac{1}{2}\left[F_x u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} \cos\varphi\right.$$

$$\left. + F_y u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} \sin\varphi - Fz\right] \tag{11}$$

最后，令 $\delta\varphi \neq 0$，$\delta u = \delta v = 0$，则

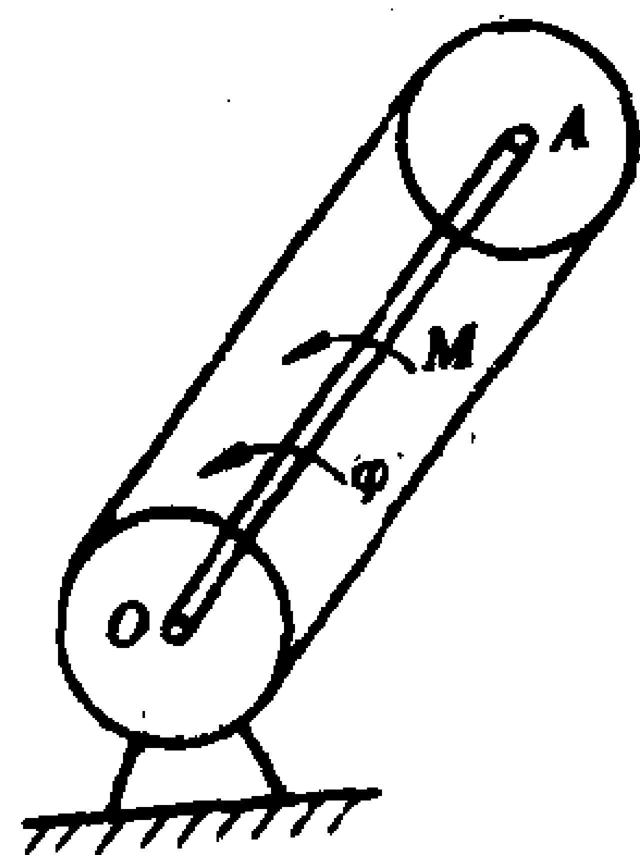
$$\delta x = -\sqrt{uv}\sin\varphi\delta\varphi, \quad \delta y = \sqrt{uv}\cos\varphi\delta\varphi,$$

$$\delta z = 0$$

$$\delta A_{\varphi} = -F_x\sqrt{uv}\sin\varphi\delta\varphi + F_y\sqrt{uv}\cos\varphi\delta\varphi$$

$$Q_{\varphi} = \frac{\delta A_{\varphi}}{\delta\varphi} = (-F\sin\varphi + F_y\cos\varphi)\sqrt{uv} \tag{12}$$

例4-8 曲柄 $oA=l$，由转矩M使其绕一固定滑轮的中心转动，滑轮半径为r。曲柄的一端A上带一动滑轮，其半径为r。定滑轮与动滑轮用皮带联结，皮带被拉紧，使当系统运动时，皮带不沿轮缘滑动。设曲柄为均质杆，重为P，滑轮重Q，机构在水平面内，试求曲柄的角加速度。



例4-8图

［解］ 按题意知动滑轮作平动，故动能为

$$T = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}(l\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}\frac{P}{3g}l^2\dot{\varphi}^2 \tag{1}$$

广义力为

$$Q_{\varphi} = M \tag{2}$$

由拉格朗日方程(4-1)给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = Q_{\varphi} \tag{3}$$

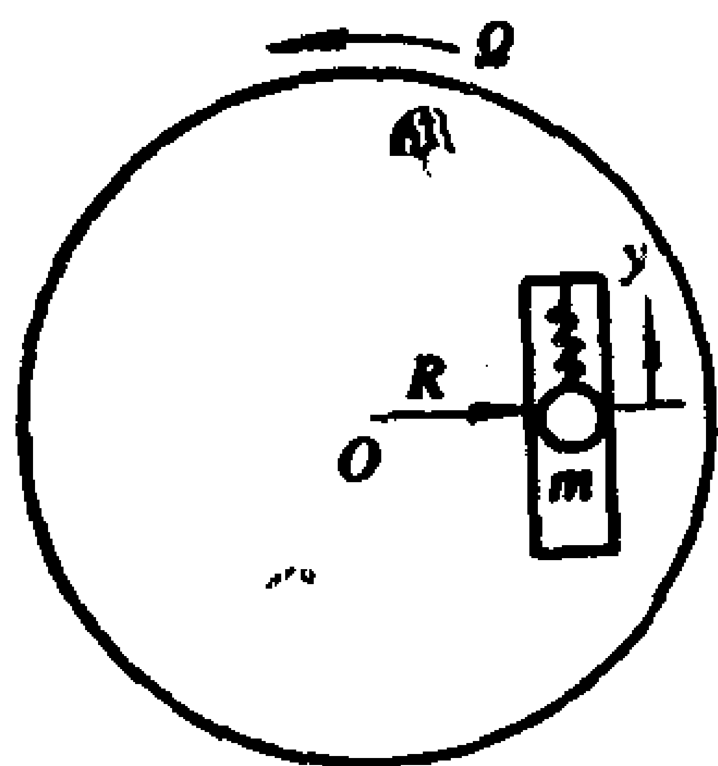
将(1)、(2)代入(3)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{l^2}{2g}\left(Q + \frac{P}{3}\right)2\dot{\varphi}\right] = M \tag{4}$$

于是

$$\ddot{\varphi} = \frac{3Mg}{(P+3Q)l^2} \tag{5}$$

例4-9 质量为m的质点可在水平转台上的直槽内无摩擦地滑动。转台以匀角速度Ω绕通过其中心O的铅直轴转动。坐标y代表质点相对于转台的位置，当弹簧是原长时，y等于零，而这时质点到中心O的距离为最小值R。试应用拉格朗日方法求出运动微分方程。



例4-9图

［解］ 本题为单自由度系统，取y为广义坐标。质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m[(R^2+y^2)\Omega^2+\dot{y}^2+2R\Omega\dot{y}]$$

于是有

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=m(\dot{y}+R\Omega),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)=m\ddot{y},$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=m\Omega^2 y \tag{1}$$

广义力为

$$Q_y=\frac{\delta A_y}{\delta y}=\frac{-ky\delta y}{\delta y}=-ky \tag{2}$$

拉格朗日方程(4-1)给出

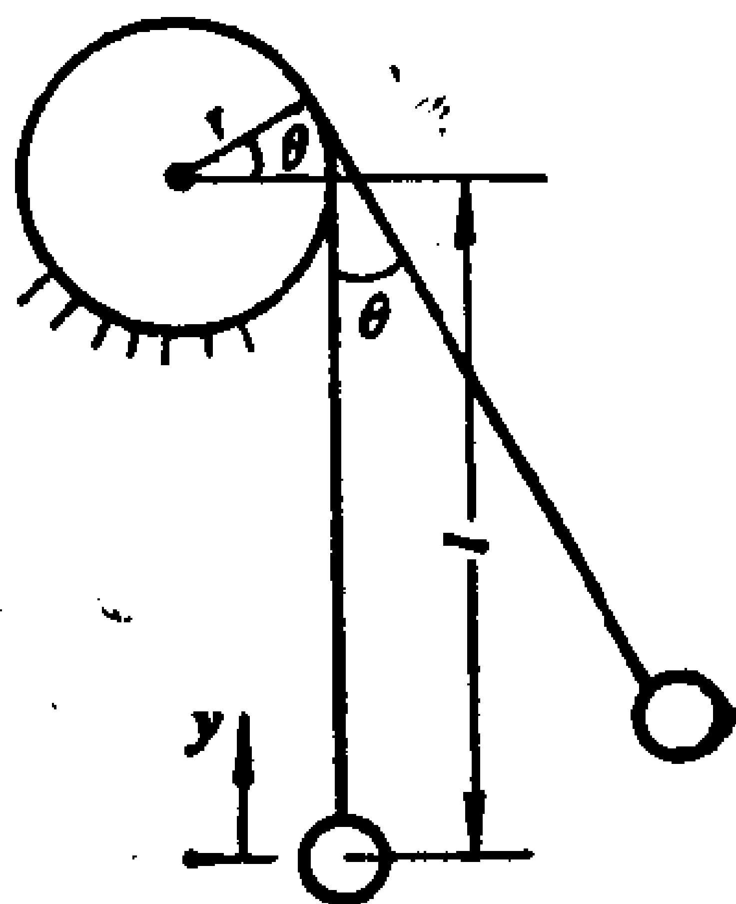
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial T}{\partial y}=Q_y \tag{3}$$

将(1)和(2)代入(3)，得

$$m\ddot{y}-m\Omega^2 y+ky=0 \tag{4}$$

五张一

例4-10 一质点质量为 m，挂在一条线上，线的另一端绕在半径为 r 的固定圆柱体上。设在平衡位置时线长为 l，且不计线的质量。试列写所组成摆的运动微分方程。



例4-10图

［解］ 问题为单自由度系统，取θ 为广义坐标。质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(l+r\theta)^2\dot{\theta}^2 \qquad (1)$$

再计算广义力，因

$$y=l+r\sin\theta-(l+r\theta)\cos\theta$$

$$\delta y=r\cos\theta\delta\theta-r\delta\theta\cos\theta+(l+r\theta)\sin\theta\delta\theta$$

$$=(l+r\theta)\sin\theta\delta\theta$$

$$\delta A_\theta=-mg(l+r\theta))\sin\theta\delta\theta$$

故

$$Q_\theta=\frac{\delta A_\theta}{\delta\theta}=-mg(l+r\theta))\sin\theta \qquad (2)$$

由(1)知

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=m(l+r\theta))^2\dot{\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right)=m(l+r\theta)^2\ddot{\theta}+2m(l+r\theta)r\dot{\theta}^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta}=m\dot{\theta}^2(r\theta+l)r \qquad (3)$$

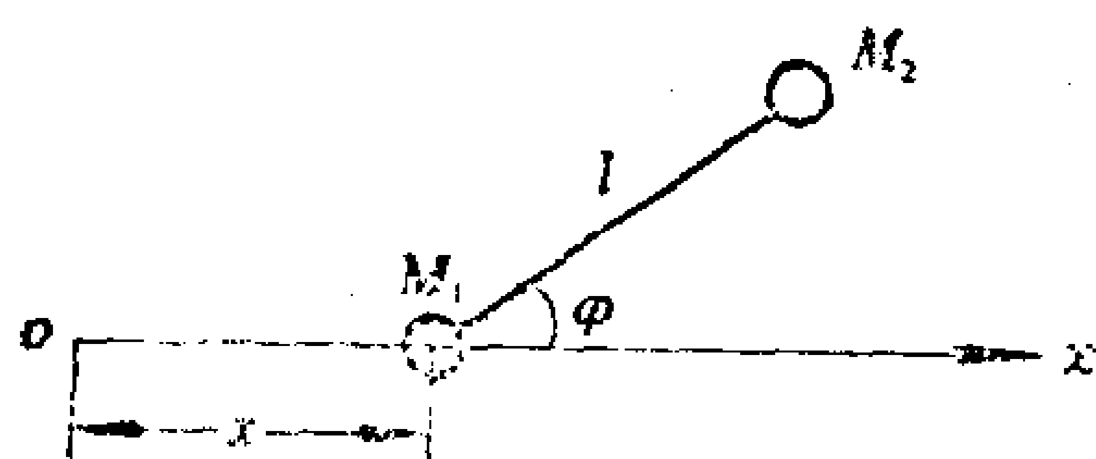
代入拉格朗日方程(4-1)，得

$$m(l+r\theta)^2\ddot{\theta}+2m(l+r\theta)r\dot{\theta}^2$$

$$-m(l+r\theta)r\dot{\theta}^2=-mg(l+r\theta)\sin\theta$$

即 $$(l+r\theta)\ddot{\theta}+r\dot{\theta}^2+g\sin\theta=0$$

例4-11 质量为m_1的质点M_1被限制在水平固定直线ox上无摩擦地滑动；一质量为m_2的质点M_2用一质量可以忽略的长l的杆和前一质点相联，此杆仅能在通过该固定直线的铅垂平面内运动。如此二质点仅受重力作用，求此系统的拉格朗日函数。



例4-11图

[解] 取x、φ为广义坐标，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2\left[(\dot{x}\cos\varphi)^2+(l\dot{\varphi}-\dot{x}\sin\varphi)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2-m_2xl\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{1}$$

系统的势能为

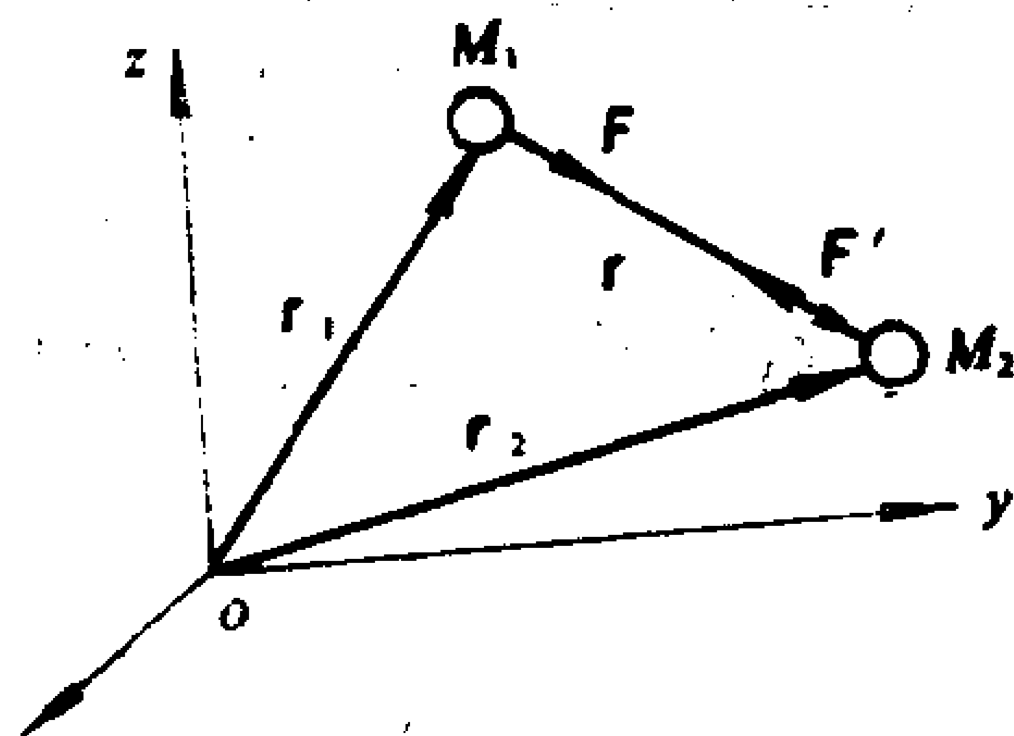
$$V=mgl\sin\varphi \quad (ox\text{轴作为零势能线}) \tag{2}$$

故拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2$$

$$-m_2xl\dot{\varphi}\sin\varphi-mgl\sin\varphi \tag{3}$$

例4-12 试写出按牛顿定律(相互引力为fm_1m_2/r^2，f为常数，m_1、m_2为质量，r为两点间的距离)相互吸引的两自由质点$M_1(x_1,y_1,z_1)$及$M_2(x_2,y_2,z_2)$的拉格朗日函数(用直角坐标表示)。



例4-12图

［解］ 系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2)+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2+\dot{z}_2^2) \tag{1}$$

因 $\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}$

故 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2-\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1=\mathrm{d}\boldsymbol{r}$

又

$$\boldsymbol{F}=\frac{fm_1m_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{fm_1m_2}{r^3}\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{F}'=-\boldsymbol{F}$$

$$\mathrm{d}A=\mathrm{d}A_1+\mathrm{d}A_2=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{F}'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2=\frac{fm_1m_2}{r^3}\boldsymbol{r}$$

$$\times(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1-\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2)=-\frac{fm_1m_2}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$=-\frac{fm_1m_2}{r^3}r\mathrm{d}r=-\frac{fm_1m_2}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\mathrm{d}\left(\frac{fm_1m_2}{r}\right)$$

因此 力函数$U=\dfrac{fm_1m_2}{r}$

$$\text{势能}\quad V=-U=-\frac{fm_1m_2}{r} \tag{2}$$

式中

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

而拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2)+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2+\dot{z}_2^2)$$

$$+\frac{fm_1m_2}{r} \tag{3}$$

例4-13 已知系统的拉格朗日函数

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i\dot{q}_i^2+2q_i\dot{q}_i\sin t)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(c_i-\cos t)q_i^2\quad (c_i=\text{const},a_i=\text{const})$$

求系统的运动方程。

[解] 将L代入拉格朗日方程(4-2)，因

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=a_i\dot{q}_i+q_i\sin t,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=a_i\ddot{q}_i+\dot{q}_i\sin t+q_i\cos t$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}=\dot{q}_i\sin t-(c_i-\cos t)q_i=\dot{q}_i\sin t$$

$$-c_iq_i+q_i\cos t$$

便得

$$a_i\ddot{q}_i+c_iq_i=0$$

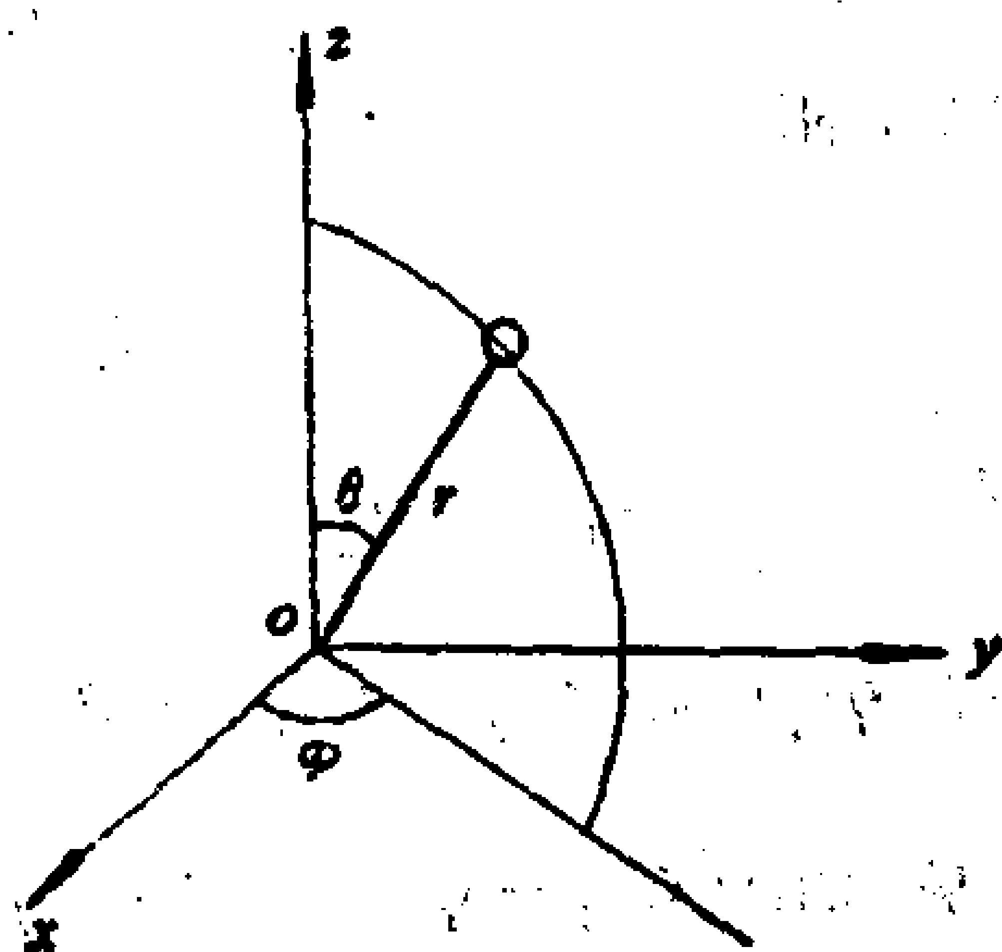
或

$$\ddot{q}_i+k_i^2q_i=0, \quad k_i^2=\frac{c_i}{a_i} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

例4-14 在势能为$V=-\dfrac{\gamma}{r}(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$的引力场中静止质量为$m_0$的相对论性粒子，其拉格朗日函数在笛卡尔直角坐标中具有形式

$$L=-m_0c^2\sqrt{1-(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)/c^2}+(\gamma/\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

式中c是光速，求粒子在球坐标中的拉格朗日函数。



例4-14图

[解] 因

而 $x=r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y=r\sin\theta\sin\varphi,$
$z=r\cos\theta$

于是

$$\dot{x}=\dot{r}\sin\theta\cos\varphi+r\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi-r\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi$$

$$\dot{y}=\dot{r}\sin\theta\cos\varphi+r\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi+r\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi$$

$$\dot{z}=\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta$$

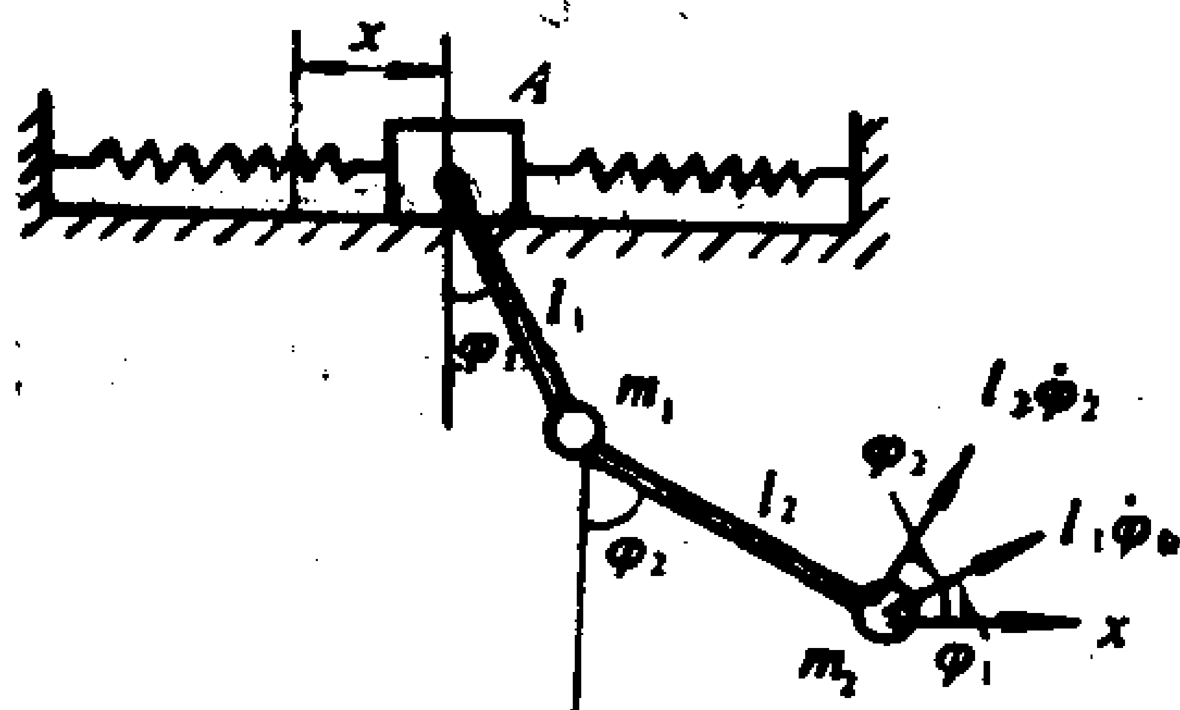
$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\Phi}^2\sin^2\theta$$

代入L中，得

$$L=-m_0c^2\sqrt{1-(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta)/c^2}+(\gamma/r)$$

例4-15 质量为m的滑块A在光滑的水平导板上移动。滑块上悬挂质点M_1和M_2，质量分别为m_1和m_2，长度为l_1和l_2的双数学摆。滑块用两根刚度都为c的弹簧与固定墙联结。试以拉格朗日方程形式建立系统的运动微分方程。

[解] 系统有三个自由度，取广义坐标为x，φ_1，φ_2，其中x轴原点取在滑块A的平衡位置。令M_1和M_2的速度分别为v_1和v_2，我们有



例4-15图

$$v_1^2=\dot{x}^2+l_1^2\dot{\varphi}^2+2\dot{x}l_1\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1$$

$$\begin{aligned}v_2^2=&\ [l_2\dot{\varphi}_2+l_1\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_2-\varphi_1)+\dot{x}\cos\varphi_2]^2\\&+[l_1\dot{\varphi}_1\sin(\varphi_2-\varphi_1)+\dot{x}\sin\varphi_2]^2\\=&\ l_2^2\dot{\varphi}_2^2+l_1^2\dot{\varphi}_1^2+2l_1\dot{\varphi}_1\dot{x}\cos\varphi_1+\dot{x}^2\\&+2l_2\dot{\varphi}_2l_1\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_2-\varphi_1)+2l_2\dot{\varphi}_2\dot{x}\cos\varphi_2\end{aligned}$$

系统的动能为

$$\begin{aligned}T=&\ \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2\\=&\ \frac{1}{2}(m+m_1+m_2)\dot{x}^2+\frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1\dot{\varphi}_1(l_1\dot{\varphi}_1\\&+2\dot{x}\cos\varphi_1)+\frac{1}{2}m_2l_2\dot{\varphi}_2[l_2\dot{\varphi}_2\\&+2\dot{x}\cos\varphi_2+2l_1\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_2-\varphi_1)]\end{aligned}$$

势能为

$$V=-m_1 g l_1 \cos\varphi_1 - m_2 g(l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2)$$
$$+\frac{1}{2}2cx^2$$

拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}(m+m_1+m_2)\dot{x}^2+$$
$$+\frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1\dot{\varphi}_1(l_1\dot{\varphi}_1+2\dot{x}\cos\varphi_1)$$
$$\frac{1}{2}m_2 l_2\dot{\varphi}_2\Big[l_2\dot{\varphi}_2+2\dot{x}\cos\varphi_2$$
$$+2l_1\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_2-\varphi_1)\Big]$$
$$+(m_1+m_2)gl_1\cos\varphi_1+m_2 g l_2\cos\varphi_2-cx^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=(m+m_1+m_2)\dot{x}+(m_1+m_2)l_1\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1$$
$$+m_2 l_2\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=(m+m_1+m_2)\ddot{x}+(m_1+m_2)l_1[\ddot{\varphi}_1\cos\varphi_1$$
$$-\dot{\varphi}_1^2\sin\varphi_1]+m_2 l_2[\ddot{\varphi}_2\cos\varphi_2-\dot{\varphi}_2^2\sin\varphi_2]$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-2cx$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}=(m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1+m_2 l_2\dot{\varphi}_2 l_1\cos(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}=(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1+m_2 l_1 l_2[\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_2$$
$$-\varphi_1)+\dot{\varphi}_2(\dot{\varphi}_2-\dot{\varphi}_1)\sin(\varphi_2-\varphi_1)]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1}=-(m_1+m_2)l_1\dot{\varphi}_1\dot{x}\sin\varphi_1-m_2 l_2\dot{\varphi}_2 l_1\dot{\varphi}_1\sin(\varphi_2$$

$$-\varphi_1)-(m_1+m_2)gl_1\sin\varphi_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}=m_2l_2^2\dot{\varphi}_2+m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$+m_2l_2\dot{x}\cos\varphi_2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}=m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2+m_2l_1l_2[\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_2-\varphi_1)-\dot{\varphi}_1(\dot{\varphi}_2$$

$$-\dot{\varphi}_1)\sin(\varphi_2-\varphi_1)+m_2l_2(\ddot{x}\cos\varphi_2$$

$$-\dot{x}\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2}=-m_2l_2\dot{\varphi}_2[\dot{x}\sin\varphi_2+l_1\dot{\varphi}_1\sin(\varphi_2-\varphi_1)]$$

$$-m_2gl_2\sin\varphi_2$$

将以上表达式代入拉格朗日方程(4-2)，得

$$(m+m_1+m_2)\ddot{x}+(m_1+m_2)l_1\cos\varphi_1\ddot{\varphi}_1+m_2l_2\cos\varphi_2\ddot{\varphi}_2$$

$$-(m_1+m_2)l_1\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1^2-m_2l_2\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2^2$$

$$+2cx=0 \qquad (1)$$

$$(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1+m_2l_1l_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)\ddot{\varphi}_2$$

$$+m_2l_1l_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)\dot{\varphi}_2^2+(m_1+m_2)l_1\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1\dot{x}$$

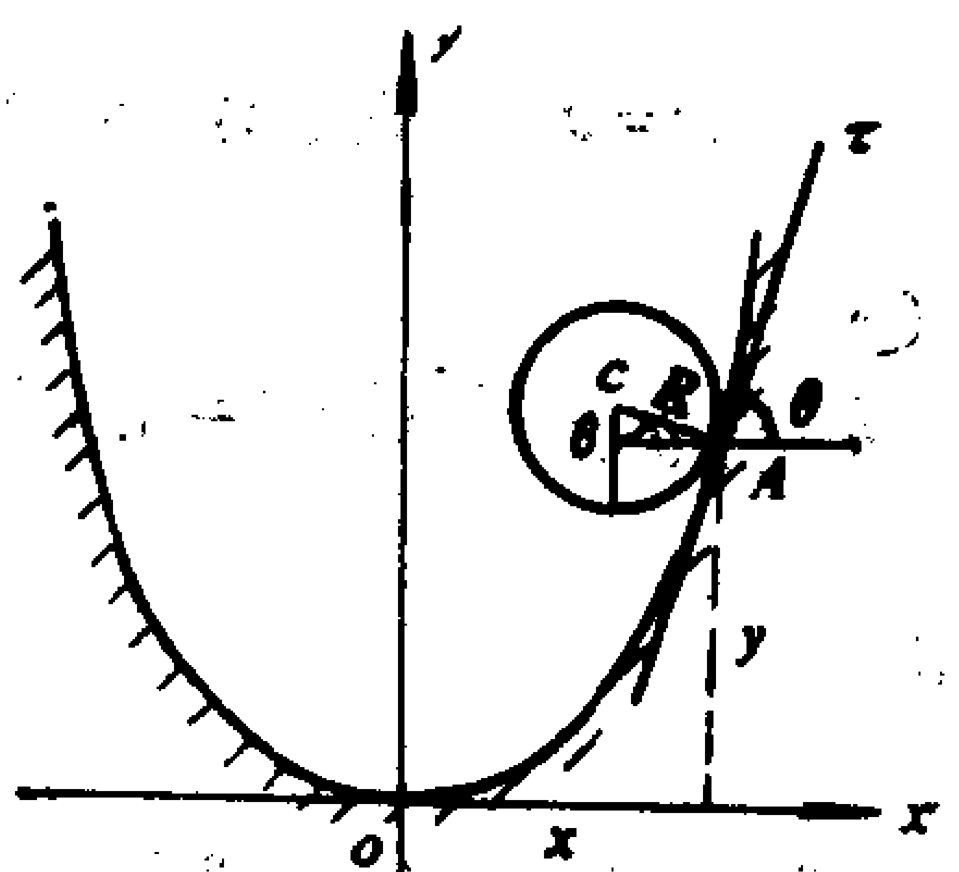
$$+(m_1+m_2)gl_1\sin\varphi_1=0 \qquad (2)$$

$$m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2+m_2l_1l_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)\ddot{\varphi}_1+m_2l_1l_2\sin(\varphi_2$$

$$-\varphi_1)\dot{\varphi}_1^2+m_2l_2\cos\varphi_2\ddot{x}+m_2gl_2\sin\varphi_2=0$$

$$(3)$$

例4-16 半径为R，质量为m的均质圆盘沿抛物线$y=ax^2/2$无滑动地滚动。轴oy是铅垂的，$Ra\leqslant 1$。取切点横坐标x作广义坐标，试写出拉格朗日函数。



例4-16 图

[解] 设圆盘切点A(如图示)的坐标为(x, y)，则抛物线在A点的切线斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{tg}\theta=ax$$

而$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2x^2}}$,

$$\sin\theta=\mathrm{tg}\,\theta\cos\theta=\frac{ax}{\sqrt{1+a^2x^2}}$$

又 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{tg}\theta)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ax)$

即

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

因此得

$$\dot{\theta}=\frac{a\dot{x}}{1+a^2x^2} \tag{1}$$

设圆盘质心坐标为(x_c, y_c)，我们有

$$x_c=x-R\sin\theta$$

$$yc=y+R\cos\theta$$

于是

$$\dot{x}_c=\dot{x}-R\dot{\theta}\cos\theta=\dot{x}\left(1-\frac{aR}{(1+a^2x^2)^{3/2}}\right)$$

$$\dot{y}_c=\dot{y}-R\dot{\theta}\sin\theta=ax\dot{x}\left(1-\frac{aR}{(1+a^2x^2)^{3/2}}\right)$$

因此

$$v_c^2=\dot{x}_c^2+\dot{y}_c^2=\dot{x}^2(1+a^2x^2)\left(1-\frac{aR}{(1+a^2x^2)^{3/2}}\right)^2$$

$$=\dot{x}^2\left[\frac{(1+a^2x^2)^{3/2}-aR}{1+a^2x^2}\right]^2 \tag{2}$$

又圆盘滚动角速度(绕瞬心A转动的角速度)为

$$\omega=\frac{v_c}{R} \tag{3}$$

因此圆盘的动能和势能为

$$T=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{4}(mR^2)\omega^2=\frac{3}{4}mv_c^2$$

$$=\frac{3}{4}m\dot{x}^2\left[\frac{(1+a^2x^2)^{3/2}-aR}{1+a^2x^2}\right]^2 \tag{4}$$

$$V=mgy_c=mg(y+R\cos\theta)=mg\left(\frac{1}{2}ax^2+\frac{R}{\sqrt{1+a^2x^2}}\right) \tag{5}$$

$$=\frac{1}{2}mga\left[x^2+\frac{2R}{a}(1+a^2x^2)^{-1/2}\right]$$

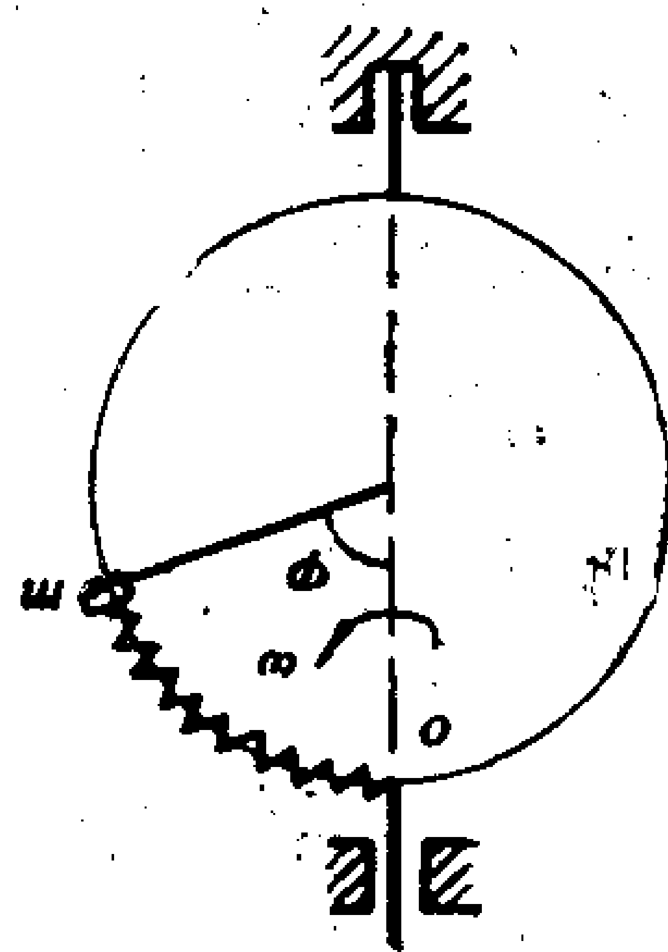
而拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{3}{4}m\dot{x}^2\left[\frac{(1+a^2x^2)^{3/2}-aR}{1+a^2x^2}\right]^2$$

$$-\frac{1}{2}mga\left[x^2+\frac{2R}{a}(1+a^2x^2)^{-1/2}\right]$$

(6)

例4-17 半径为R的光滑金属线圆周以匀角速度ω绕其铅垂直径转动。在圆周上套有质量为m的圆环，圆环用刚度为c的弹簧与圆周上的o点联结，如图所示。弹簧在未变形状态下的长度等于$R\varphi_0$。试以拉格朗日方程形式建立圆环的相对运动微分方程。



例4-17图

〔解〕 系统有一个自由度，取φ为广义坐标。圆环的动能为

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(R^2\dot{\varphi}^2+R^2\omega^2\sin^2\varphi) \tag{1}$$

取弹簧自由端为弹性力势能零点，大圆环中心为重力势能零点，则系统的势能为

$$V=mgR\cos\varphi+\frac{1}{2}c(R\varphi-R\varphi_0)^2 \tag{2}$$

拉格朗日函数

$$L=T-V=\frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi}^2+\omega^2\sin^2\varphi)-mgR\cos\varphi$$
$$-\frac{1}{2}cR^2(\varphi-\varphi_0)^2 \tag{3}$$

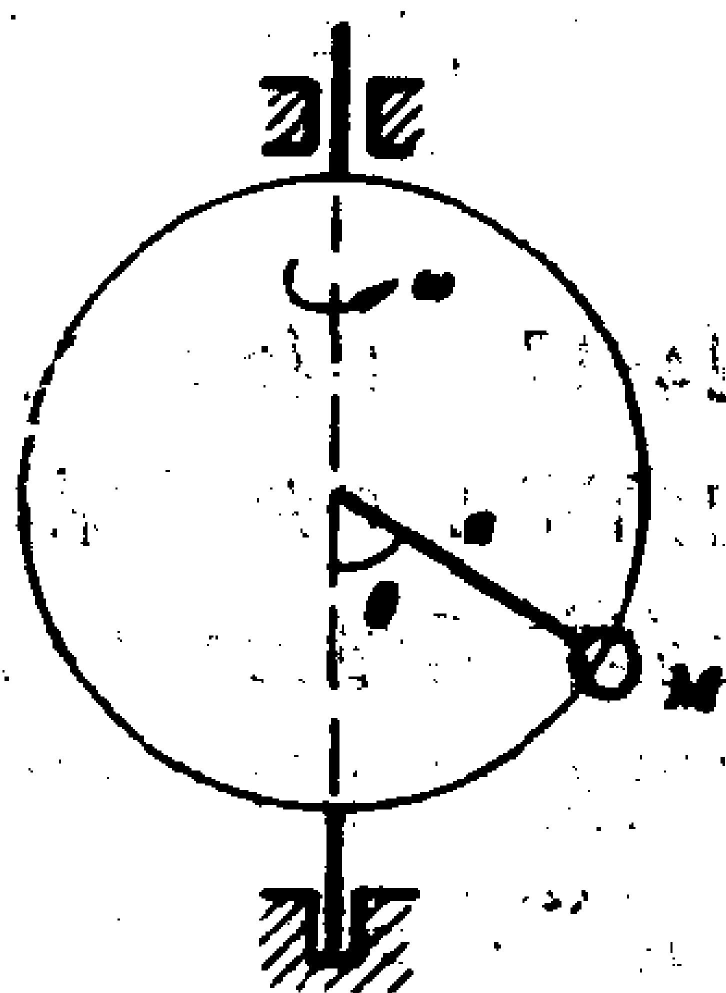
将(3)代入拉格朗日方程(4-2)得

$$mR^2\ddot{\varphi}-mR^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi-mgR\sin\varphi+cR^2(\varphi-\varphi_0)=0 \tag{4}$$

这就是圆环的相对运动微分方程。

例 4-18 一圆环以角速度 $\sqrt{ng/a}$ 绕其铅垂直径转动，环上套一小珠。今给小珠以初速度，使它恰可以从环的最低点沿环升至最高点，试证质点走完90°所需要时间为

$$\sqrt{\frac{a}{(n+1)g}}\ln(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})$$



例4-18图

〔解〕 系统有一个自由度，以广义坐标 θ 表示小珠在环上的位置，如图示。系统的动能和势能分别为

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(a^2\omega^2\sin^2\theta+a^2\dot{\theta}^2)$$

$$V=mga(1-\cos\theta)$$

由题意知 $\omega=\sqrt{ng/a}$，拉格朗日函数

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(nag\sin^2\theta+a^2\dot{\theta}^2)-mga(1-\cos\theta) \tag{1}$$

将(1)代入拉格朗日方程(4-2)，得

$$ma^2\ddot{\theta}-mnag\sin\theta\cos\theta=-mga\sin\theta$$

或

$$\ddot{\theta}=\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}=\frac{ng}{a}\sin\theta\cos\theta-\frac{g}{a}\sin\theta \tag{2}$$

由题设条件

$t=0$，$\theta=0$，$\dot{\theta}=\dot{\theta}_0$ 及 $\theta=\pi$，$\dot{\theta}=0$，对上式积分，有

$$\int_{\dot{\theta}_0}^{0}d\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right)=\int_0^{\pi}\frac{ng}{a}\sin\theta d\sin\theta+\int_0^{\pi}\frac{g}{a}d\cos\theta$$

$$-\frac{1}{2}\dot{\theta}_0^2=\frac{ng}{2a}\sin^2\theta\Big|_0^{\pi}+\frac{g}{a}\cos\theta\Big|_0^{\pi}=-\frac{2g}{a}$$

得 $\dot{\theta}_0^2=\frac{4g}{a}$。

将积分式重写成

$$\int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}}d\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right)=\int_0^{\theta}\frac{ng}{2a}\mathrm{d}(\sin^2\theta)+\int_0^{\theta}\frac{g}{a}\mathrm{d}(\cos\theta)$$

得

$$\dot{\theta}^2=\frac{(n+2)}{a}g+\frac{2g}{a}\cos\theta-\frac{ng}{a}\cos^2\theta \tag{3}$$

或

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{g}{a}}(n+2+2\cos\theta-n\cos^2\theta)^{1/2}$$

分离变量

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{(n+2+2\cos\theta-n\cos^2\theta)^{1/2}}=\sqrt{\frac{g}{a}}\mathrm{d}t$$

令 $z=\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}$，则

$$\mathrm{d}\theta=\frac{2\mathrm{d}z}{1+z^2},\quad \cos\theta=\frac{1-z^2}{1+z^2};$$

$t=0$，$\theta=0$，$z=0$；$t=\tau$，$\theta=\frac{\pi}{2}$，$z=1$，代入上式

$$\frac{\mathrm{d}z}{[1+(n-1)z^2]^{1/2}}=\sqrt{\frac{g}{a}}\mathrm{d}t$$

积分此式

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}z}{[1+(n-1)z^2]^{1/2}}=\int_0^{\tau}\sqrt{\frac{g}{a}}\mathrm{d}t$$

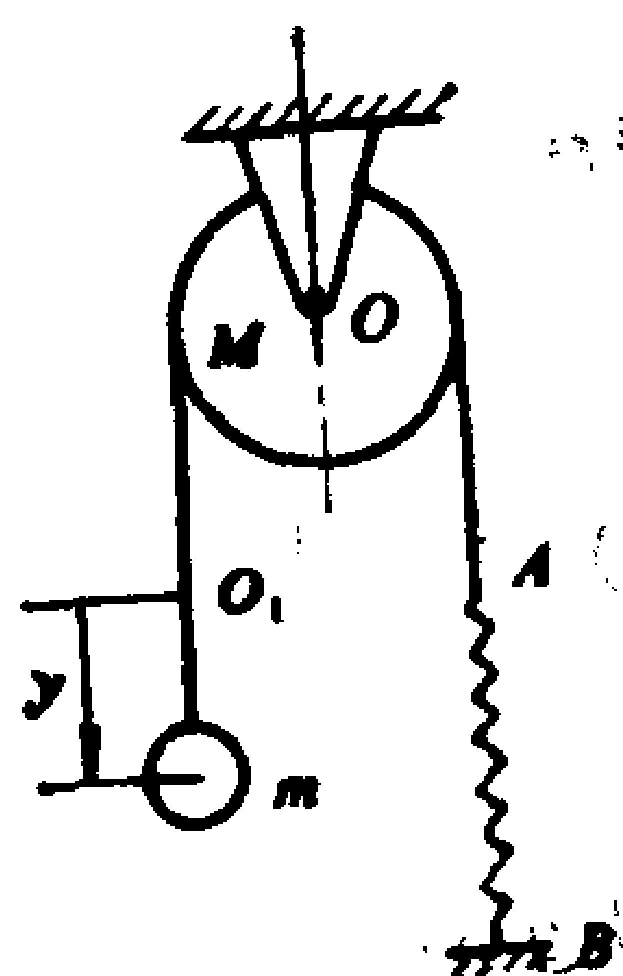
$$\frac{1}{(n+1)^{1/2}}\ln\Big[(n+1)^{1/2}z$$

$$+\sqrt{(n+1)z^2+1}\Big]\Big|_{z=0}^{z=1}=\sqrt{\frac{g}{a}}\tau$$

故

$$\tau=\sqrt{\frac{a}{(n+1)g}}\ln(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}) \qquad (4)$$

例4-19 一滑轮可绕水平轴O转动，在此滑轮上绕过一条不可伸长的绳，绳之一端悬质量为m的重物，另一端A固结一铅垂的弹簧，弹簧的B端固定不动。弹簧张力与其伸长量成比例，比例常数为c(即刚性系数)。已知滑轮质量为m并分布于轮缘上，而绳子与滑轮之间无滑动，试求重物的振动周期。



例4-19图

[解] 系统有一个自由度，取y为广义坐标。系统的动能和势能分别为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{y}^2+\frac{1}{2}(Mr^2)\omega^2$$

$$V=-mgy+\frac{1}{2}c[(y+\delta_0)^2-\delta_0^2]$$

其中δ_0为弹簧的静伸长。

当系统平衡时，$mgr=c\delta_0 r$，$\delta_0=\frac{mg}{c}$，又绳子与滑轮间无滑动，故$\dot{y}=r\omega$。于是，拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{y}^2+\frac{1}{2}M\dot{y}^2+mgy-\frac{1}{2}c[(y+$$

$$+\frac{mg}{c})^2-(\frac{mg}{c})^2\}$$

$$=\frac{1}{2}(m+M)\dot{y}^2-\frac{1}{2}cy^2 \qquad (1)$$

将(1)代入拉格朗日方程(4-2)，得

$$(m+M)\ddot{y}+cy=0\ .$$

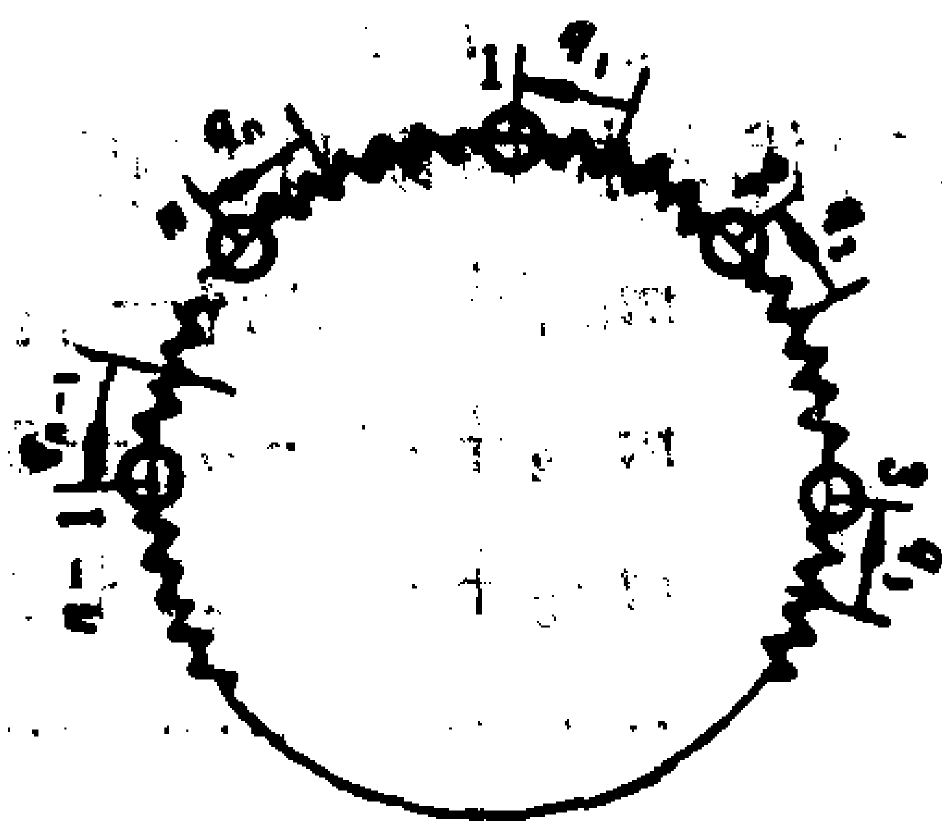
或

$$\ddot{y}+\frac{c}{m+M}y=0 \qquad (2)$$

由此得振动周期为

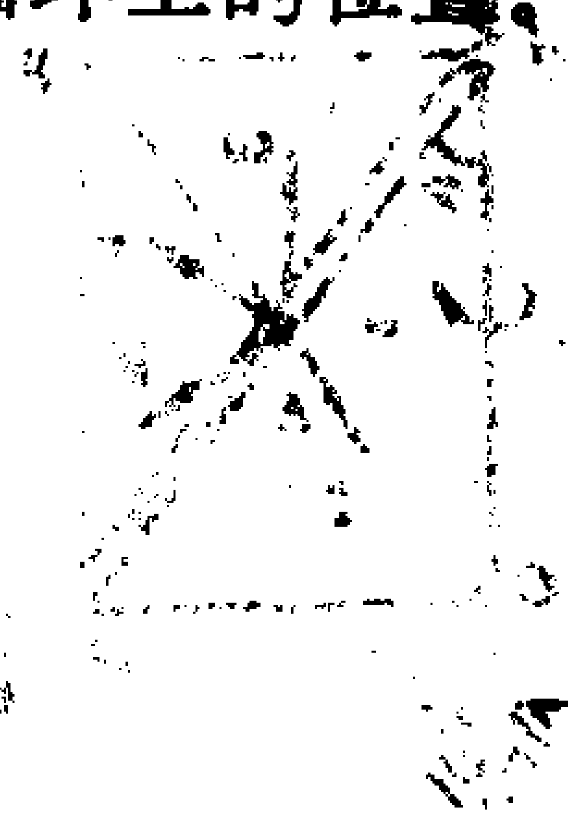
$$T=2\pi\sqrt{\frac{m+M}{c}} \qquad (3)$$

例4-20 系统由 n 个质量各为m 的同类的质点组成。各质点间用刚度为 c 的同样的弹簧联结，并可沿水平面内的半径为 r 的圆环做无摩擦的滑动。试求拉格朗日函数并建立运动微分方程。



例4-20图

[解] 系统有n个自由度，用q_1，q_2，…，q_n 表示n个质点在圆环上的位置。系统的动能为



$$T=\frac{1}{2}m\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{q}_2^2+\cdots+\frac{1}{2}m\dot{q}_n^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m\dot{q}_i^2$$

系统的势能为

$$V=\frac{1}{2}c(q_1-q_n)^2+\frac{1}{2}c(q_2-q_1)^2+\frac{1}{2}c(q_3-q_2)^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{2}c(q_n-q_{n-1})^2=\frac{1}{2}c\left[(q_1-q_n)^2\right.$$

$$\left.+\sum_{i=2}^{n}(q_i-q_{i-1})^2\right]$$

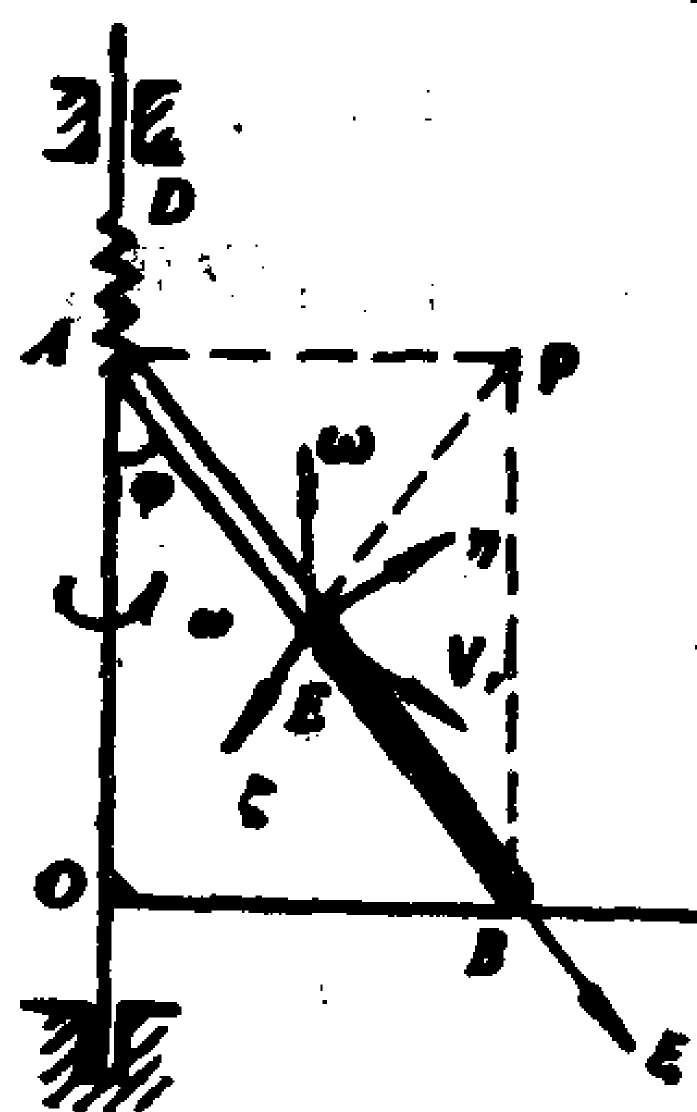
而拉格朗日函数为

$$L=T-V=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m\dot{q}_i^2-\frac{1}{2}\times c\left[(q_1-q_n)^2\right.$$

$$\left.+\sum_{i=2}^{n}(q_i-q_{i-1})^2\right] \tag{1}$$

将(1)代入拉格朗日方程(4-2)，得

$$\left.\begin{aligned}&m\ddot{q}_1+c(2q_1-q_2-q_3)=0\\&m\ddot{q}_2+c(-q_1+2q_2-q_3)=0\\&m\ddot{q}_3+c(-q_2+2q_3-q_4)=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&m\ddot{q}_n+c(-q_{n-1}+2q_n-q_1)=0\end{aligned}\right\} \tag{2}$$



例4-21图

例4-21 质量为m、长度为l的均质杆AB可沿直角DOB的两边无摩擦地滑动，直角边OD是铅垂的。杆的A点用刚度为c的弹簧与固定点D联接，角DOB以匀角速度ω绕OD边转动。如果在$\varphi=\varphi_0$时弹簧不变形，试以拉格朗日方程形式建立杆的相对运动微分方程。

[解] 系统有一个自由度，

取φ为广义坐标由速度瞬心定理求得杆子质心E的相对速度$v_r=l\dot{\varphi}/2$，其牵连速度$v_e=l\omega\sin\varphi/2$

绝对速度平方为

$$v_a^2=v_E^2=v_r^2+v_e^2=\left(\frac{l}{2}\dot{\varphi}\right)^2+\left(\frac{l}{2}\omega\sin\varphi\right)^2$$

杆子的角速度为

$$\Omega=\vec{\dot{\varphi}}+\omega$$

在惯性主轴$E\xi$，$E\eta$，$E\zeta$上的投影分别为

$$\Omega_\zeta=-\omega\cos\varphi,\ \Omega_\eta=\omega\sin\varphi,\ \Omega_\zeta=\dot{\varphi}$$

而杆子的转动惯量为

$$J_\xi=0,\ J_\eta=\frac{1}{12}ml^2,\quad J_\zeta=\frac{1}{2}ml^2$$

杆子的动能为

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}mV_E^2+\frac{1}{2}J_\eta\Omega_\eta^2+\frac{1}{2}J_\zeta\Omega_\zeta^2\\&=\frac{1}{6}ml^2(\dot{\varphi}^2+\omega^2\sin^2\varphi)\end{aligned}$$

系统的势能为

$$V=\frac{1}{2}c(l\cos\varphi-l\cos\varphi_0)^2+mg\frac{l}{2}\cos\varphi$$

于是，拉格朗日函数为

$$\begin{aligned}L=T-V=\frac{1}{6}ml^2(\dot{\varphi}^2+\omega^2\sin^2\varphi)-\frac{1}{2}cl^2(\cos\varphi\\-\cos\varphi_0)^2-\frac{1}{2}mgl\cos\varphi\end{aligned}\qquad(1)$$

将(1)代入拉格朗日方程(4-2)得

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi}-\frac{1}{3}ml^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi-cl^2\sin\varphi(\cos\varphi-\cos\varphi_0)$$

$$-\frac{1}{2}mgl\sin\varphi=0 \qquad (2)$$

此即杆子的相对运动微分方程。

例4-22 已知一标准完整系统，其动能中的 T_1 部分具有如下形式：

$$T_1=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_j=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$$

其中 $f=f(q_1, q_2, \cdots, q_n)$，并且是二次可微的。试证明凡是具有这种形式的 T_1 对运动方程都没有影响。

[证明] 拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \qquad (1)$$

而 $$L=T-V=T_2+T_1+T_0-V \qquad (2)$$

将(2)代入方程(1)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T_2}{\partial q_i}-\frac{\partial T_1}{\partial q_i}-\frac{\partial T_0}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}=0 \qquad (3)$$

因

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}$$

又

$$\frac{\partial T_1}{\partial q_i}=\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i}\dot{q}_j$$

故

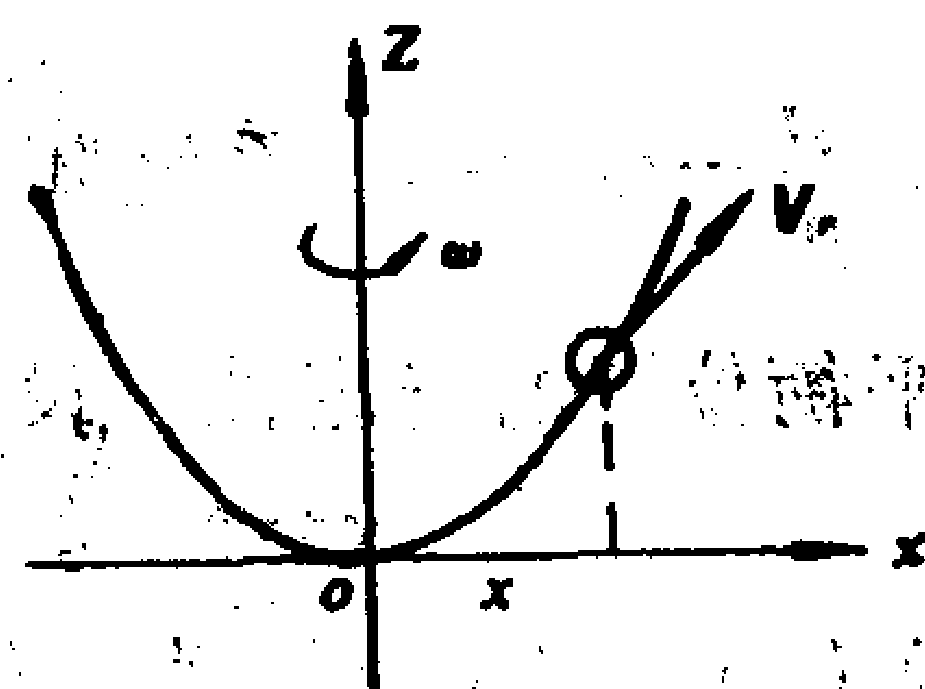
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T_1}{\partial q_i}=0 \qquad (4)$$

将(4)代入(3)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T_2}{\partial q_i}-\frac{\partial T_0}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}=0 \tag{5}$$

因此，$L=T_2+T_0-V$，与T_1无关。

例4-23 一重珠在一弯成抛物线$x^2=2pz$形状的光滑小管内，小管以等角速度ω绕oz轴转动(oz轴正向朝上)，试求珠的相对平衡位置，并讨论这位置的稳定性。



例4-23图

［解］ 系统有一个自由度，取x为广义坐标，系统的动能和势能分别为

$$T=\frac{1}{2}m\left[x^2\omega^2+\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)\dot{x}^2\right]$$

$$V=mg\frac{x^2}{2p}$$

而拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\left[x^2\omega^2+\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)\dot{x}^2\right]-mg\frac{x^2}{2p}$$

将其代入方程(4-2)，得

$$m\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)\ddot{x}-m\left[x\omega^2+\frac{x}{p}\dot{x}^2\right]+mg\frac{x}{p}=0 \tag{1}$$

在系统的平衡位置上，有$\ddot{x}=0$，$\dot{x}=0$

于是 $$-mx\omega^2+mg\frac{x}{p}=0$$

即 $x\left(\frac{g}{p}-\omega^2\right)=0$

若

$$\frac{g}{p}-\omega^2\neq 0,\ 得x=0$$

若

$$\frac{g}{p}-\omega^2=0,\ 系统随遇平衡$$

现讨论平衡位置的稳定性。设干扰量为ξ

$$x=0+\xi=\xi$$

将其代入(1)，得干扰运动微分方程

$$\left(1+\frac{\xi^2}{p^2}\right)\ddot{\xi}-\left[\xi\omega^2+\frac{\xi}{p}\dot{\xi}^2\right]+g\frac{\xi}{p}=0$$

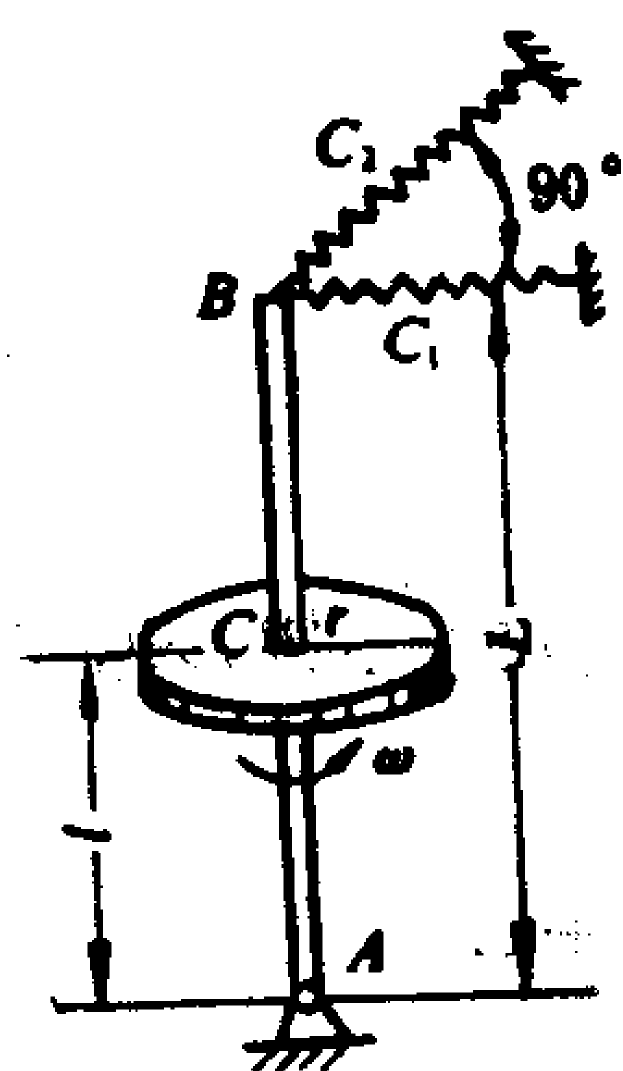
舍去非线性项得

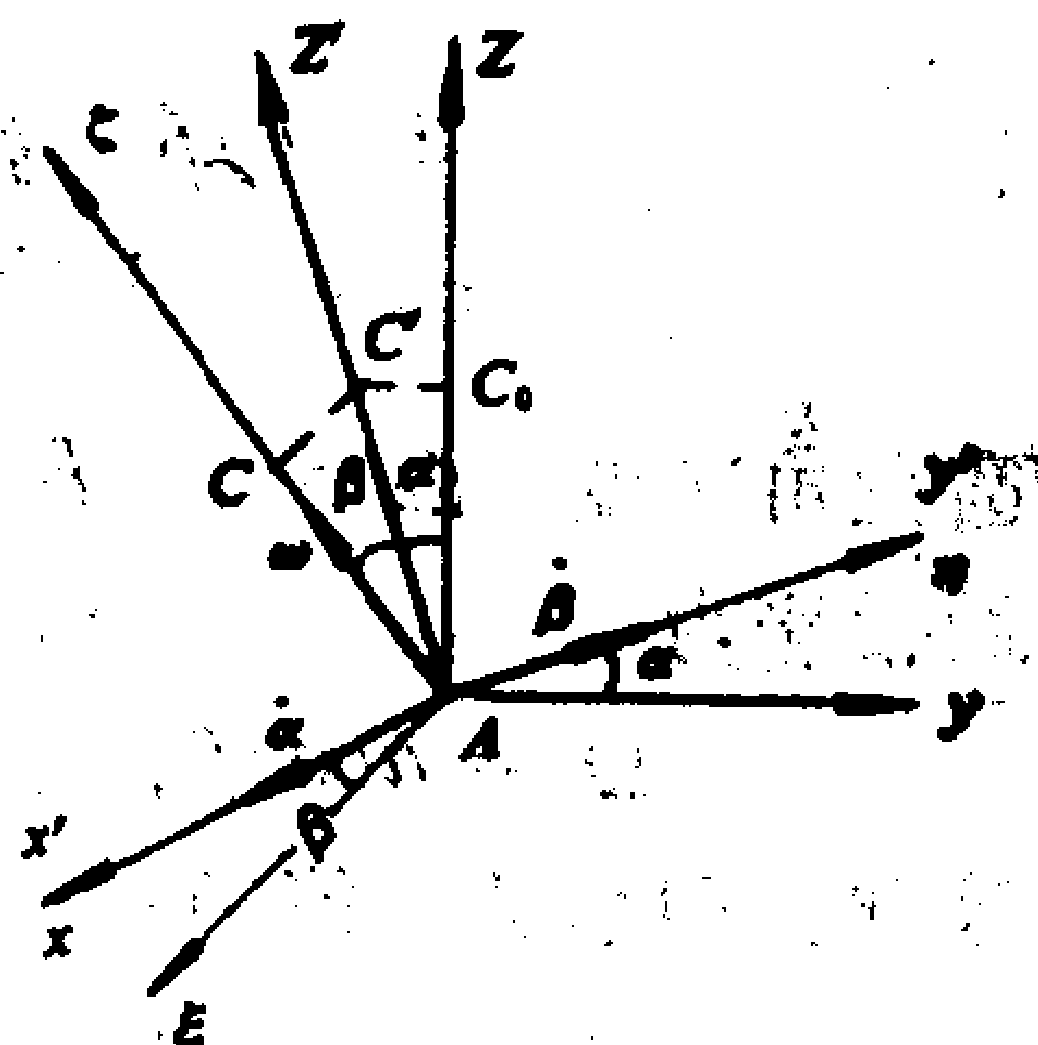
$$\ddot{\xi}+\left(\frac{g}{p}-\omega^2\right)\xi=0 \tag{2}$$

(a) 若$\frac{g}{p}-\omega^2>0$，即$\omega^2<\frac{g}{p}$，则 $x=0$ 为稳定平衡位置。

(b) 若$\frac{g}{p}-\omega^2<0$，$\omega^2>\frac{g}{p}$，则 $x=0$ 为不稳定平衡位置。

例4-24 一均质薄圆盘，半径为r，重为Q，其铅垂对称轴可自由地绕A点转动，并在B点用两弹簧支持。两弹簧的轴线是水平的并相互垂直，它们的刚度分别等于c_1和c_2，且$c_2>c_1$。弹簧固定于圆盘轴端处与轴的下端支点相距L；圆盘到下端支点的距离是l。问应使圆盘有多大的角速度ω，方能保证转动的稳定性？





例4-24图

［解］ 设轴AB的扰动位置用α（绕x轴转动的）和β（绕y'轴转动的）来确定，如图示。圆盘重心高度为

$$z_c = l\cos\alpha\cos\beta$$

于是，圆盘重力势能为

$$V_1 = Qz_c = Ql\cos\alpha\cos\beta \approx Ql\left[1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right]$$

而弹簧的势能为

$$V_2 = \frac{1}{2}c_1(L\alpha)^2 + \frac{1}{2}c_2(L\beta)^2$$

系统的势能为

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 \\ &= \frac{1}{2}c_1(L\alpha)^2 + \frac{1}{2}c_2(L\beta)^2 + \\ &\quad Ql\left[1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right] \end{aligned}$$

又重心的坐标为

$$x_c = l\sin\beta \approx l\beta$$

$$y_c=-l\cos\beta\sin\alpha\approx -l\alpha$$
$$z_c=l\cos\beta\cos\alpha\approx l$$

于是 $\dot{x}_c=l\dot{\beta},\ \dot{y}_c=-l\dot{\alpha},\ \dot{z}_c=0$

$$v_c^2=\dot{x}_c^2+\dot{y}_c^2+\dot{z}_c^2=l^2(\dot{\alpha}^2+\dot{\beta}^2)$$

圆盘角速度 $\Omega=\dot{\alpha}+\dot{\beta}+\omega$，在惯性主轴 $A\xi$，$A\eta$，$A\zeta$ 上的投影为

$$\Omega_\xi=\dot{\alpha}\cos\beta,\ \Omega_\eta=\dot{\beta},\ \Omega_\zeta=\dot{\alpha}\sin\beta+\omega$$

因此，圆盘的动能为

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\frac{Q}{g}V_c^2+\frac{1}{2}(A\Omega_\xi^2+B\Omega_\eta^2+C\Omega_\zeta^2)\\&=\frac{1}{2}\frac{Q}{g}l^2(\dot{\alpha}^2+\dot{\beta}^2)+\frac{1}{2}[A\dot{\alpha}^2\cos^2\beta+A\dot{\beta}^2\\&\quad+C(\dot{\alpha}\sin\beta+\omega)^2]\end{aligned}\tag{2}$$

式中

$$A=B=\frac{1}{4}\frac{Q}{g}r^2,\qquad C=\frac{1}{2}\frac{Q}{g}r^2$$

方程(4-2)给出为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}}-\frac{\partial L}{\partial\alpha}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\beta}}-\frac{\partial L}{\partial\beta}=0\tag{3}$$

将拉格朗日函数$L=T-V$代入(3)，便可得到扰动方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{Q}{g}l^2\ddot{\alpha}+A\ddot{\alpha}\cos^2\beta-2A\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta\\&\quad+C\ddot{\alpha}\sin^2\beta+C\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta+C\omega\dot{\beta}\cos\beta\\&\quad+c_1L^2\alpha-Ql\alpha=0\\&\frac{Q}{g}l^2\ddot{\beta}+A\ddot{\beta}-C\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta-C\dot{\alpha}\omega\cos\beta\\&\quad+c_2L^2\beta-Ql\beta=0\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

上述方程线性化后，得

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{Q}{g}l^2+A\right)\ddot{\alpha}+C\omega\dot{\beta}+(c_1L^2-Ql)\alpha=0\\ \left(\frac{Q}{g}l^2+A\right)\ddot{\beta}-C\omega\dot{\alpha}+(c_2L^2-Ql)\beta=0\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

特征方程为

$$\begin{vmatrix}\left(\frac{Q}{g}l^2+A\right)\lambda^2+(c_1L^2-Ql) & C\omega\lambda\\ -C\omega\lambda & \left(\frac{Q}{g}l^2+A\right)\lambda^2+(c_2L^2-Ql)\end{vmatrix}=0$$

即 $$\left(\frac{Q}{g}l^2+A\right)^2\lambda^4+\left\{\left(\frac{Q}{g}l^2+A\right)[(c_1L^2-Ql)+(c_2L^2-Ql)]+C^2\omega^2\right\}\lambda^2+(c_1L^2-Ql)(c_2L^2-Ql)=0 \tag{6}$$

圆盘稳定转动的条件是对λ^2有负根，

即 $$\left(\frac{Q}{g}l^2+A\right)[(c_1L^2-Ql)+(c_2L^2-Ql)]+C^2\omega^2>0 \tag{7}$$

$$\left\{\left(\frac{Q}{g}l_2+A\right)[(c_1L^2-Ql)+(c_2l^2-Ql)]+C^2\omega^2\right\}^2-4\left(\frac{Q}{g}l^2+A\right)^2(c_1L^2-Ql)(c_2L^2-Ql)>0 \tag{8}$$

简化(7)，得

$$\omega>\frac{1}{C}\sqrt{\left(\frac{Q}{g}l^2+A\right)(Ql-c_1L^2)(Ql-c_2L^2)} \tag{9}$$

简化(8)，得

$$\omega > \frac{1}{C}\sqrt{\frac{Q}{g}l^2+A}\ \left[\sqrt{Ql-c_1L^2}+\sqrt{Ql-c_2L^2}\right] \tag{10}$$

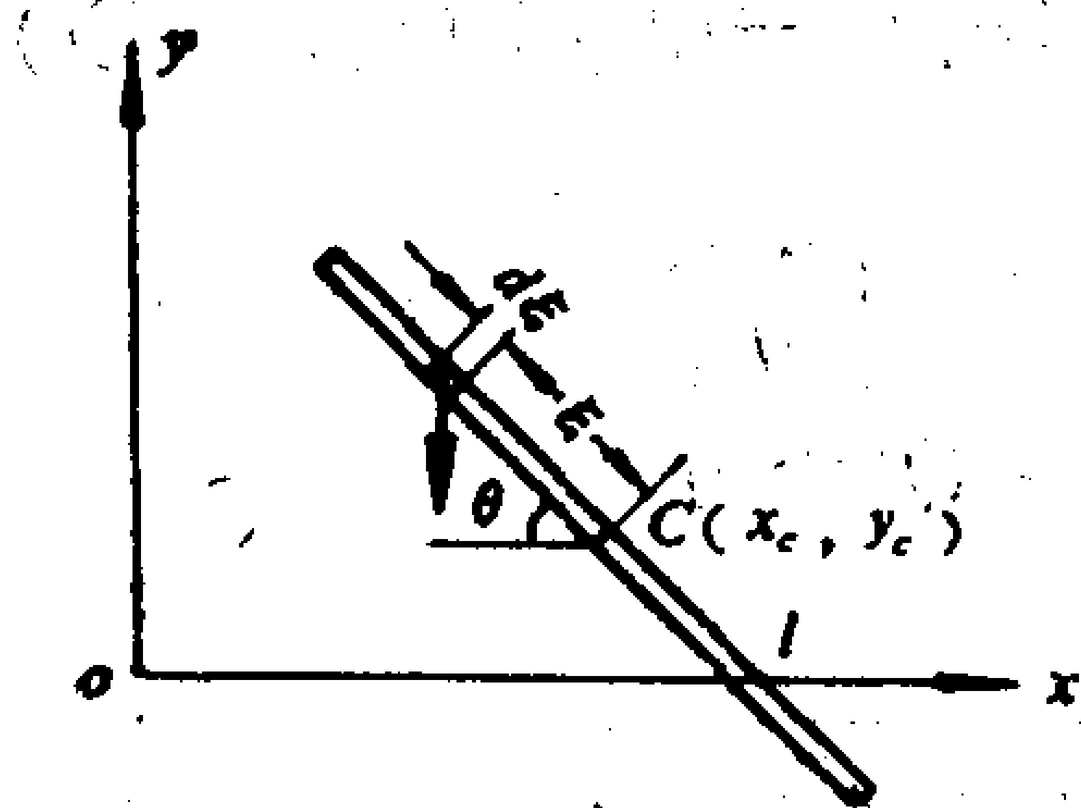
由(9)，(10)知，$Ql>c_2L^2$时，

$$\omega>\omega^*=\frac{1}{C}\sqrt{\frac{Q}{g}l^2+A}\ \left[\sqrt{Ql-c_1L^2}+\sqrt{Ql-c_2L^2}\right] \tag{11}$$

系统运动是稳定的。而当$c_1L^2<Ql<c_2L^2$时，任何转速ω都使圆盘转动不稳定。

例4-25 一均质杆质量为M，长度为$2l$，在光滑的水平面内滑动。杆上每个质点受到水平面内指向x轴的引力，此力与到轴的距离成比例，比例因子为γ^2。证明杆的重心描出一曲线$y=A\sin(\alpha x+\beta)$，此A，α及β为常数。如果θ是杆与x轴的夹角，那么有$\dot{\theta}^2=\delta^2-\gamma^2\sin^2\theta$，$\delta$是积分常数。因此，如$\delta^2>\gamma^2$，则杆在全部时间在同一方向转动。如$\delta^2<\gamma^2$，杆将振动，而如$\delta^2=\gamma^2$，则$\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}=\mathrm{th}\frac{1}{2}\gamma t$。在最后一种情况下渐近地趋于与轴相垂直的位置。

［解］ 杆在水平面内运动时有三个自由度，取杆质心



例4-25图

的坐标x_c，y_c及杆与x轴的夹角θ为广义坐标。

杆动能为

$$T=\frac{1}{2}M\left(\dot{x}_c^2+\dot{y}_c^2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Ml^2\right)\dot{\theta}^2 \tag{1}$$

为写出广义力Q_{x_c}，Q_{y_c}，Q_θ，先计算力的元功。在杆上距中心ξ处取微元$d\xi$，受力为

$$\gamma^2(y_c+\xi\sin\theta)\frac{M}{2l}d\xi$$

此力之元功为

$$-\gamma^2(y_c+\xi\sin\theta)\frac{M}{2l}\mathrm{d}\xi\delta(y_c+\xi\sin\theta)$$

总的元功

$$\delta A=\int_{-l}^{l}-\gamma^2(y_c+\xi\sin\theta)\frac{M}{2l}\mathrm{d}\zeta(\delta y_c+\delta\xi\sin\theta)$$

$$=-\gamma^2\frac{M}{2l}\int_{-l}^{l}(y_c\delta y_c+\xi\sin\theta\xi\cos\theta\delta\theta)\mathrm{d}\xi$$

$$=-\gamma^2\frac{M}{2l}\left\{y_c\cdot 2l\delta y_c+\sin\theta\cos\theta\cdot\frac{2}{3}l^3\delta\theta\right\}$$

因此，$Q_{x_c}=0$，$Q_{y_c}=-M\gamma^2y_c$

$$Q_\theta=-\frac{1}{3}M\gamma^2l^2\sin\theta\cos\theta \tag{2}$$

将(1)、(2)代入拉格朗日方程(4-2)中，得

$$M\ddot{x}_c=0,\quad M\ddot{y}_c=-M\gamma^2y_c$$

$$\frac{1}{3}Ml^2\ddot{\theta}=-\frac{1}{3}\gamma^2Ml^2\sin\theta\cos\theta$$

即

$$\ddot{x}_c=0,\quad \ddot{y}_c=-\gamma^2y_c,\quad \ddot{\theta}=-\gamma^2\sin\theta\cos\theta \tag{3}$$

将(3)积分，得

$$x_o = at + b,\quad y_o = A\sin(\gamma t + c),$$

$$\dot\theta^2 = \delta^2 - \gamma^2\sin^2\theta = \gamma^2\left(\frac{\delta}{\gamma} + \sin\theta\right)\left(\frac{\delta}{\gamma} - \sin\theta\right) \tag{4}$$

由(4)的前两式消去t，得

$$y_o = A\sin(\alpha x_o + \beta)$$

式中

$$\alpha = \frac{\gamma}{a},\quad \beta = c - \frac{\gamma b}{a}$$

现讨论后一式$\dot\theta$的变化

(a) 当$\delta^2 > \gamma^2$，$\delta^2 - \gamma^2\sin^2\theta > 0$，则

$$\dot\theta = \pm\gamma\sqrt{\left(\frac{\delta}{\gamma} - \sin\theta\right)\left(\frac{\delta}{\gamma} + \sin\theta\right)}$$

有同样的符号，即杆在全部时间按同一方向转动。

(b) 当$\delta^2 < \gamma^2$，则$\dot\theta$能等于零(即$\delta^2 - \gamma^2\sin^2\theta = 0$)说明$\dot\theta$改变了符号，杆子发生振动。

(c) 当$\delta^2 = \gamma^2$时，$\dot\theta^2 = \gamma^2\cos^2\theta$，$\dfrac{d\theta}{\cos\theta} = \pm\gamma dt$

$$令\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = u，则\cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}，\quad d\theta = \frac{2du}{1+u^2}$$

$$\int\frac{d\theta}{\cos\theta} = \int\frac{du}{1-u^2} = \ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) + c$$

$$\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} = Ae^{\pm\gamma t}$$ 令$t=0$，$\theta=0$，则$A=1$

因此，得

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \pm\operatorname{th}\left(\frac{1}{2}\gamma t\right)$$

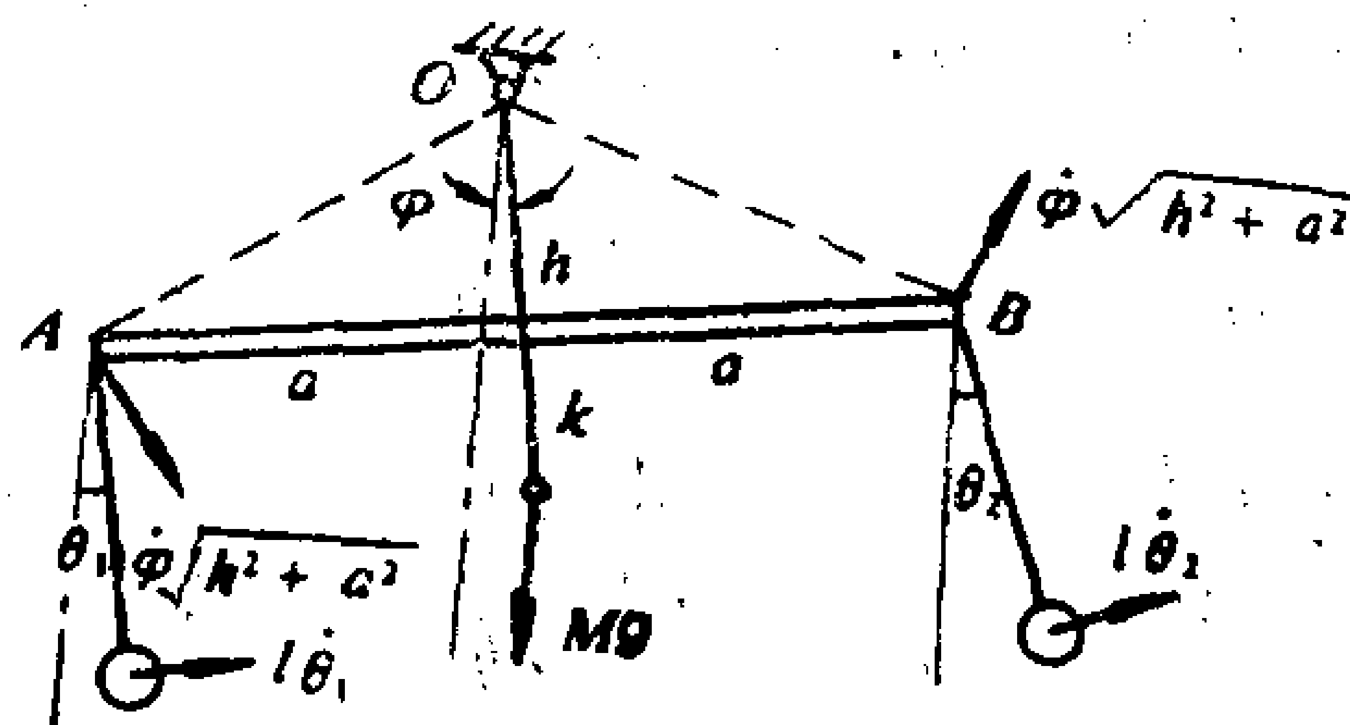
当$t\to\infty$，$\text{th}\left(\frac{1}{2}\gamma t\right)\to 1$，$\theta\to\frac{\pi}{2}$

说明杆渐近地趋于与x轴相垂直的位置。

例4-26 一天秤可绕本身外一支轴O转动，秤杆A、B端系两轻杆，在杆端各栓质量为m的质点；AB杆在轴O下方h处，杆重心离轴O为k，系统离开平衡位置，轻微扰动。试证主振动的等值单摆长是l及下面方程的根

$$(Mk+2mh)x^2-[M(K^2+kl)+2m(h^2+a^2+hl)]x+l(MK^2+2ma^2)=0$$

M是杆的质量，$2a$是它的长度，K是绕轴O的迴转半径；l是每条轻杆的长度。



例4-26图

［解］ 取天秤的转角φ，两轻杆的转角θ_1，θ_2为广义坐标。系统动能为

$$T=\frac{1}{2}MK^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m\left[l^2\dot{\theta}_2^2+(a^2+h^2)\dot{\varphi}^2+2l\dot{\theta}_2\dot{\varphi}\sqrt{a^2+h^2}\cos(\varphi+\alpha-\theta_2)\right]$$

$$+\frac{1}{2}m\left[l^2\dot{\theta}_1^2+(a^2+h^2)\dot{\varphi}^2\right.$$

$$+2l\dot{\theta}_1\dot{\varphi}\sqrt{a^2+h^2}\cos(\alpha-\varphi-\theta_1)]$$

$$\approx\frac{1}{2}MK^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m\left[l^2\dot{\theta}_2^2+(a^2+h^2)\dot{\varphi}^2+2lh\dot{\theta}_2\dot{\varphi}\right]$$

$$+\frac{1}{2}m\left[l^2\dot{\theta}_1^2+(a^2+h^2)\dot{\varphi}^2+2lh\dot{\theta}_1\dot{\varphi}\right] \qquad (1)$$

系统势能为

$$V=mg\left[(l+h)-l\cos\theta_2-\sqrt{a^2+h^2}\cos(\alpha+\varphi)\right]$$

$$+mg\left[(l+h)-l\cos\theta_1-\sqrt{a^2+h^2}\cos(\alpha-\varphi)\right]$$

$$+Mgk(1-\cos\varphi)$$

$$\approx\frac{1}{2}mgl(\theta_1^2+\theta_2^2)+mgh\varphi^2+\frac{1}{2}Mgk\varphi^2 \qquad (2)$$

将拉格朗日函数$L=T-V$代入方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta_i}=0\quad(i=1,\ 2)$$

得

$$\left.\begin{aligned}&MK^2\ddot{\varphi}+2m(a^2+h^2)\ddot{\varphi}+mlh(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)\\&\quad+2mgh\varphi+Mgh\varphi=0\\&ml^2\ddot{\theta}_1+mlh\ddot{\varphi}+mgl\theta_1=0\\&ml^2\ddot{\theta}_2+mlh\ddot{\varphi}+mgl\theta_2=0\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

由此得频率方程

$$\begin{vmatrix}-[MK^2+2m(a^2+h^2)]p^2+2mgh+Mgk-mlhp^2 & -mlhp^2 & -mlhp^2\\ -mlhp^2 & -ml^2p^2+mgl & 0\\ -mlhp^2 & 0 & -ml^2p^2+mgl\end{vmatrix}=0$$

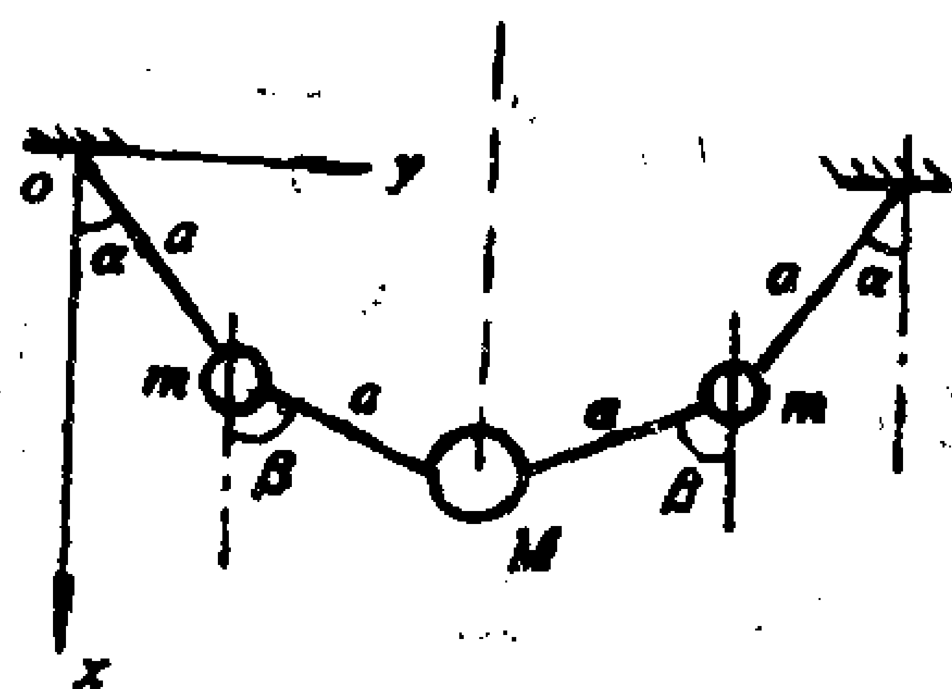
或 $(-ml^2p^2+mgl)\{ml^2p^4(MK^2+2ma^2)-mglp^2$
$\times\ [M(K^2+lk)+2m(a^2+h^2+hl)]$
$+mg^2l(2mh+Mk)\}=0$ (4)

令 $x=\dfrac{g}{p^2}$ 为等值单摆长，则

$$(x-l)\{x^2(Mk+2mh)-x\ [M(K^2+lk)+$$
$$+2m(h^2+a^2+hl)]\ +l(MK^2+2ma^2)\}=0 \quad (5)$$

题中结论得证。

例4-27 一长为$4a$的不可伸长的绳上系有三个重物，其质量为m，M，m，绳子对称地悬于两端。各段与铅垂线成α，β角，重物M受干扰后作铅垂方向的微振动，试求此重物M的振动频率。



例4-27图

［解］ 重物M只有铅垂位移，是一个自由度的微振动。设系统由图示平衡位置受干扰后，角α，β有微小增量$\bar{\alpha}$，$\bar{\beta}$。

约束方程 $y_M=\text{const}$

即
$$y_M=a\sin(\alpha+\bar{\alpha})+a\sin(\beta+\bar{\beta})$$
$$=\text{const}$$

展开上式，并略去二阶及以上小量，有

$$\sin\alpha+\bar{\alpha}\cos\alpha+\sin\beta+\bar{\beta}\cos\beta=\text{const}$$
$$=\sin\alpha+\sin\beta$$

于是，得

$$\bar{\beta}=-\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\bar{\alpha} \quad (1)$$

取$\bar{\alpha}$为系统的广义坐标，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(a\dot{\bar{\alpha}})^2\cdot 2+\frac{1}{2}M\dot{x}_M^2$$

因 $x_M=a\cos(\alpha+\bar{\alpha})+a\cos(\beta+\bar{\beta})$

$$\approx a\left[\cos\alpha-\bar{\alpha}\sin\alpha+\cos\beta-\bar{\beta}\sin\beta\right)$$

所以 $\dot{x}_M=a\left(-\dot{\bar{\alpha}}\sin\alpha-\dot{\bar{\beta}}\sin\beta\right)$

$$=-\dot{\alpha}\left[\sin\alpha+\sin\beta\left(-\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)\right]a$$

$$=a\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\beta}\dot{\bar{\alpha}}$$

因此，$T=\left[ma^2+\frac{1}{2}Ma^2\frac{\sin^2(\beta-\alpha)}{\cos^2\beta}\right]\dot{\bar{\alpha}}^2$ (2)

系统的势能

$$V=-\{2mga\cos(\alpha+\bar{\alpha})+Mg\left[a\cos(\alpha+\bar{\alpha})+a\cos(\beta+\bar{\beta})\right]\}$$

$$=-\{2mga\cos\alpha+Mga(\cos\alpha+\cos\beta)+(-2mga\sin\alpha-Mga\sin\alpha)\bar{\alpha}-Mga\bar{\beta}\sin\beta+2mga\left(-\frac{\bar{\alpha}^2}{2}\right)\cos\alpha+Mga\left(-\frac{\bar{\alpha}^2}{2}\right)\cos\alpha+Mga\left(-\frac{\bar{\beta}^2}{2}\right)\cos\beta\}$$

系统平衡时，V的一次项$\bar{\alpha}$系数为零，由此给出

$$m=\frac{M\sin(\beta-\alpha)}{2\sin\alpha\cos\beta} \quad (3)$$

利用(1)，(3)，保留V中$\bar{\alpha}$的二次项，有

$$V=V_0+Mga\frac{\dot{\alpha}^2}{2}\frac{\cos^2\alpha\sin\alpha+\cos^2\beta\sin\beta}{\cos^3\beta\sin\alpha} \tag{4}$$

将(3)代入(2)得

$$T=\frac{1}{2}Ma^2\dot{\alpha}^2\frac{\sin(\beta-\alpha)\cos(\beta-\alpha)\cos\alpha}{\sin\alpha\cos^2\beta} \tag{5}$$

将拉格朗日函数 $L=T-V$，代入方程(4-2)，得

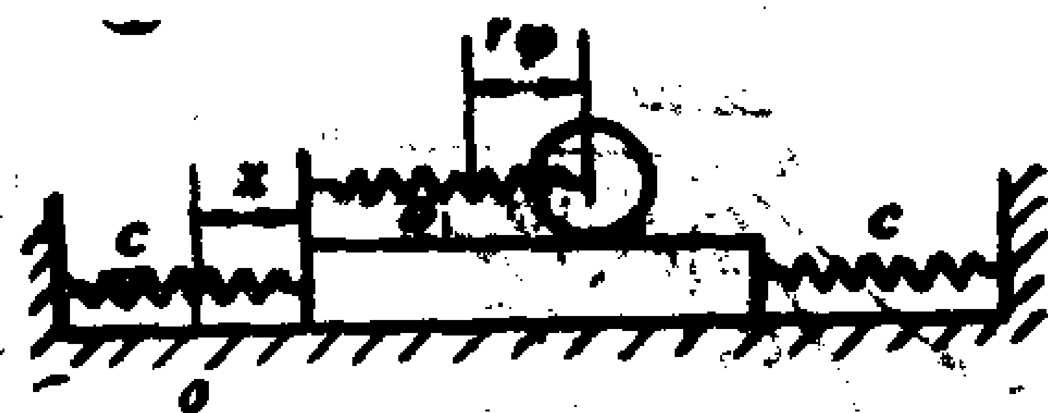
$$Ma^2\ddot{\alpha}\frac{\sin(\beta-\alpha)\cos(\beta-\alpha)\cos\alpha}{\sin\alpha\cos^2\beta}$$

$$+Mga\alpha\frac{\cos^2\alpha\sin\alpha+\cos^2\beta\sin\beta}{\cos^3\beta\sin\alpha}=0$$

于是有小振动频率

$$k=\sqrt{\frac{g(\cos^2\alpha\sin\alpha+\cos^2\beta\sin\beta)}{a\cos\alpha\cos\beta\sin(\beta-\alpha)\cos(\beta-\alpha)}}$$

例4-28 用刚度为 c 的弹簧与固定墙联结的质量为 m 的木板，在光滑水平地板上滑动。在木板上有质量为 $m/2$，半径为 r 的圆盘做只滚不滑，圆盘中心与木板的边缘用刚度为 $2c$ 的弹簧联结。试建立系统的拉格朗日方程。



例4-28图

[解] 系统有两个自由度，取 x，φ 为广义坐标，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m\right)(r\dot{\varphi}+\dot{x})^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}mr^2\right)\dot{\varphi}^2$$

$$=\frac{3}{4}m\dot{x}\ \ +\frac{1}{2}mr\ \dot{x}\dot{\varphi}+\frac{3}{8}mr^2\dot{\varphi}^2$$

取弹簧未变形位置为弹性势能零点，则系统的势能为

$$V=\frac{1}{2}cx^2+\frac{1}{2}cx^2+\frac{1}{2}(2c)(r\varphi)^2=cx^2+cr^2\varphi^2$$

而拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{3}{4}m\ \dot{x}^2+\frac{1}{2}mr\dot{x}\dot{\varphi}+\frac{3}{8}mr^2\dot{\varphi}^2-cx^2-cr^2\varphi^2$$

将上代入拉格朗日方程(4-2)，得

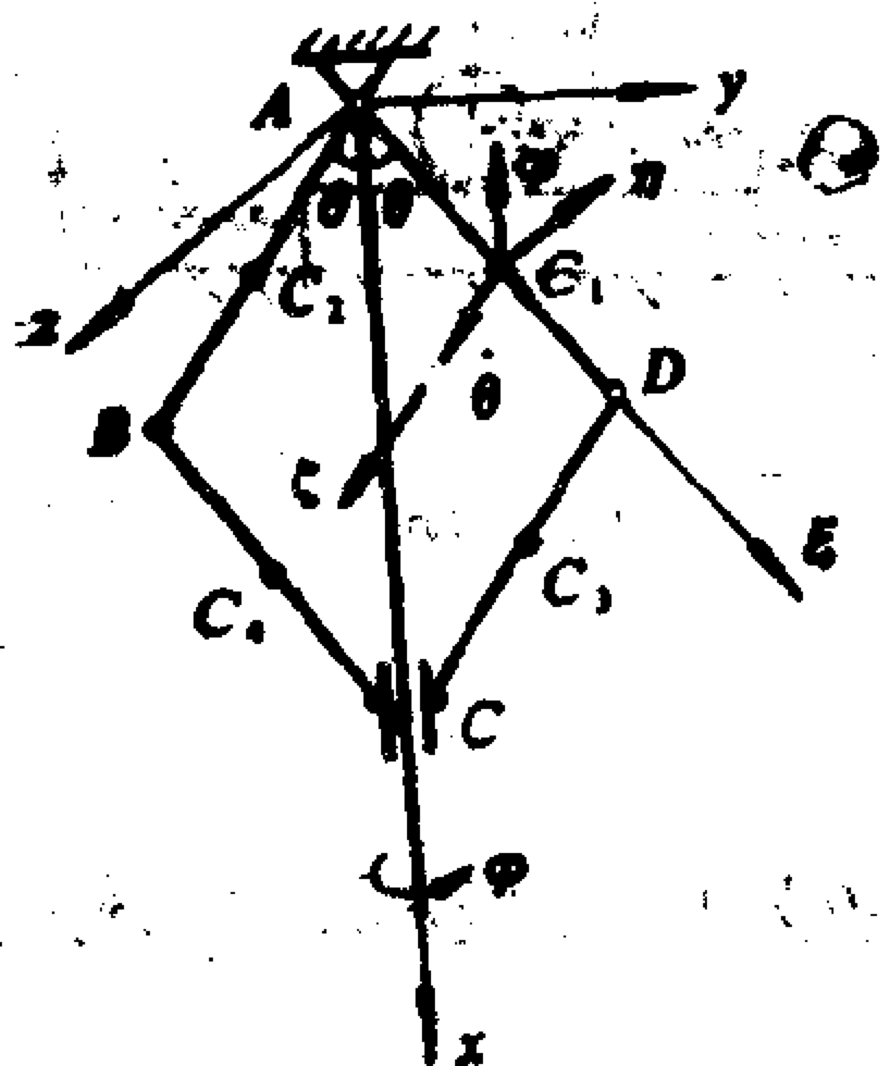
$$\frac{3}{2}m\ \ddot{x}+\frac{1}{2}mr\ddot{\varphi}+2cx=0$$

$$\frac{1}{2}mr\ddot{x}+\frac{3}{4}mr^2\ddot{\varphi}+2cr^2\varphi=0$$

或 $3m\ddot{x}+mr\ddot{\varphi}+4cx=0$

$$2m\ddot{x}+3mr\ddot{\varphi}+8cr\varphi=0$$

例4-29 四根相同的均质杆，长$2a$，被光滑地联接为菱形$ABCD$。点A固定，而点C自由地在一通过A的光滑铅垂杆上运动。开始时C与A重合，而整个系统以角速度ω绕铅垂线转动。试证，如果在后续运动中2α是上面两杆的最小夹角，则有$a\omega^2\cos\alpha=3g\sin^2\alpha$。



例4-29图

［解］ 图示机构有两个自由度，为确定其在空间的位置，采用转角θ与φ。由于机构对称于铅垂

轴(x轴)，在计算其动能时，可算右侧两根杆AD，CD的动能，再乘以2即可。

设杆AD，CD的质心为c_1，c_3，其坐标分别为

$$
\begin{aligned}
&c_1\text{点：}\ x_1=a\cos\theta \qquad && c_3\text{点：}\ x_3=3a\cos\theta \\
&\qquad y_1=a\sin\theta\sin\varphi && \qquad y_3=a\sin\theta\sin\varphi \\
&\qquad z_1=a\sin\theta\cos\varphi && \qquad z_3=a\sin\theta\cos\varphi
\end{aligned} \tag{1}
$$

将(1)对时间t求导一次，平方，再相加，有

$$
\left.
\begin{aligned}
v_{c1}^2&=\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2=a^2\dot{\theta}^2+a^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \\
v_{c3}^2&=\dot{x}_3^2+\dot{y}_3^2+\dot{z}_3^2=a^2\dot{\theta}^2+a^2\sin^2\theta(\dot{\varphi}^2+8\dot{\theta}^2)
\end{aligned}
\right\} \tag{2}
$$

而各杆转动角速度均为

$$\omega=\dot{\varphi}+\dot{\theta} \tag{3}$$

现将(3)在AD杆的中心惯性主轴上投影($c_1\xi$轴沿杆的轴线，$c_1\eta$，$c_1\zeta$轴垂直杆的轴线)得

$$\omega_\xi=-\dot{\varphi}\cos\theta,\ \omega_\eta=\dot{\varphi}\sin\theta,\ \omega_\zeta=\dot{\theta} \tag{4}$$

而在CD杆中心惯性主轴上的投影，与AD杆相同。

又 $$J_\xi=0,\ J_\eta=J_\zeta=\frac{1}{12}m(2a)^2=\frac{1}{3}ma^2 \tag{5}$$

因此，系统的动能为

$$
\begin{aligned}
T=2(T_{AD}+T_{CD})=2\Big\{&\Big[\frac{1}{2}mv_{c1}^2+\frac{1}{2}(J_\xi\omega_\xi^2+J_\eta\omega_\eta^2+ \\
&J_\zeta\omega_\zeta^2)\Big]+\Big[\frac{1}{2}mv_{c3}^2+\frac{1}{2}(J_\xi\omega_\xi^2+J_\eta\omega_\eta^2+J_\zeta\omega_\zeta^2)\Big]\Big\}
\end{aligned} \tag{6}
$$

将(2)、(4)和(5)代入(6)，整理后，得

$$T=\frac{8}{3}ma^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+8ma^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta$$

取A点为势能零点，则系统的势能为

$$V=-8amg\cos\theta$$

于是，拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{8}{3}ma^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+8ma^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta$$
$$+8amg\cos\theta \tag{7}$$

因L中不含φ，有循环积分

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{8}{3}ma^2\cdot 2\,\dot{\varphi}\sin^2\theta=C$$

当$t=0$时，$\theta=90°$，$\dot{\theta}=0$，$\dot{\varphi}=\omega$代入上式，得

$$\dot{\varphi}\sin^2\theta=\omega \tag{8}$$

因系统在势力场中，有机械能守恒积分

$$T+V=C_0$$

即 $\frac{8}{3}ma^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+8ma^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta$

$$-8amg\cos\theta=C_0$$

代入上述初始条件，得

$$C_0=\frac{8}{3}ma^2\omega^2$$

因此

$$\frac{8}{3}ma^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+8ma^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta-8amg\cos\theta=$$
$$=\frac{8}{3}ma^2\omega^2 \tag{9}$$

将$\theta=\alpha$，$\dot{\theta}=0$和式(8)代入(9)，得

$$\frac{8}{3}ma^2\sin^2\alpha\left(\frac{\omega}{\sin^2\alpha}\right)^2-8amg\cos\alpha=\frac{8}{3}ma^2\omega^2$$

或

$$a\omega^2(1-\sin^2\alpha)=3g\cos\alpha\sin^2\alpha$$

即

$$a\omega^2\cos\alpha=3g\sin^2\alpha \tag{10}$$

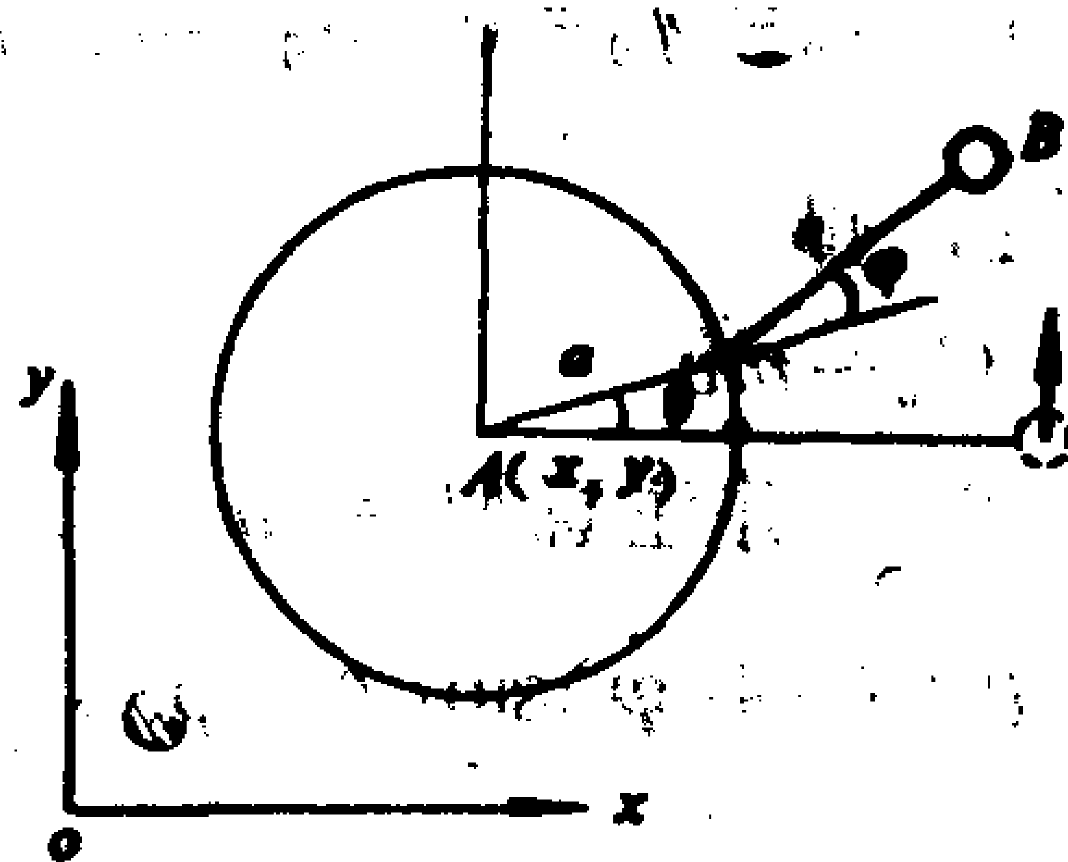
例4-30 质量为M的均质圆盘停在光滑水平桌子上，一条长度等于圆盘半径a的线，固定于圆周边缘，另一端栓一质量为m的质点。绳开始是直的且沿半径的延长线，质点以速度v与它成直角地抛出。如$M=3m$，试证线与半径在时刻t的交角φ，此时

$$\dot{\varphi}^2(3-\cos^2\varphi)=\frac{2v^2}{a^2}\cos\varphi$$

[证明] 系统有四个自由度，取圆盘质心坐标x，y，转角θ及线相对线端半径的夹角φ为广义坐标，如图示。质点B的坐标为

$$x_B=x+a\cos\theta+a\cos(\theta+\varphi)$$
$$y_B=y+a\sin\theta+a\sin(\theta+\varphi)$$

其速度分量为



例4-30图

$$\dot{x}_B=\dot{x}-a\dot{\theta}\sin\theta-a(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\sin(\theta+\varphi)$$
$$\dot{y}_B=\dot{y}+a\dot{\theta}\cos\theta+a(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\cos(\theta+\varphi)$$

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}M(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Ma^2\right)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\{[\dot{x}$$

$$-a\dot{\theta}\sin\theta-a(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\sin(\theta+\varphi)]^2+[\dot{y}+a\dot{\theta}\cos$$

$$+a(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\cos(\theta+\varphi)]^2\} \quad (1)$$

系统的势能为

$$V=0$$

拉格朗日函数为

$$L=T-V=T$$

因L中不显含x，y，故x，y为循环坐标，有两个循环积分

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=C_1, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=C_2$$

即

$$M\dot{x}+m[\dot{x}-a\dot{\theta}\sin\theta-a(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\sin(\theta+\varphi)]=C_1 \quad (3)$$

$$M\dot{y}+m[\dot{y}+a\dot{\theta}\cos\theta+a(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\cos(\theta+\varphi)]=C_2 \quad (4)$$

由初始条件$t=0$时，$\dot{x}_0=\dot{y}_0=0$，$\dot{\theta}_0=0$，$\dot{\varphi}_0=\frac{v}{a}$，$\theta_0=\varphi_0=0$来确定$C_1$和$C_2$，得

$$C_1=0, \quad C_2=mv \quad (5)$$

将(5)代入(3)和(4)，并注意$M=3m$，得

$$\dot{x}=\frac{a}{4}\{\dot{\theta}\sin\theta+(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\sin(\theta+\varphi)\} \quad (6)$$

$$\dot{y}=\frac{1}{4}\{v-a\dot{\theta}\cos\theta-a(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\cos(\theta+\varphi)\} \quad (7)$$

将(6)和(7)代入(1)，得

$$T=\frac{3}{8}ma^2\left\{4\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2+2\dot{\varphi}\dot{\theta}+2\dot{\theta}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\cos\varphi\right.$$

$$+\frac{1}{3}\frac{v^2}{a^2}\Big\} \tag{8}$$

又(8)中不显含θ，故θ为循环坐标，有循环积分

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=C_3$$

即

$$8\dot{\theta}+2\dot{\varphi}+2\dot{\varphi}\cos\varphi+4\dot{\theta}\cos\varphi=C_3 \tag{9}$$

将初始条件$t=0$时，$\dot{\theta}_0=0$，$\varphi_0=0$，$\dot{\varphi}_0=\frac{v}{a}$代入(6)，得

$$C_3=\frac{4v}{a}$$

于是，我们有

$$\dot{\theta}=\frac{\frac{2v}{a}-\dot{\varphi}(1+\cos\varphi)}{2(2+\cos\varphi)} \tag{10}$$

因系统是保守的，有能量积分$T=T_0$，即

$$\frac{3}{8}ma^2\left\{4\;{}^{2}+\dot{\varphi}^2+2\dot{\varphi}\dot{\theta}+2\dot{\theta}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\cos\varphi+\frac{1}{3}\frac{v^2}{a^2}\right\}$$

$$=T_0=\frac{1}{2}mv^2 \tag{11}$$

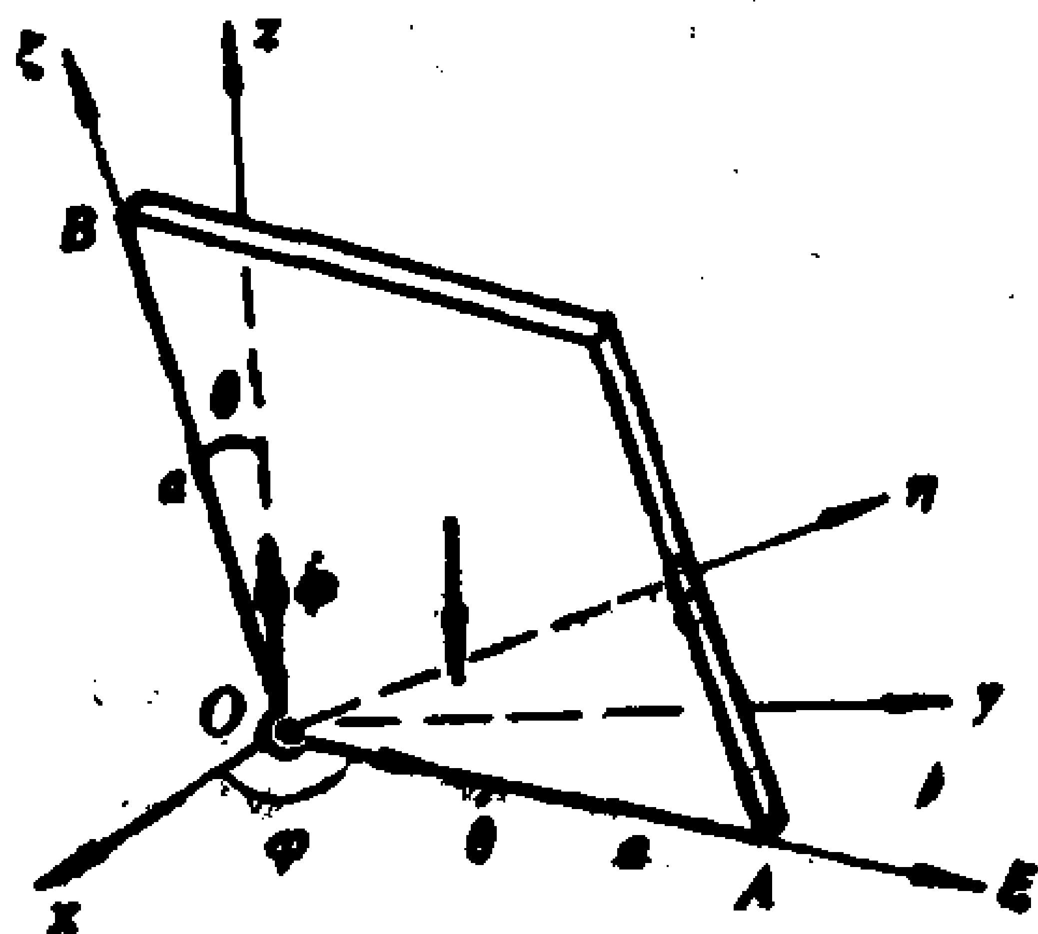
将(10)代入(11)，整理后，得

$$\dot{\varphi}^2(3-\cos^2\varphi)=\frac{2v^2}{a^2}\cos\varphi \tag{12}$$

例4-31 均质正方形薄板的一个顶点可绕固定点O运动，而其一边OA被约束在光滑水平面上。初始时平板静止在竖直平面内，受到小扰动后，因重力作用而倒下，求证另一边OB与Oz轴的夹角θ由下式决定

$$a\dot{\theta}^2(7+25\sin^2\theta)=48g(1-\cos\theta)(1+\sin^2\theta)$$

其中a是正方形的边长。



例4-31图

［解］　系统有两个自由度，取转角θ，φ为广义坐标如图示。薄板绕O点转动角速度

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\boldsymbol{\theta}}+\dot{\boldsymbol{\psi}} \tag{1}$$

将(1)在$O\xi$，$O\eta$，$O\zeta$轴上投影，得

$$\omega_\xi=\dot{\theta},\ \omega_\eta=\dot{\varphi}\sin\theta,\ \omega_\zeta=\dot{\varphi}\cos\theta \tag{2}$$

薄板绕O点转动的动能为

$$T=\frac{1}{2}(J_\xi\omega_\xi^2+J_\eta\omega_\eta^2+J_\zeta\omega_\zeta^2-2J_{\xi\zeta}\omega_\xi\omega_\zeta \tag{3}$$

而 $$J_\xi=J_\zeta=\frac{1}{3}ma^2,J_\eta=\frac{2}{3}ma^2,\ J_{\xi\zeta}=\frac{1}{4}ma^2 \tag{4}$$

将(2)和(4)代入(3)，得

$$T=\frac{1}{6}ma^2\ \ [\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2(1+\sin^2\theta)]-\frac{1}{4}ma^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta$$

薄板的势能为

$$V=mg\frac{1}{2}a\cos\theta$$　　　　（0点为势能零点）

于是拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{6}ma^2\left[\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2(1+\sin^2\theta)\right]$$

$$-\frac{1}{4}ma^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta-\frac{1}{2}mga\cos\theta$$

因L中不显含φ，故φ为循环坐标，有循环积分

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=C$$

即

$$\frac{1}{3}ma^2(1+\sin^2\theta)\dot{\varphi}-\frac{1}{4}ma^2\dot{\theta}\cos\theta=C \qquad (5)$$

又系统是保守系统，有能量积分

$$T+V=T_0+V_0$$

即

$$\frac{1}{6}ma^2\left[\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2(1+\sin^2\theta)\right]-\frac{1}{4}ma^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta$$

$$+\frac{1}{2}mga\cos\theta=T_0+V_0 \qquad (6)$$

把初始条件$t=0$时，$\dot{\theta}=\dot{\varphi}=0$，$\theta=\varphi=0$ 代入(5)确定C和V_0，T_0，得

$$C=0,\quad T_0=0,\quad V_0=\frac{1}{2}mga$$

于是，我们有

$$\frac{1}{3}ma^2(1+\sin^2\theta)\dot{\varphi}-\frac{1}{4}ma^2\dot{\theta}\cos\theta=0 \qquad (6)$$

$$\frac{1}{6}ma^2\left[\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2(1+\sin^2\theta)\right]-\frac{1}{4}ma^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta$$

$$+\frac{1}{2}mga\cos\theta=\frac{1}{2}mga \tag{7}$$

由(6)消去ma^2，有

$$\dot{\varphi}=\frac{3\dot{\theta}\cos\theta}{4(1+\sin^2\theta)} \tag{8}$$

将(8)代入(7)，得

$$\frac{1}{6}ma^2\left[\dot{\theta}^2+\frac{9\dot{\theta}^2\cos^2\theta}{16(1+\sin^2\theta)}\right]-\frac{1}{4}ma^2\frac{3\dot{\theta}^2\cos^2\theta}{4(1+\sin^2\theta)}$$

$$=\frac{1}{2}mga(1-\cos\theta)$$

或 $$\frac{a}{6}\left[\frac{\dot{\theta}^2(7+25\sin^2\theta)}{16(1+\sin^3\theta)}\right]=\frac{1}{2}g(1-\cos\theta)$$

即 $$a\dot{\theta}^2(7+25\sin^2\theta)=48g(1-\cos\theta)(1+\sin^2\theta)$$

例4-32 具有一个自由度的质点在势力场中运动，试由能量守恒定律推导此质点的拉格朗日方程。

［解］ 取q表示质点在势力场中的位置，质点的动能和势能分别为

$$T=T(q,\ \dot{q}),\ V=V(q)$$

其机械能量 $$E=T+V=h=\text{const} \tag{1}$$

将(1)对t求导一次

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0 \tag{2}$$

且 $$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial T}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\ddot{q},\quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}\dot{q} \tag{3}$$

又 $$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\ddot{q}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)\dot{q}=$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}2T-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)\dot{q} \tag{4}$$

由齐次函数的欧拉定理知

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\dot{q}=2T$$

将(3)，(4)代入(2)，得

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}\right)\dot{q}=0$$

因$\dot{q}\neq 0$，于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q} \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial}-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

式中 $L=T-V$。

例4-33 考虑一自然系统，系统具有$T=\frac{1}{2}m(q)\dot{q}^2$和$V=V(q)$。试证明，如令总能量$E=T+V$对时间的导数等于零，就得到正确的运动微分方 。

[解]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E=\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=m(q)\dot{q}\ddot{q}+\frac{1}{2}\dot{q}^2\frac{\mathrm{d}m(q)}{\mathrm{d}q}\frac{dq}{dt}$$

$$+\frac{\mathrm{d}V(q)}{\mathrm{d}q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=0$$

消去$\dot{q}$后，得

$$m(q)\ddot{q}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}m(q)}{\mathrm{d}q}\dot{q}^2+\frac{\mathrm{d}V(q)}{\mathrm{d}q}=0$$

例4-34 已知一个n自由度的保守完整系统。试证明，若令能量积分对时间的全导数等于零，则由此得到的微分方程和第i个拉格朗日方程乘以$\dot{q}_i$，然后对i求和所得的方程相同。

[解]　因能量积分为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=h$$

故 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}_i\right)-\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=0 \tag{1}$$

又拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

乘以$\dot{q}_i$后得

$$\dot{q}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

将i由 1 到n相加得

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\sum_{i=1}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \tag{2}$$

而

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}+\sum_{i=1}^{n}\ddot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{3}$$

将(3)代入(2)

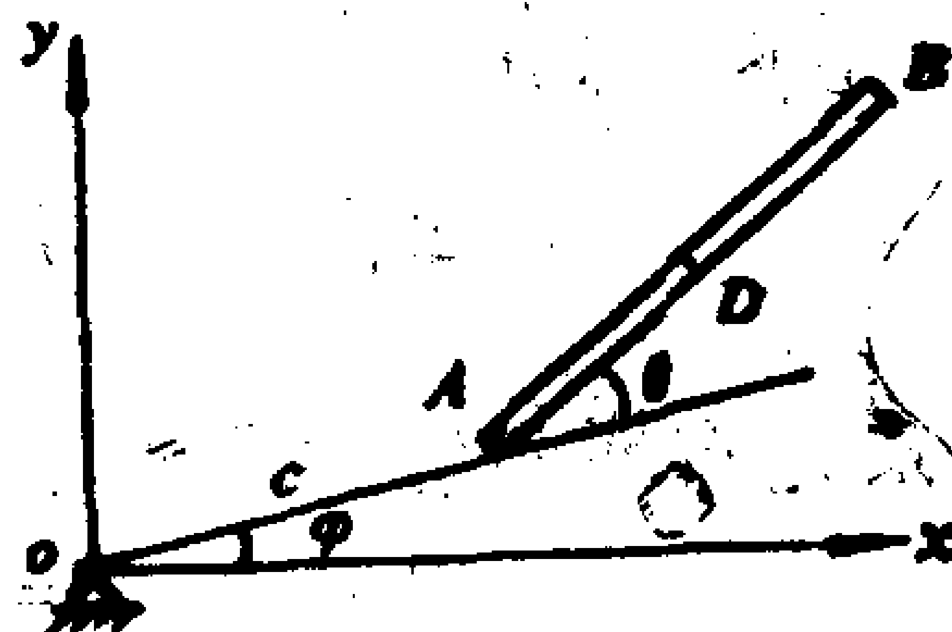
$$\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial q_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\ddot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\sum_{i=1}^{n}\dot{q}\frac{\partial L}{\partial q_i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-$$

$$-\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=0 \tag{4}$$

由此证明(2)与(1)相同。

例4-35 一均质杆 AB，长$2a$，放在光滑水平面上。杆的一端拴于轻的不可伸长的长为c的线上。线的另一端被固定在水平面上的点o。开始时oAB共线，而杆在垂直于其长度方向上以速度v无转动地抛出。试证杆与线的最大张角的余弦是$1-\dfrac{a}{6c}$。



例4-35图

[解] 系统有两个自由度，取φ、θ为广义坐标。设D为AB杆的中点，其坐标为$(x_D,\ y_D)$，我们有

$$x_D=c\cos\varphi+a\cos(\theta+\varphi)$$

$$y_D=c\sin\varphi+a\sin(\theta+\varphi)$$

而
$$\dot{x}_D=-c\dot{\varphi}\sin\varphi-a(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\sin(\theta+\varphi)$$

$$\dot{y}_D=c\dot{\varphi}\cos\varphi+a(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\cos(\theta+\varphi)$$

$$v_D^2=\dot{x}_D^2+\dot{y}_D^2=c^2\dot{\varphi}^2+a^2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2+2ac\dot{\varphi}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\cos\theta$$

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}mv_D^2+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}m(2a)^2\right](\dot{\varphi}+\dot{\theta})^2$$

$$=\frac{1}{2}m\left[c^2\dot{\varphi}^2+a^2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2+2ac\dot{\varphi}(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\cos\theta\right]$$

$$+\frac{1}{6}ma^2(\dot{\varphi}+\dot{\theta})^2$$

系统的势能$V=0$。

而拉格朗日函数$L=T$。

因L中不显含φ，故φ为循环坐标，有循环积分

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=m\Big[c^2\dot{\varphi}+a^2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})+ac(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\cos\theta$$

$$+ac\dot{\varphi}\cos\theta+\frac{1}{3}a^2(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\Big]=c_1 \tag{1}$$

且系统有能量守恒积分

$$T+V=T=h$$

即 $$\frac{1}{2}m\left[c^2\dot{\varphi}^2+a^2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2+2ac\dot{\varphi}(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\cos\theta\right]$$

$$+\frac{1}{6}ma^2(\dot{\varphi}+\dot{\theta})^2=h \tag{2}$$

由初始条件$t=0$时，$\varphi=\theta=0$，$\dot{\varphi}+\dot{\theta}=0$，$\dot{\varphi}=\dfrac{v}{c}$，代入(1)，(2)确定$c_1$和$h$

得 $$h=\frac{1}{2}mv^2,\quad c_1=m\,[cv+av]=mv(c+a)$$

将h，c_1的值代入(1)，(2)得

$$c^2\dot{\varphi}^2+a^2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2+2ac\dot{\varphi}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\cos\theta$$

$$+\frac{1}{3}a^2(\dot{\varphi}+\dot{\theta})^2=v^2 \tag{3}$$

$$c^2\dot{\varphi}+a^2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})+ac(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\cos\theta+ac\dot{\varphi}\cos\theta$$

$$+\frac{1}{3}a^2(\dot{\varphi}+\dot{\theta})=(a+c)v \tag{4}$$

令$\dot{\theta}=0$，由(3)得

$$\dot{\varphi}^2\left(c^2+a^2+2ac\cos\theta+\frac{1}{3}a^2\right)=v^2 \tag{5}$$

由(4)得 $\dot{\varphi}\left(c^2+a^2+2ac\cos\theta+\frac{1}{3}a^2\right)=(a+c)v$ (6)

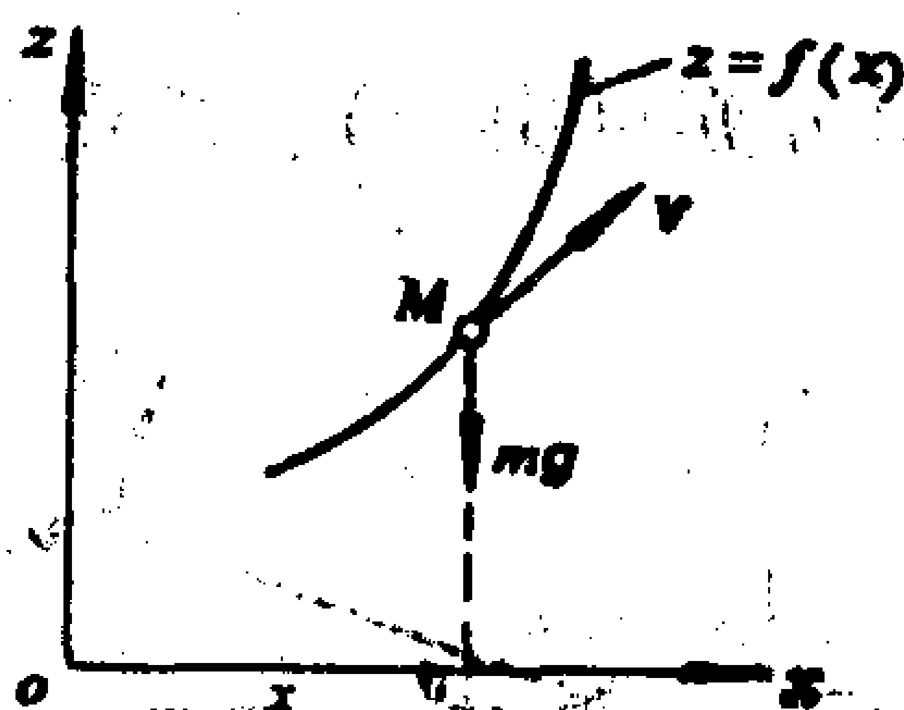
化简(5)和(6)，得

$$c^2+a^2+2ac\cos\theta+\frac{1}{3}a^2=(a+c)^2$$

$$2ac\cos\theta=2ac-\frac{1}{3}a^2$$

即 $$\cos\theta=1-\frac{a}{6c}$$

例4-36 质量为m的质点可在铅垂面oxz内沿曲线$z=f(x)$做无摩擦的运动。试建立拉格朗日方程，并求其第一积分。



例4-36图

[解] 取x为系统的广义坐标，系统的动能和势能分别为

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2+\dot{z}^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2+\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}m\dot{x}^2\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2\right] \quad (1)$$

$$V=mgz=mgf(x)$$

将拉格朗日函数$L=T-V$代入拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

得 $$m\ddot{x}\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]+2m\dot{x}^2\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}\right)$$

$$-m\dot{x}^2\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}\right)+mg\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=0$$

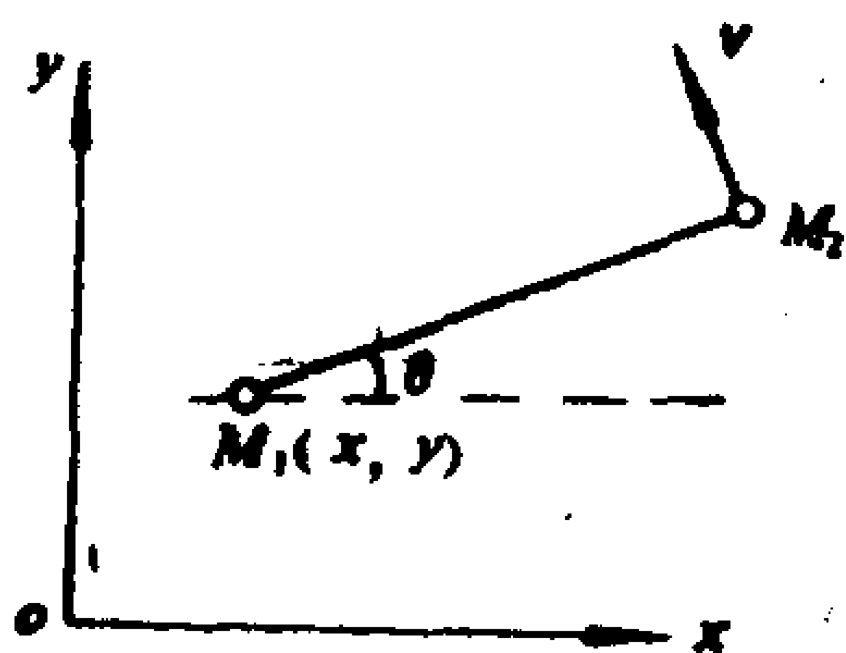
化简后得

$$m\ddot{x}\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]+m\dot{x}^2\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}+mg\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=0 \qquad (2)$$

因系统是完整保守系统，故有能量积分，即

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]+mgf(x)=C \qquad (3)$$

此积分亦可由(2)两端乘以$\dot{x}$，再积分而得到。



例4-37图

例4-37 在光滑水平桌面上，有质量为m的两个质点用不可伸长的线紧直地连着，线长为a。运动开始时，一质点不动，另一质点有垂直于线方向的速度P/m。取一质点的坐标(x, y)及线与其初始位置间的夹角θ为广义坐标，试建立系统的拉格朗日函数，写出运动的第一积分，证明$\dot{\theta}=P/(ma)$，且两质点各作圆滚线运动。

［解］ 系统有三个自由度，取x，y，θ为广义坐标，如图示。

M_1点的动能为

$$T_1=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

M_2点的坐标

$$x_2=x+a\cos\theta, \quad y_2=y+a\sin\theta$$

M_2点的速度分量为

$$\dot{x}_2=\dot{x}-a\dot{\theta}\sin\theta,\quad \dot{y}_2=\dot{y}+a\dot{\theta}\cos\theta$$

而其动能为

$$T_2=\frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)$$

$$=\frac{1}{2}m\ \left[\dot{x}^2+\dot{y}^2+a^2\dot{\theta}^2-2a\dot{\theta}(\dot{x}\sin\theta-\dot{y}\cos\theta)\right]$$

故系统动能为

$$T=T_1+T_2=m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-ma\dot{\theta}(\dot{x}\sin\theta-\dot{y}\cos\theta)$$

$$+\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 \tag{1}$$

系统的势能$V=0$。

拉格朗日函数

$$L=T=m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-ma\dot{\theta}(\dot{x}\sin\theta-\dot{y}\cos\theta)+\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$$

因系统是保守系统，有能量守恒积分$T=T_0$。

将初始条件$t=0$时，$\dot{x}=\dot{y}=0$，$v_2=v=p/m$代入(1)得

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2$$

即 $$\dot{\theta}=\frac{p}{ma}$$

因此运动第一积分(即能量守恒积分)为

$$m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-ma\dot{\theta}(\dot{x}\sin\theta-\dot{y}\cos\theta)+\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2=\frac{p^2}{2m}$$

又因L中不显含x，y，故有两个循环积分

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=C_1,\quad 2m\dot{x}-ma\dot{\theta}\sin\theta=C_1 \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}=C_2,\quad 2m\dot{y}+ma\dot{\theta}\cos\theta=C_2 \tag{3}$$

由初始条件 $t=0$ 时，$\dot{x}=\dot{y}=0$，$\theta=0$，$\dot{\theta}=p/(ma)$代入(2)，(3)，求得

$$C_1=0, \quad C_2=P$$

将C_1，C_2的值代入(2)，(3)，整理后得

$$2\dot{x}-a\dot{\theta}\sin\theta=0 \tag{4}$$

$$2\dot{y}+a\dot{\theta}\cos\theta=\frac{p}{m}=a\dot{\theta} \tag{5}$$

由(4)，$dx=\frac{1}{2}a\sin\theta d\theta$，积分得

$$x=\frac{1}{2}a(1-\cos\theta) \tag{6}$$

由(5)，$dy=\frac{1}{2}a(1-\cos\theta)d\theta$，积分得

$$y=\frac{1}{2}a(\theta-\sin\theta)$$

(6)，(7)是M_1点的轨迹方程。

M_2点的轨迹方程为

$$x_2=x+a\cos\theta=\frac{1}{2}a(1+\cos\theta)$$

$$y_2=y+a\sin\theta=\frac{1}{2}a(\theta+\sin\theta)$$

由此可见，M_1，M_2两点均作圆滚线运动。

例4-38 求其拉格朗日函数 $L=L(\dot{q}_1, \dot{q}_2\cdots, \dot{q}_n)$是不依赖于广义坐标和时间的系统的运动。

[解] 因$L=L(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n)$不含广义坐标和时间，故

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

即q_1，q_2，…，q_n都为循环坐标。因此，有循环积分

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=C_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2}$$

系统的运动由n个循环积分确定。

例4-39 试求由拉格朗日函数$L=t\sqrt{1+\dot{x}^2}$所决定的点的运动规律。

［解］ 因$L=t\sqrt{1+\dot{x}^2}$中不显含x，故x为循环坐标，即

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

有循环积分

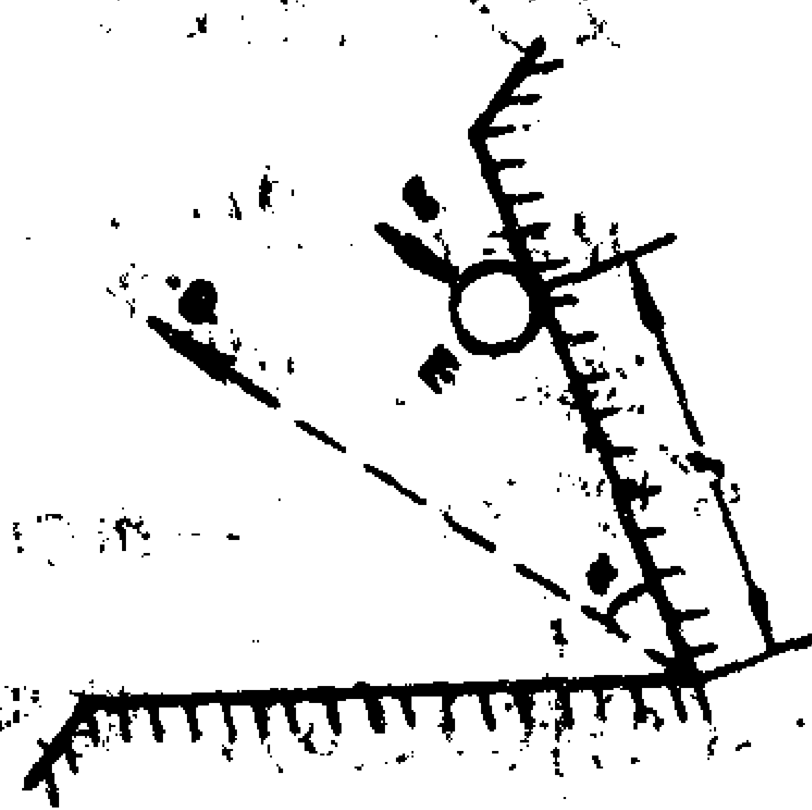
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{t\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}=c_0$$

点的运动方程

$$t\dot{x}=c_0\sqrt{1+\dot{x}^2}\text{或}\dot{x}^2(t^2-C)=C$$

式中 $C=C_0^2$

例4-40 采用(r,φ)为坐标，应用拉格朗日方法求出运动微分方程；试证明这些方程可以简化成一个关于r的微分方程，并且简化后所得方程和用罗司方法所得方程相同。



例4-40图

［解］ 以r，φ为广义坐标，系统的动能和势能分别为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\sin^2\alpha\dot{\varphi}^2)$$

$$V=mgr\cos\alpha$$

而拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha)-mgr\cos\alpha \tag{1}$$

因L中不显含φ，故有循环积分

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=C, \text{ 即} mr^2\sin^2\alpha\,\dot{\varphi}=C$$

于是 $$\dot{\varphi}=\frac{C}{mr^2\sin^2\alpha} \tag{2}$$

将(1)代入 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}-\frac{\partial L}{\partial r}=0$，得

$$m\ddot{r}-mr\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha+mg\cos\alpha=0 \tag{3}$$

将(2)代入(3)，得

$$m\ddot{r}-\frac{C^2}{mr^3\sin^2\alpha}+mg\cos\alpha=0 \tag{4}$$

又罗司函数为

$$R=L-\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi}=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha)$$
$$-mgr\cos\alpha-C\dot{\varphi} \tag{5}$$

将(2)代入(5)，整理后，得

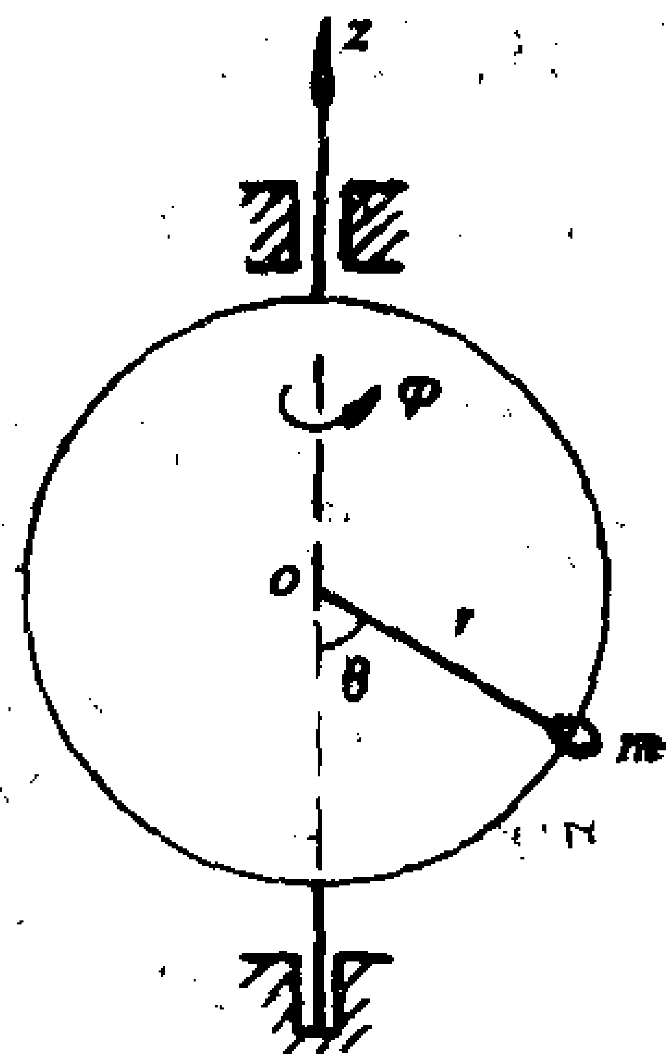
$$R=\frac{1}{2}m\dot{r}^2-\frac{1}{2}\frac{C^2}{mr^2\sin^2\alpha}-mgr\cos\alpha$$

代入罗司方程$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial\dot{r}}-\frac{\partial R}{\partial r}=0$，得

$$m\ddot{r}-\frac{C^2}{mr^2\sin^2\alpha}+mg\cos\alpha=0 \tag{6}$$

方程(6)与(4)相同。

例4-41 质量为m的小重环沿质量为M半径为r的光滑金属丝圆周滑动，金属丝圆周则绕其铅垂直径转动。试按罗司方程形式建立系统的运动微分方程、



例4-41图

［解］ 系统有二个自由度，取φ，θ为广义坐标，如图示。

系统的动能和势能分别为

$$T=\frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Mr^2\right)\dot{\varphi}^2$$

$V=-mgr\cos\theta$（0点为势能零点）

拉格朗日函数

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{1}{4}Mr^2\dot{\varphi}^2+mgr\cos\theta$$

因L中不显含φ，故φ为循环坐标，有循环积分

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=C \quad 即 \quad \left(mr^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}Mr^2\right)\dot{\varphi}=C$$

因此

$$\dot{\varphi}=\frac{C}{mr^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}Mr^2} \tag{1}$$

罗司函数

$$R=L-\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi}=\frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{1}{4}Mr^2\dot{\varphi}^2+mgr\cos\theta-C\dot{\varphi} \tag{2}$$

将(1)代入(2)，得

$$R=\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2-\frac{C^2}{r^2(M+2m\sin^2\theta)}+mgr\cos\theta \qquad (3)$$

将(3)代入罗司方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial R}{\partial\theta}=0$，得

$$mr^2\ddot{\theta}-\frac{2mc^2\sin 2\theta}{r^2(M+2m\sin^2\theta)}+mgr\sin\theta=0$$

或 $$\ddot{\theta}-\frac{2c^2\sin 2\theta}{r^4(M+2m\sin^2\theta)}+\frac{g}{r}\sin\theta=0$$

例4-42 求惠特克函数K，建立拉格朗日函数为

$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+q_1^2\dot{q}_3^2)-\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)$的系统的惠特克方程。

［解］ 系统有能量积分

$$\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+q_1^2\dot{q}_3^2)+\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)=h \qquad (1)$$

把q_3作为自变量，取代时间t，因此

$$\dot{q}_1=\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}q_3}\frac{\mathrm{d}q_3}{\mathrm{d}t}=\dot{q}_3q_1' \qquad \left(q_1'=\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}q_3}\right)$$

$$\dot{q}_2=\dot{q}_3q_2' \qquad \left(q_2'=\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}q_3}\right) \qquad (2)$$

将(2)代入(1)得

$$\dot{q}_3=\sqrt{\frac{2h-(q_1^2+q_2^2)}{q_1'^2+q_2'^2+q_1^2}} \qquad (3)$$

将(3)代入L中，并令其表示式为Ω，有

$$\Omega=\frac{1}{2}\dot{q}_3^2(q_1'^2+q_2'^2+q_1^2)-\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2) \qquad (4)$$

将(4)对$\dot{q}_3$求偏导一次，并令其表示式为L'，则

$$L' = \dot{q}_3({q'_1}^2 + {q'_2}^2 + q_1^2) \tag{5}$$

将(3)代入(5)，得

$$L' = ({q'_1}^2 + {q'_2}^2 + q_1^2)\sqrt{\frac{2h-(q_1^2+q_2^2)}{{q'_1}^2+{q'_2}^2+q_1^2}}$$

$$= \sqrt{[2h-(q_1^2+q_2^2)]\,({q'_1}^2+{q'_2}^2+q_1^2)} \tag{6}$$

因(6)中不显含q_3，故有新的能量积分

$$\frac{\partial L'}{\partial q'_1}q'_1 + \frac{\partial L'}{\partial q'_2}q'_2 - L' = K \tag{7}$$

得

$$-q_1^2\sqrt{\frac{2h-(q_1^2+q_2^2)}{{q'_1}^2+{q'_2}^2+q_1^2}} = K \tag{8}$$

又根据题给的L，求得

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1, \qquad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_2 \tag{9}$$

将(9)代入(1)，得

$$q_1^2\dot{q}_3^2 = 2h-(q_1^2+q_2^2)-(p_1^2+p_2^2)$$

或

$$q_1\dot{q}_3 = \sqrt{2h-(q_1^2+q_2^2)-(p_1^2+p_2^2)} \tag{10}$$

将(3)，(10)代入(8)，得

$$K = -q_1\sqrt{2h-(q_1^2+q_2^2)-(p_1^2+p_2^2)} \tag{11}$$

此即要求的惠特克函数。

三、习　题

4-1 应用拉格朗日方程推导单摆的运动微分方程。需分别以下列参数为广义坐标：

(1) 转角φ；(2) 水平坐标x；(3) 铅垂坐标y。

答：(1) $\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$；

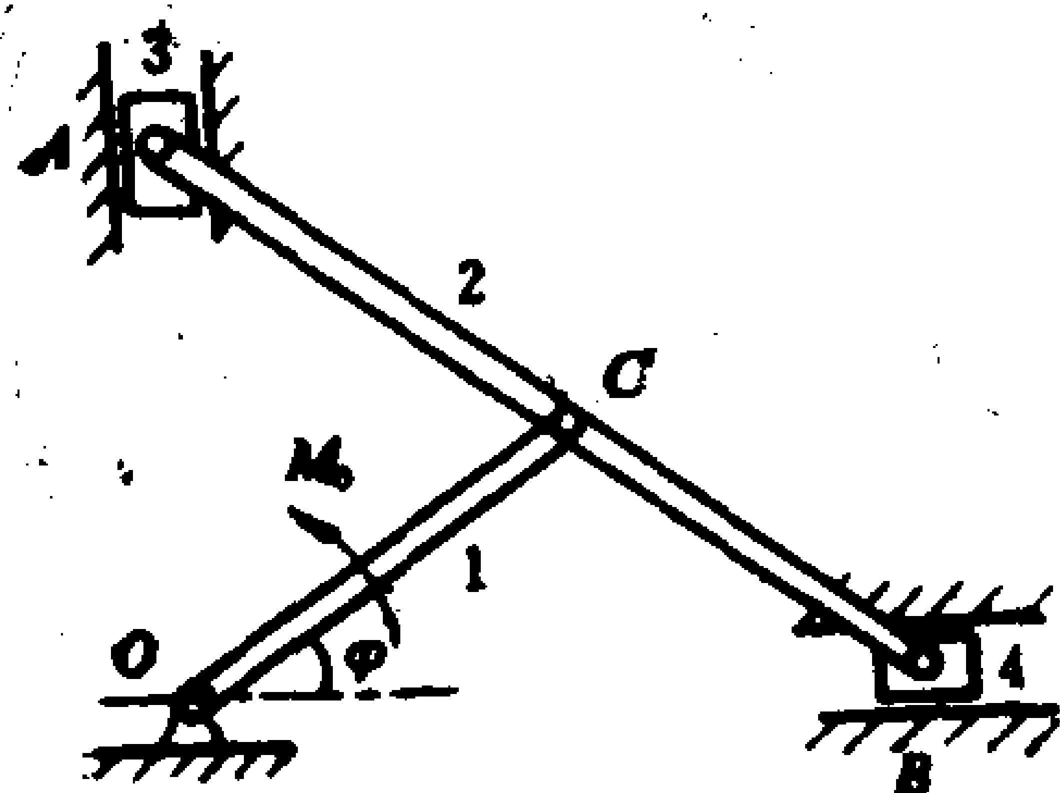
(2) $l^2[(l^2+x^2)\ddot{x}+x\dot{x}^2]+gx(l^2-x^2)^{3/2}=0$

(3) $l^2[(l^2-y^2)\ddot{y}+y\dot{y}^2]-g(l^2-y^2)^2=0$

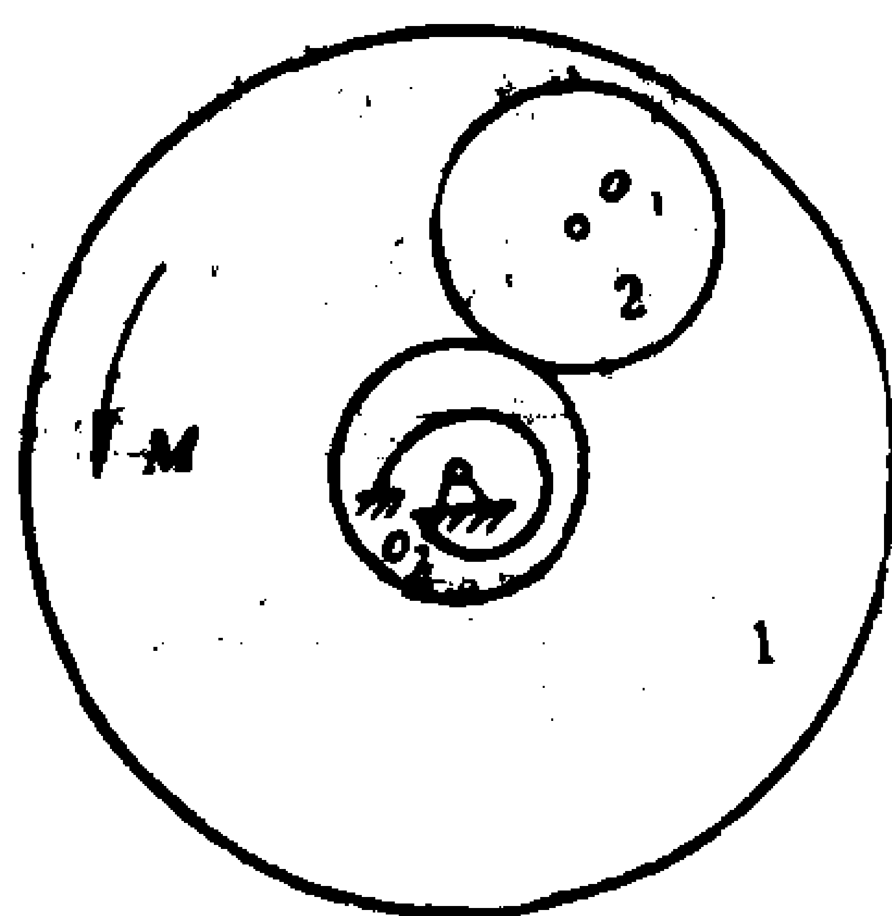
4-2 椭圆规尺由曲柄带动，作用在曲柄上的转动力矩为M_o。已知：曲柄与椭圆规尺为均质，重量分别为P和$2P$；$OC=AC=BC=a$；滑块A与B各重q，如不计摩擦，求曲柄的角加速度

答：$\varepsilon=\dfrac{M_o}{a^2(3P+4q)}g$

4-3 飞轮1在不变力矩M的作用下绕铅垂轴o_2转动。飞轮上带有齿轮2的转动轴o_1。齿轮2与齿轮3啮合，齿



题4-2图



题4-3图

轮 3 则可以和飞轮无关地绕同一轴转动。齿轮 3 的转动受到图上所表示出的螺旋弹簧盘的阻碍。该弹簧的反作用力矩与齿轮 3 的转角ψ成正比例，等于 $c\psi$。设两齿轮均为均质圆盘，半径同为a，质量同为m；飞轮对于轴O_1的转动惯量为$20ma^2$；最初该系统处于静止状态。求该系统的运动。

答：

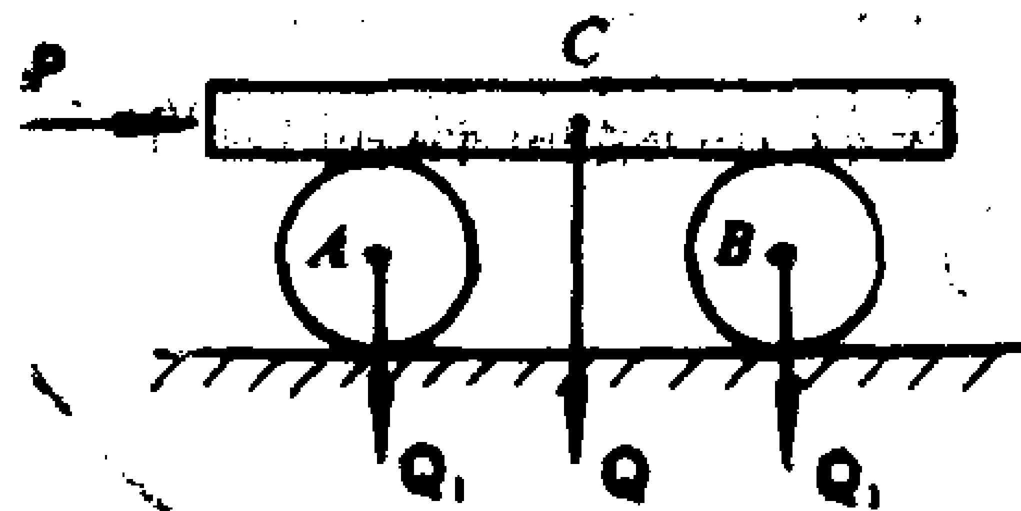
$$\psi=\frac{M}{26c}\left(1-\cos 1.02\sqrt{\frac{c}{ma^2}}t\right)$$

$$\varphi=\frac{Mt^2}{52ma^2}+\frac{M}{676c}\left(1-\cos 1.02\sqrt{\frac{c}{ma^2}}t\right)$$

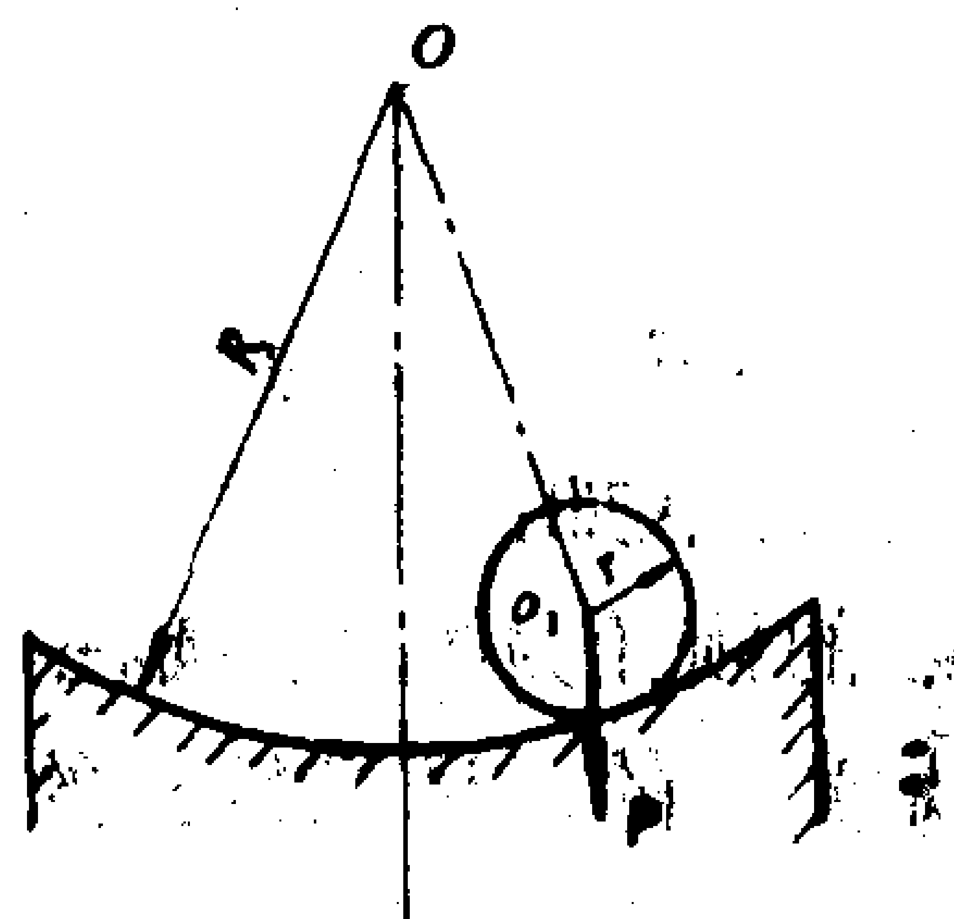
4-4 木板放在两个滚子上，由于水平力$\boldsymbol{P}$的作用而引起运动。设板重为Q，而每一滚子重为Q_1。求板的运动。

答：匀变速运动，$w=\dfrac{P}{Q+\frac{3}{4}Q_1}g$

4-5 均质圆柱体半径为r，重P，在半径为R的圆柱形槽内滚而不滑。求：(1) 微小摆动的周期；(2) 如起始时的OO_1线与铅垂线成φ_0角，圆柱体无初速地滚下，求当圆



题4-4图



题4-5图

柱滚到最低位置时对圆槽的正压力和摩擦力。

答： (1) $T=2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$；

(2) $N=P+\frac{4}{3}\left(1-\cos\varphi_0\right)P$；$F=0$

4-6 飞轮在水平面内绕铅垂轴 O 转动，轮幅上套一滑块 A，并以弹簧与轴心相连。已知：飞轮的转动惯量为 J_0；滑块的质量为 m；弹簧的刚性系数为 c；弹簧原长为 l。试从飞轮的转角 θ 和弹簧的伸长为广义坐标，写出系统的运动微分方程和初积分。

答： 运动微分方程为

$$\frac{d}{dt}\left[J_o\dot{\theta}+m(l+x)^2\dot{\theta}\right]=0$$

$$m\ddot{x}-m(l+x)\dot{\theta}^2+cx=0$$

方程的初积分为

$$\dot{\theta}=\frac{c_1}{J_0+m(l+x)^2}$$

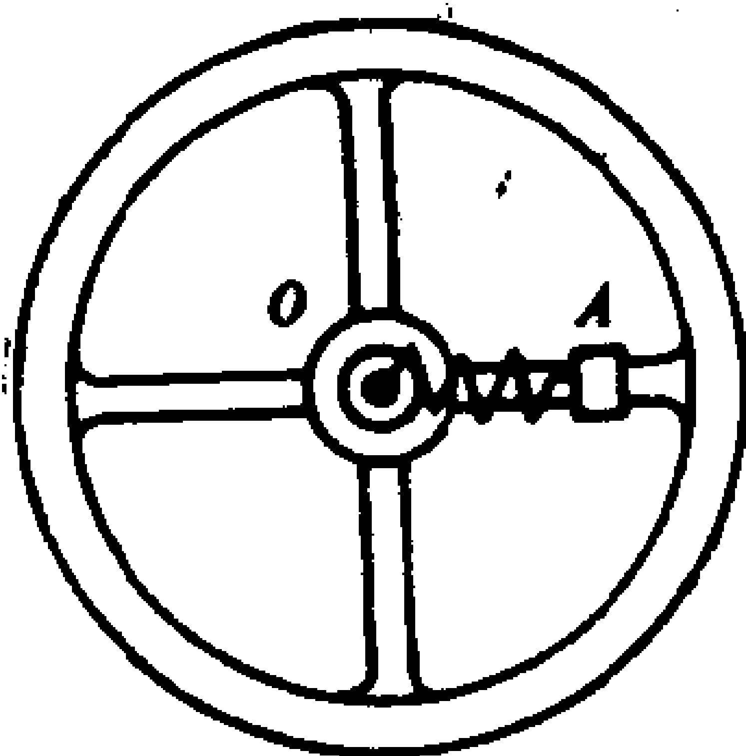
$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}cx^2+\frac{1}{2}\left[J_0+m(l+x)^2\right]\dot{\theta}^2=c_2$$

其中 c_1 和 c_2 为积分常数。

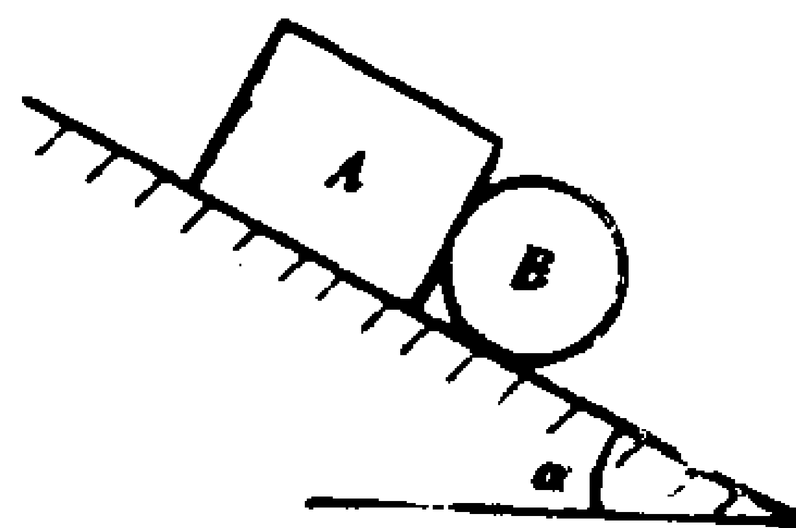
4-7 重量为 P 的棱柱 A 和重量为 Q 的实心均质圆柱 B 有公切点(如图示)。两个柱体一齐沿斜面向下运动。斜面与水平的倾角为 α。设圆柱只滚不滑，而棱柱的底面和前侧面都是光滑的。试求棱柱的加速度。

答：

$$a=2g\frac{P+Q}{2P+3Q}\sin\alpha$$



题4-6图

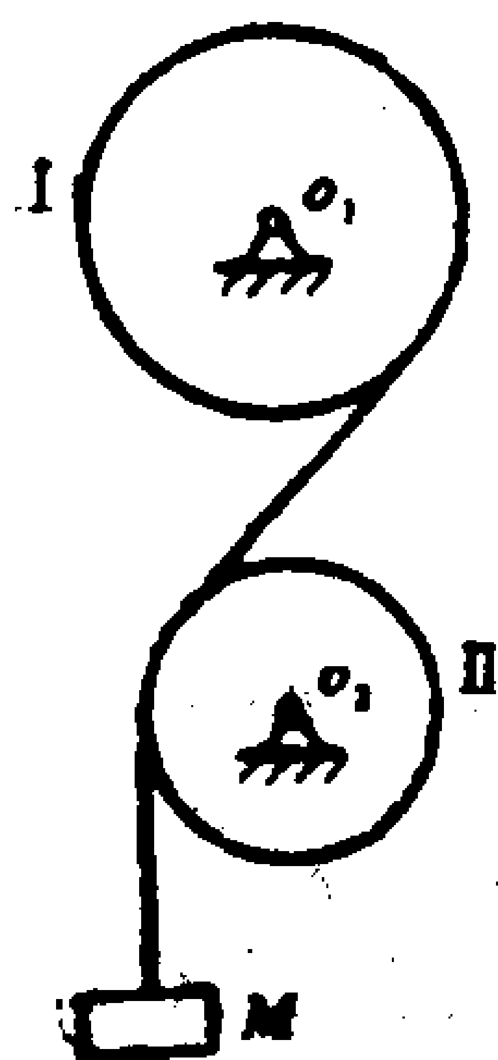


题4-7图

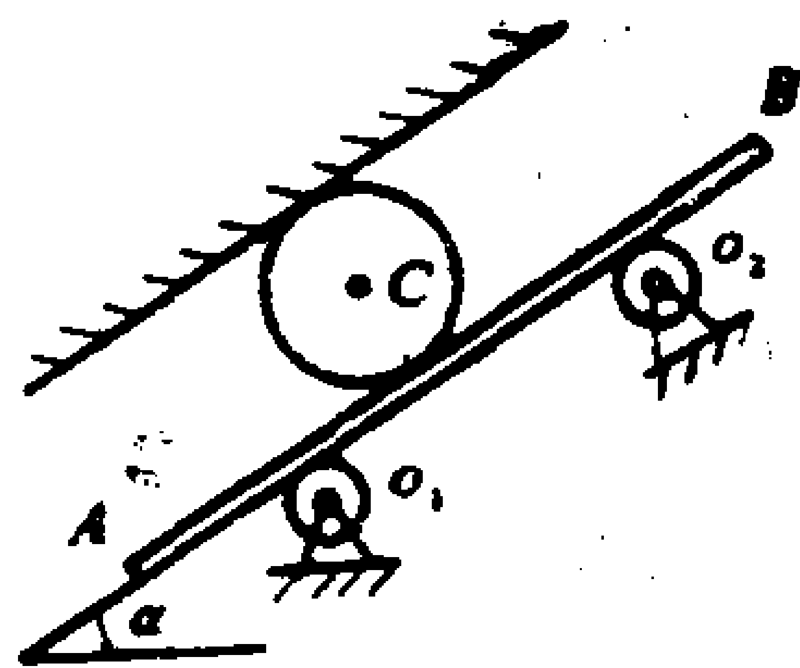
4-8 两个滑轮Ⅰ和Ⅱ的重量分别为Q和Q_2，而重物M的重量则为P。重物M下降时解开轮Ⅰ上的绳并且无滑动地带动两轮旋转。设两轮为实心均质圆柱，求重物M的加速度。

答：
$$a=\frac{2P}{2P+Q+Q_2}g$$

4-9 重量为P_1的杆AB向下平动，使两个各自重量为P_2的相同辊轴分别绕水平轴O_1及O_2转动，同时迫使夹在杆



题4-8图



题4-9图

和固定平面之间的重量为P_3的圆盘滚而不滑。设杆AB及固定平面与水平面的倾角为α，试求圆盘重心的加速度。

答：$$a_0=2g\frac{2P_1+P_3}{8P_1+8P_2+3P_3}\sin\alpha$$

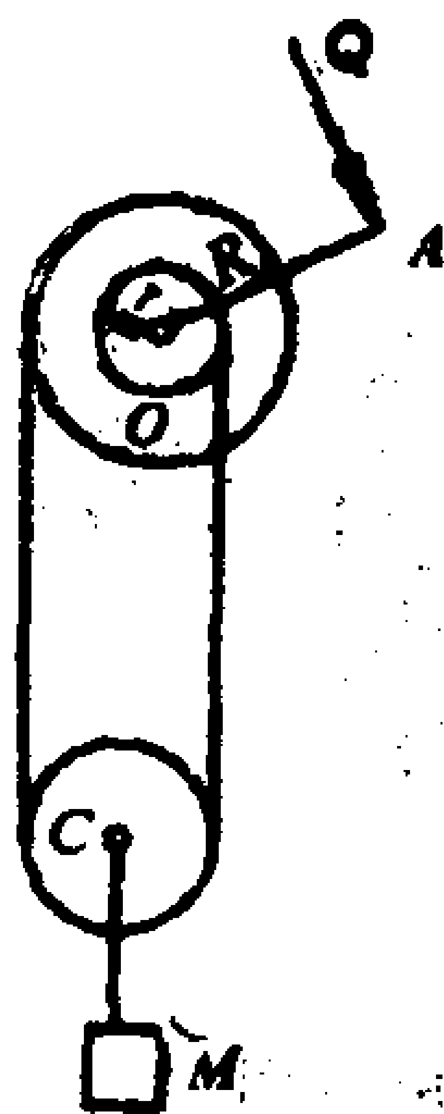
4-10 在差动铰车的手柄OA的A点施加垂直于OA的力Q，使重物M提升。手柄OA的长为l，M的重量为P_1。上面滑轮的半径为r及R，相对轴O的转动惯量为J_1；底下滑轮的重量为P_2，相对轴C的转动惯量为J_2。略去绳和手柄的重量及摩擦，试求重物M的加速度。

答：$$a=\frac{[2Ql-(P_1+P_2)(R-r)](R-r)}{(P_1+P_2)(R-r)^2+4g(J_1+J_2)}g$$

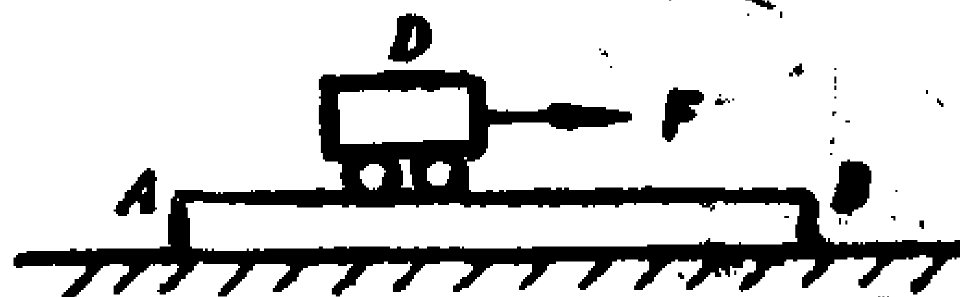
4-11 平台AB放在光滑水平面上，其重量为P_1。手推车D的车身重P_2，四个轮子各重Q，轮子的质量沿轮缘均匀分布。如在手推车上有水平力$\boldsymbol{F}$作用，试求平台AB的加速度。设轮子在平台上只滚不滑。

答：

$$a=\frac{4gFQ}{P_1P_2+4Q(2P_1+P_2+4Q)}$$



题4-10图



题4-11图

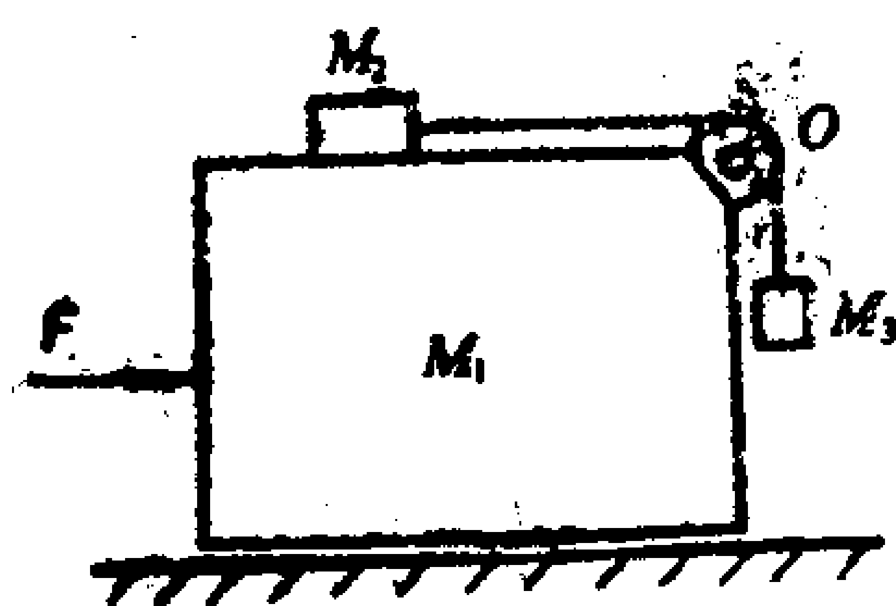
4-12 棱柱体M_1、M_2、M_3的重量分别为P_1、P_2、P_3。在棱柱M_1上有水平力**F**作用。略去摩擦及滑轮O的重量，试求棱柱M_1的加速度。

答：

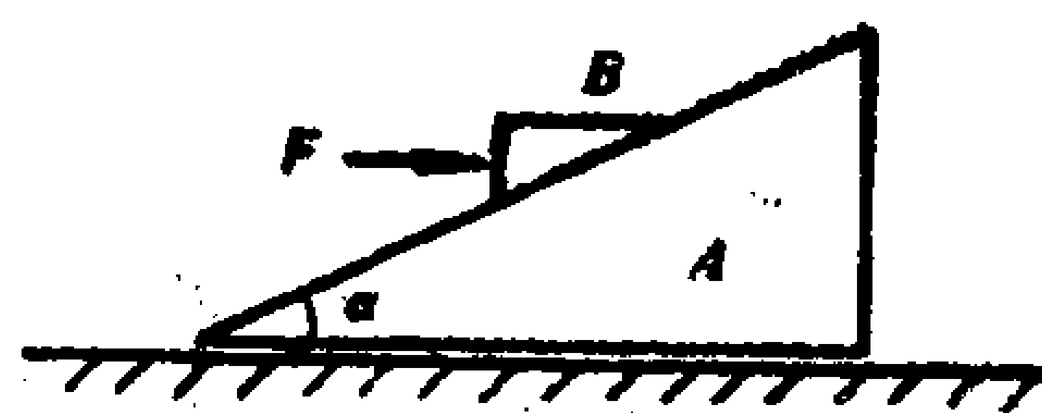
$$a_1=\frac{F(P_2+P_3)-P_2P_3}{(P_1+P_3)P_2+(P_1+P_2+P_3)P_3}g$$

4-13 楔块A的重量等于P_1，沿水平面滑动，而楔块B则沿A的斜面滑动。B的重量等于P_2，角α为已知。如在楔块B上有水平力$\boldsymbol{F}$作用，试求楔块A的加速度。摩擦略去不计。

答：　　$$a=\frac{F\sin\alpha+P_2\cos\alpha}{P_1+P_2\sin^2\alpha}g\sin\alpha$$



题4-12图



题4-13图

4-14 重量为P_1的楔块A放在水平面上，而重量为P_2的物体B则放在斜面上，在半径为r的滑轮O上作用有顺时针方向的力矩M。略去滑轮重量及摩擦，试求楔块A的加速度。

答：　　$$a=\frac{P_2r\sin\alpha-M}{P_1+P_2\sin^2\alpha}g\cos\alpha$$

4-15　重量为P_1的楔块A放在水平面上，而重量为P_2的物体B则放在斜面上。滑轮O的重量等于Q见题4-14图设滑轮的质量沿轮缘均匀分布，且略去摩擦，试求楔块A的加速度。

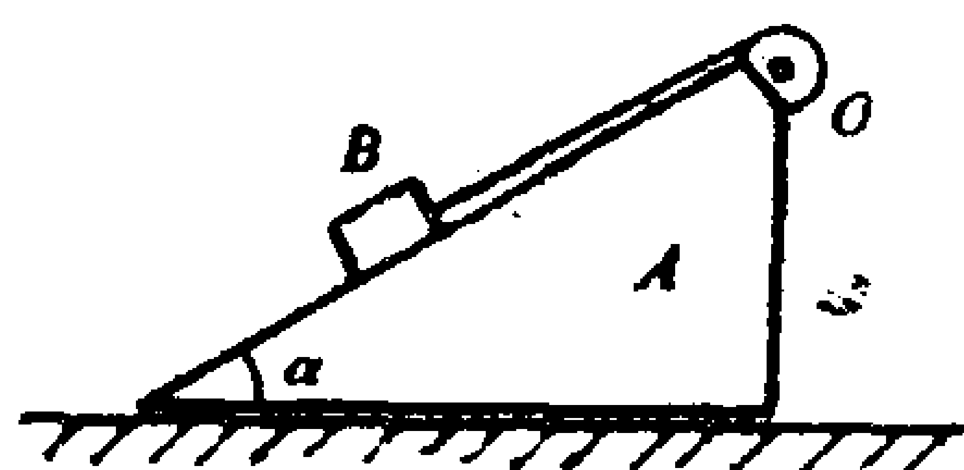
答：

$$a=\frac{gP_2^2\sin\alpha\cos\alpha}{P_2(P_1+P_2\sin^2\alpha+2Q)+Q(P_1+Q)}$$

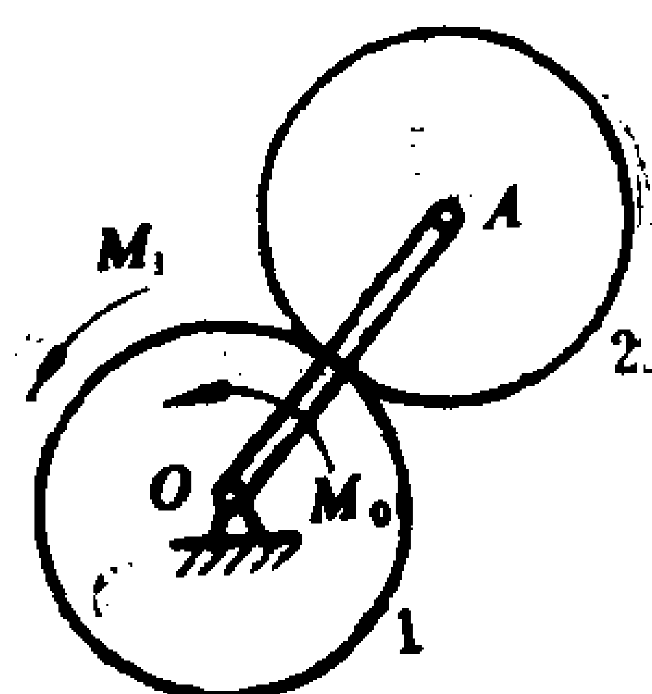
4-16　在水平面内的机构由两个相同的齿轮1和2同曲柄OA组成。两轮的质量沿轮缘分布，每一轮相对其轴的转动惯量均为J。如在曲柄上施加转矩M_0，在轮1上施加转矩M_1，试求曲柄及齿轮的角加速度。曲柄的质量和摩擦略去不计。

答：

$$\varepsilon_0=\frac{M_0+M_1}{6J};\quad \varepsilon_1=\frac{M_0+4M_1}{6J};\quad \varepsilon_2=\frac{M_0-2M_1}{6J}$$



题4-14图



题4-16图

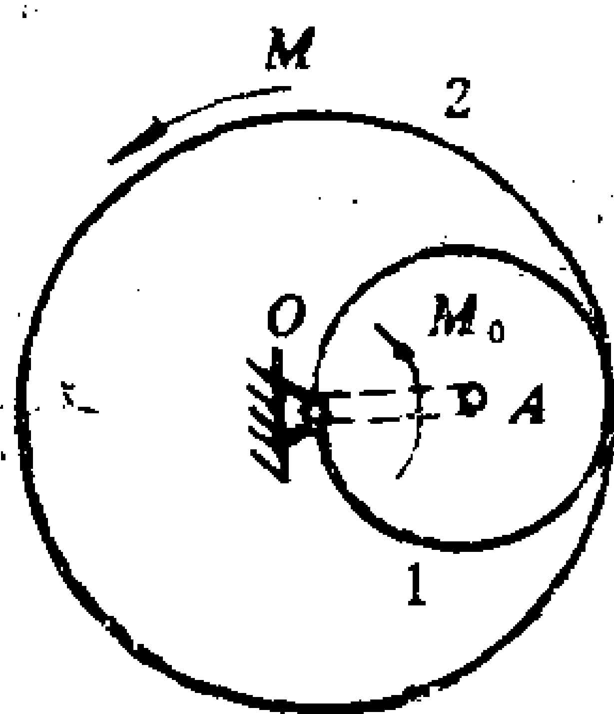
4-17　在水平面内的机构中，齿轮1的重量为P，半径为r；齿轮2的重量为Q，半径为$2r$。在曲柄OA上施加转矩M_0，在齿轮2上施加转矩M。设齿轮2的质量沿其轮缘分布，齿轮1为均质圆盘；曲柄质量略去不计。试求齿轮2的角加速度。

答：
$$\varepsilon_2=\frac{3M+2M_0}{4r^2(P+3Q)}$$

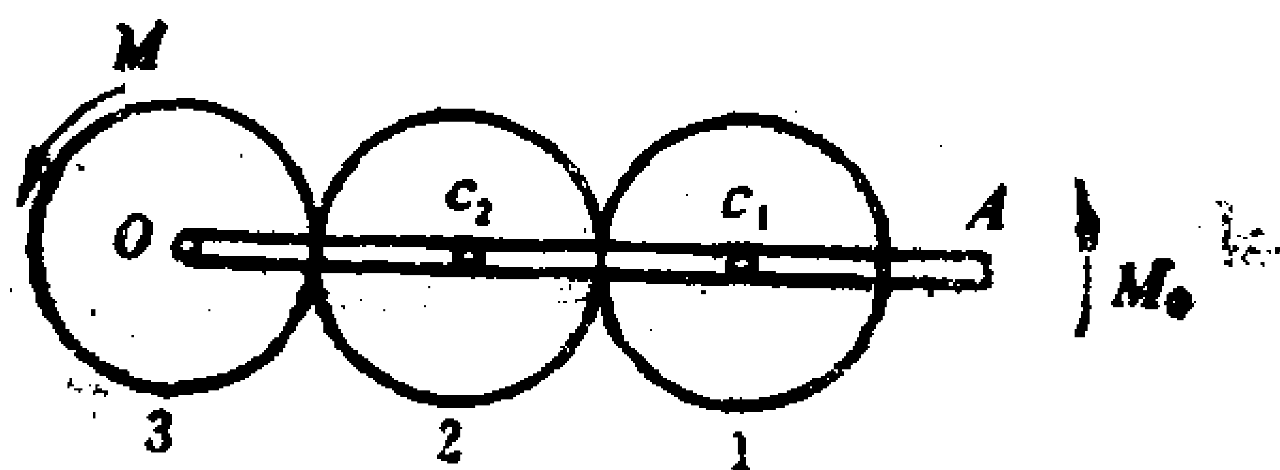
4-18 三齿轮机构放置在水平面内。三个齿轮为相同的的均质圆盘，其半径为r，质量为m。在曲柄OA及齿轮3上分别施加转矩M_0及M。略去曲柄的重量及摩擦，试求齿轮和曲柄的角加速度。

答：

$$\varepsilon_1=\varepsilon_3=\frac{M_0+22M}{32mr^2};\quad \varepsilon_2=\frac{M_0-10M}{16mr^2};\quad \varepsilon_{OA}=\frac{2M+3M_0}{64mr^2}$$



题4-17图



题4-18图

4-19 在重量为P_1的实心均质圆柱A上缠以绳索，其另一端连到滑轮B的轮缘上。滑轮B的转轴O是固定的；该轮的重量为P_2，半径为r，设为均质实心圆柱。绳与平面之间的摩擦、绳的重量以及轴承摩擦均略去不计。圆柱A滚动时解开绳索，并无滑动。设施加于滑轮B的转矩为M，试求滑轮B的角加速度和圆柱轴C的加速度。

答：
$$\varepsilon=\frac{6Mg}{(2P_1+3P_2)r^2};\quad a_c=\frac{2Mg}{(2P_1+3P_2)r}$$

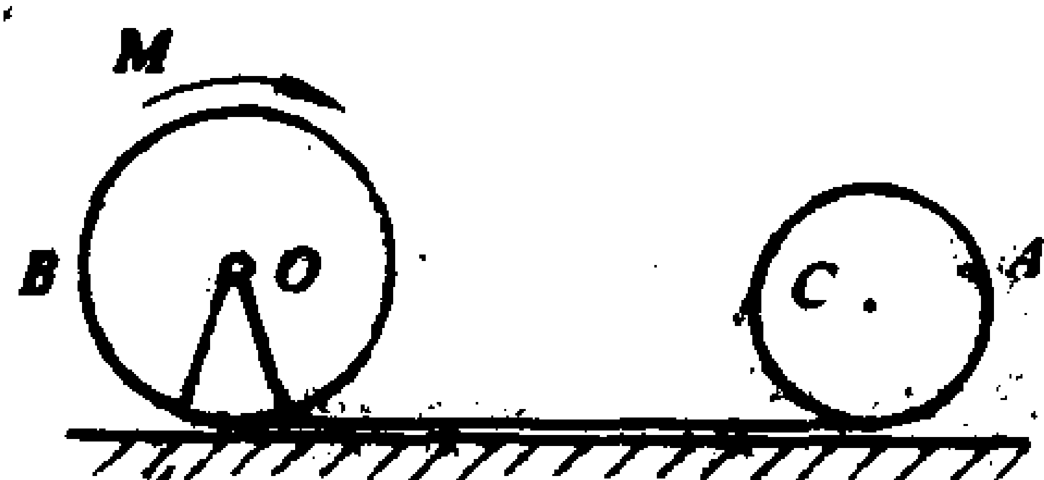
4-20 在重量为P的物体A上作用着平行于光滑平面的

力F，该平面与水平面成角α。物体A上还连接着绳索，绳的另一端缠在重量为Q的均质实心圆柱上。圆柱从平面滚下时解开绳索。试求物体A和圆柱轴O的加速度以及当圆柱轴的绝对加速度等于零时力F的大小。

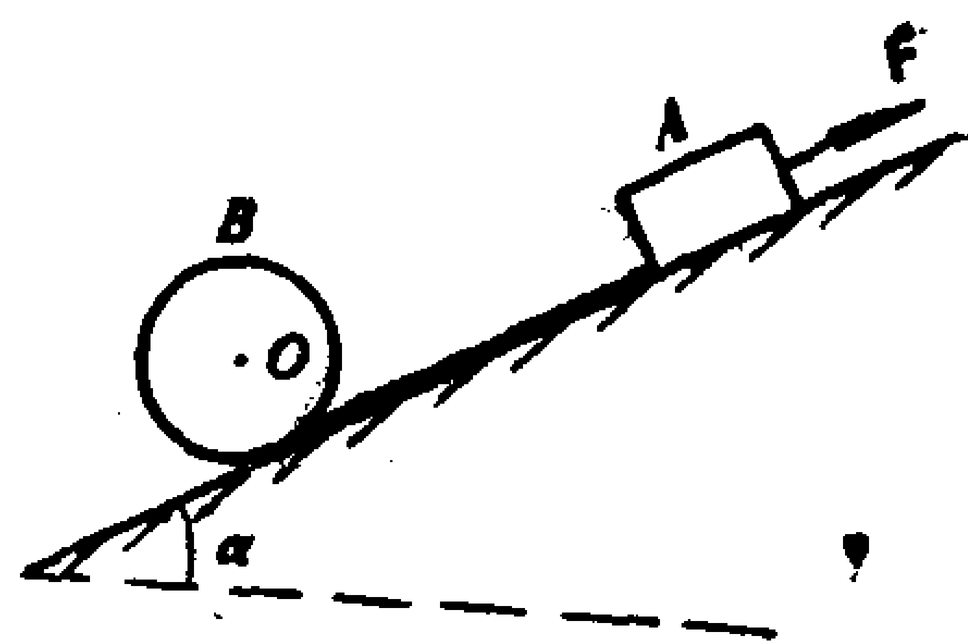
答：

$$a=g\left(\frac{3F}{3P+Q}-\sin\alpha\right);\quad a_0=g\left(\frac{F}{3P+Q}-\sin\alpha\right);$$

$$F=(3P+Q)\sin\alpha$$



题4-19图



题4-20图

4-21 重量为P的平台AB放在与水平成α角的斜面上。平台上有一均质实心圆柱，其重量为Q，其轴沿水平放置。如平台与斜面之间的摩擦系数等于f，试求平台及圆柱轴的加速度。又如$f=0$，圆柱的角加速度等于多少？平台与圆柱之间无滑动。

答：

$$a=g\left[\sin\alpha-3f\frac{P+Q}{3P+Q}\cos\alpha\right];$$

$$a_0=g\left[\sin\alpha-f\frac{P+Q}{3P+Q}\cos\alpha\right];\quad \varepsilon=0$$

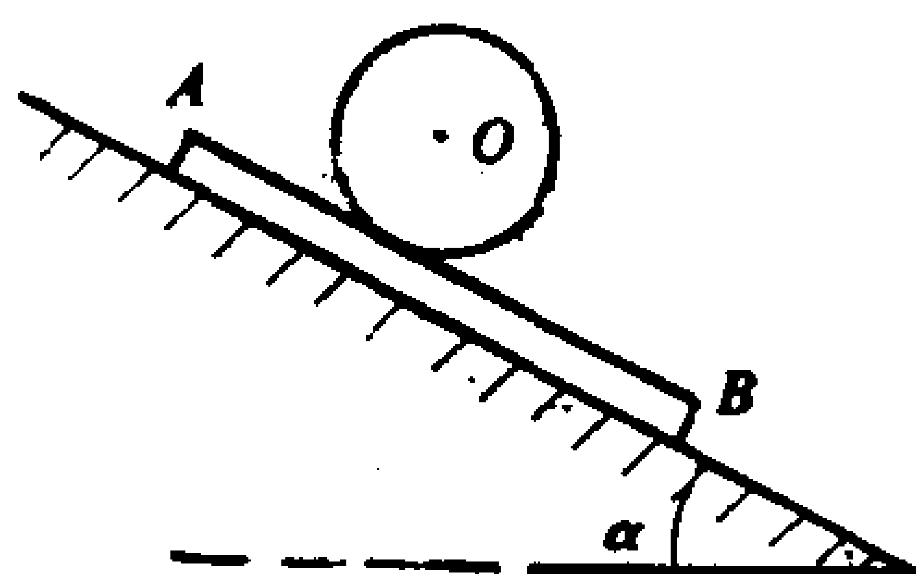
4-22 重量为P的三棱柱A放在光滑斜面上，斜面与水

平成α角。在三棱柱的上水平面上放置一个重量为Q的均质圆柱。如圆柱与棱柱之间无滑动，试求三棱柱及圆柱轴O的加速度。

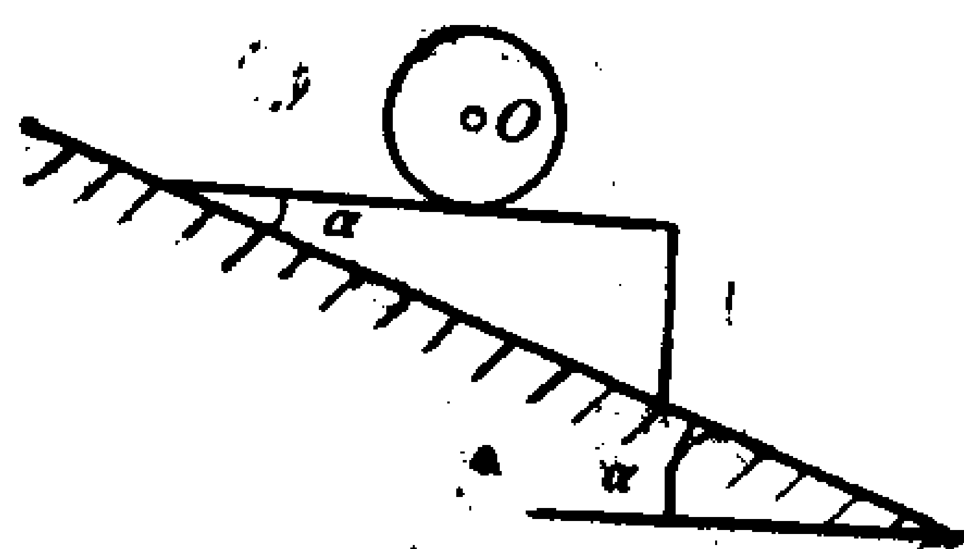
答：

$$a_1 = 3g\frac{(P+Q)\sin\alpha}{3P+Q(1+2\sin^2\alpha)}$$

$$a_0 = g\frac{(P+Q)\sqrt{1+8\sin^2\alpha}}{3P+Q(1+2\sin^2\alpha)}\sin\alpha$$



题4-21图



题4-22图

4-23 与水平成α角的斜面AA_1上，放置重量为P_1的物体B，在其一个面上又放置另一个重量为P_2的物体C。$\alpha=30°$，$\beta=60°$，略去摩擦，试求物体B的加速度以及物体C相对物体B的加速度。

答：

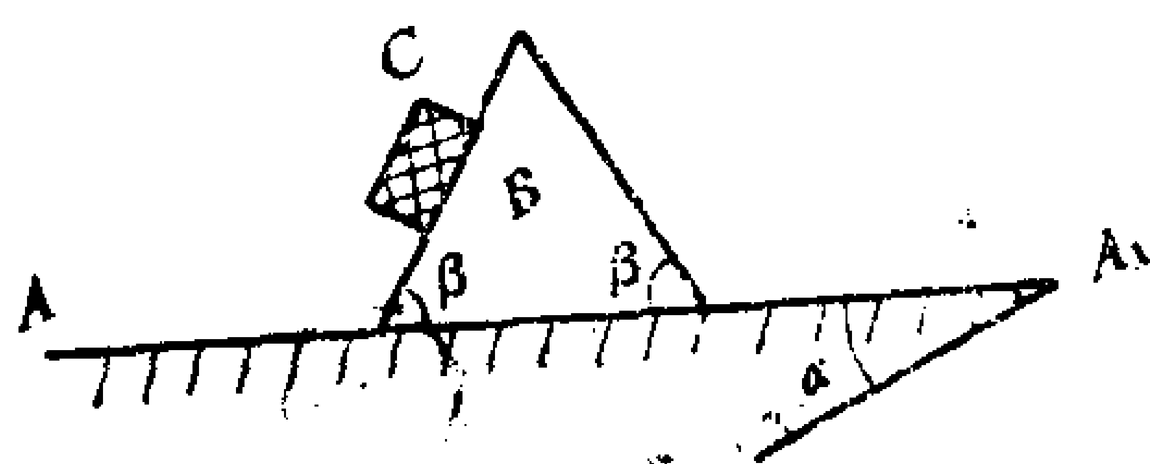
$$a_B=\frac{2P_1+3P_2}{4P_1+3P_2}g; \quad a_r=\frac{3(P_1+P_2)}{4P_1+3P_2}g$$

4-24 两个具有相同半径的圆柱形滑轮反向转动，在其上放置一块重量为P的均质水平板。板上又放置一个重量为Q的圆柱，其轴与滑轮轴平行。板与滑轮之间的摩擦系数为

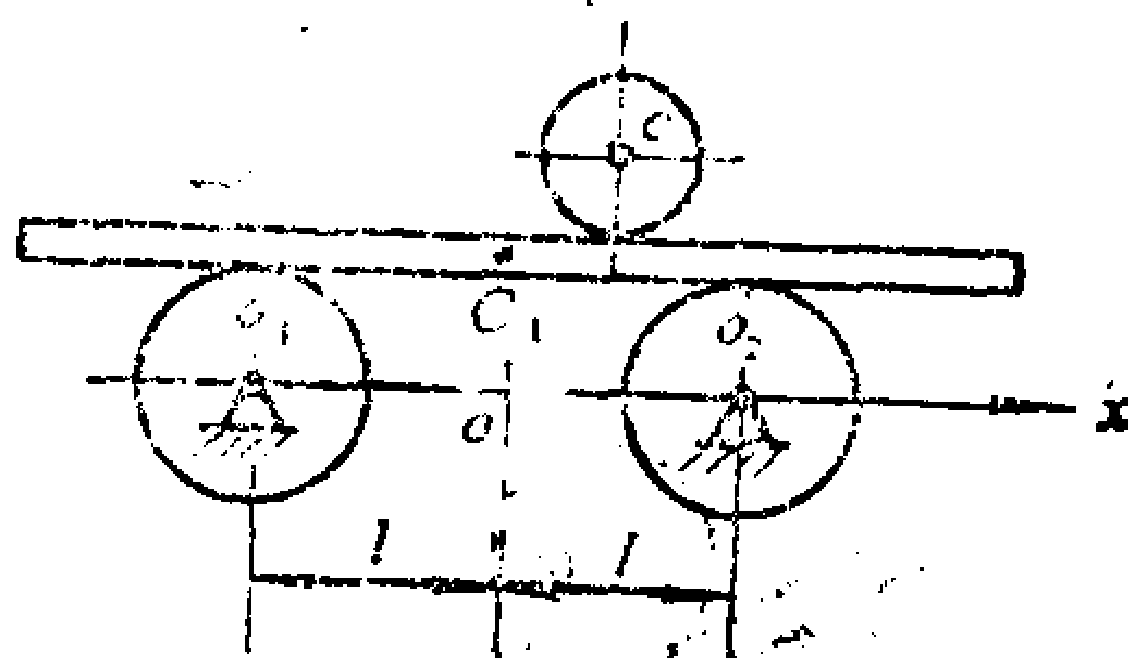
f。如圆柱沿板只滚不滑，试求圆柱轴C的运动方程。设在初瞬时，板和圆柱处于静止状态，它们的重心在距坐标原点O为x_0的铅垂平面内，$O_1O_2=2l$。

答：

$$x_c=\frac{x_0}{3P+Q}\left[(P+Q)\cos\sqrt{\frac{fg}{l}}t+2P\right]$$

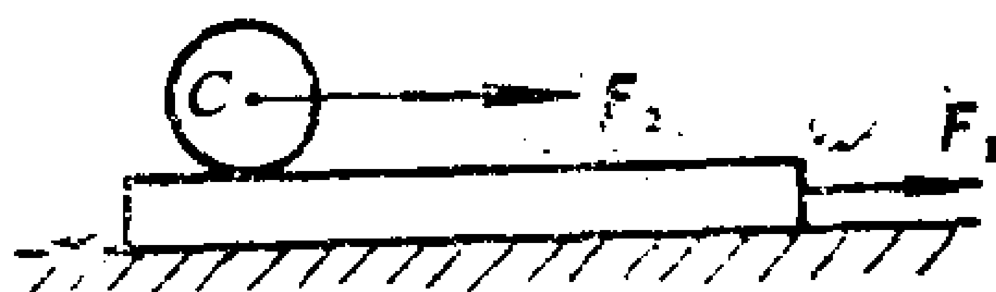


题4-23图



题4-24图

4-25 水平台的重量等于P_1，均质实心圆柱的重量为P_2。在平台及圆柱轴C上施加平行力$\boldsymbol{F}_1$及$\boldsymbol{F}_2$。设圆柱与平台之间无滑动，试求平台及圆柱轴C的加速度。



题4-25图

答：

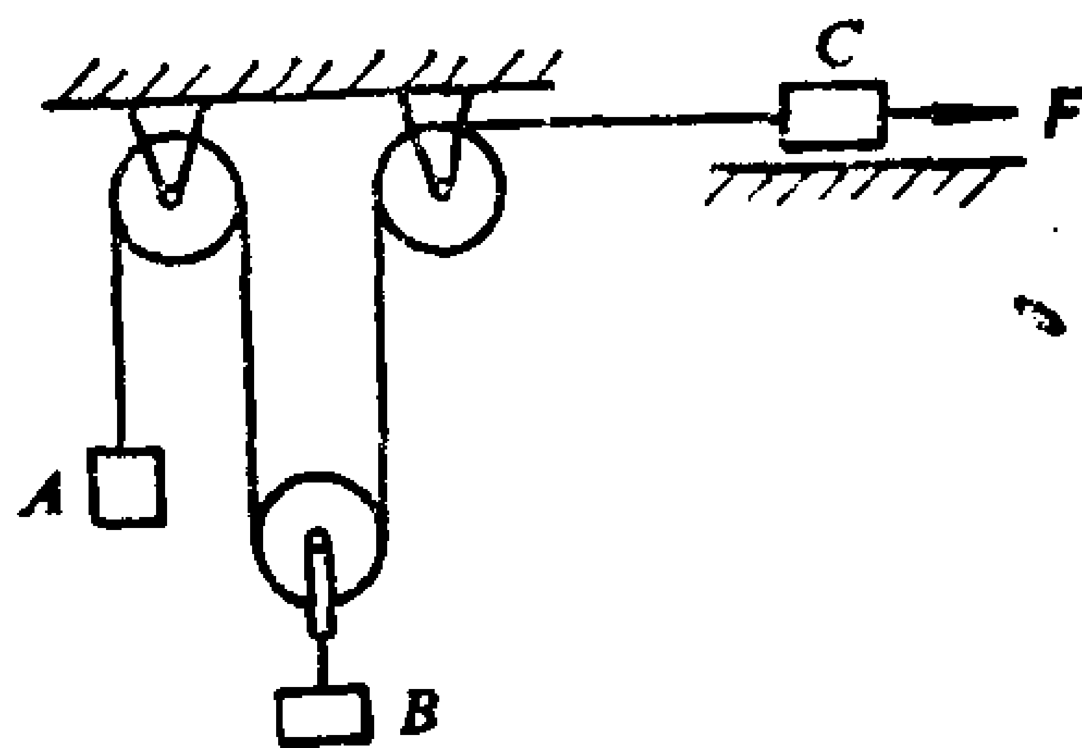
$$a_1=\frac{3F_1+F_2}{3P_1+P_2}g;\quad a_c=\frac{2F_2P_1+(F_1+F_2)P_2}{(3P_1+P_2)P_2}g$$

4-26 重物A、B、C的重量分别为P_1、P_2、P_3。重物C放在光滑水平面上，在其上有水平力$\boldsymbol{F}$作用。不计滑轮及绳的重量，试求重物A及C的加速度。

答：

$$a_A=\frac{P_1(P_2+4P_3)-P_2(F+2P_3)}{P_1P_2+4P_1P_3+P_2P_3}g;$$

$$a_c=\frac{F(4P_1+P_2)-3P_1P_2}{P_1P_2+4P_1P_3+P_2P_3}g$$



题4-26图

4-27　在重量为P_1的水平板A上放置重量为P_2的物块B。物体A与B及物体A与固定平面之间的摩擦系数为f。略去滑轮和和绳的重量，试求平板A、物块B、以及重物M的加速度。重物M的重量为P_3。

答：

$$a_1=\frac{2P_2P_3-f(4P_1P_2+P_1P_3-P_2P_3)}{4P_1P_2+P_1P_3+P_2P_3}g$$

$$a_2=\frac{2P_1P_3-f(4P_1P_2+P_2P_3-P_1P_3)}{4P_1P_2+P_1P_3+P_2P_3}g$$

$$a_3=\frac{P_3(P_1+P_2)-4fP_1P_2}{4P_1P_2+P_1P_3+P_2P_3}g$$

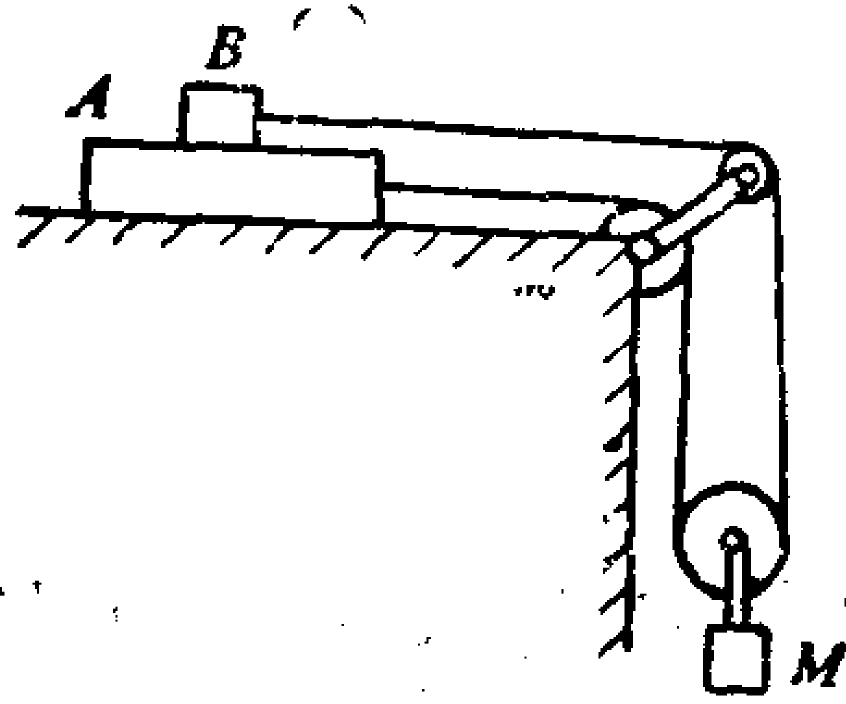
4-28　重量为P_1的平台AB放置在水平面上。物体M的重量为P_2。弹簧的刚度系数为c。在平台上施加水平力$\boldsymbol{F}$。如系统的运动从静止状态开始，此时弹簧无变形，试求平台及物体M的加速度。诸力$\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$、$\boldsymbol{F}$和弹簧处于同一铅垂平面内，略去摩擦。

答：

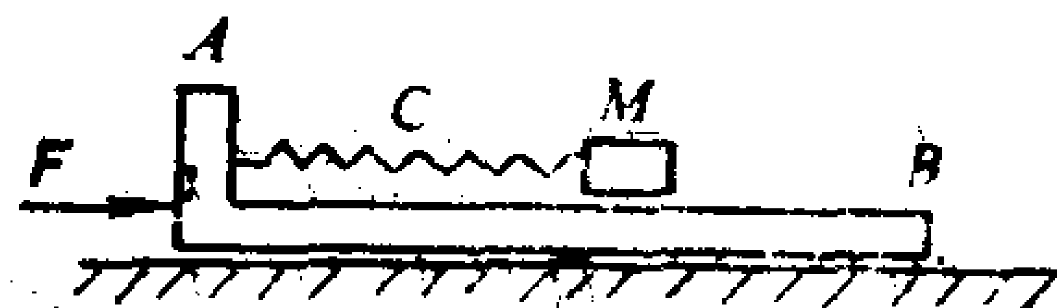
$$a_1=\frac{gF}{P_1+P_2}\left(1+\frac{P_2}{P_1}\cos kt\right)$$

$$a_2=\frac{gF}{P_1+P_2}\left(1-\cos kt\right)$$

$$k^2=\frac{P_1+P_2}{P_1P_2}cg$$



题4-27图



题4-28图

4-29 放在光滑水平面上的楔块A的重量等于P_1。均质实心圆柱的重量为P_2。弹簧的刚性系数为c。角α为已知。如在初瞬时系统处于静止，弹簧无变形，试求楔块的运动方程。设圆柱与楔块之间无滑动。

答：

$$x=-\frac{P_2}{3c}\left(1-\cos kt\right)\sin 2\alpha$$

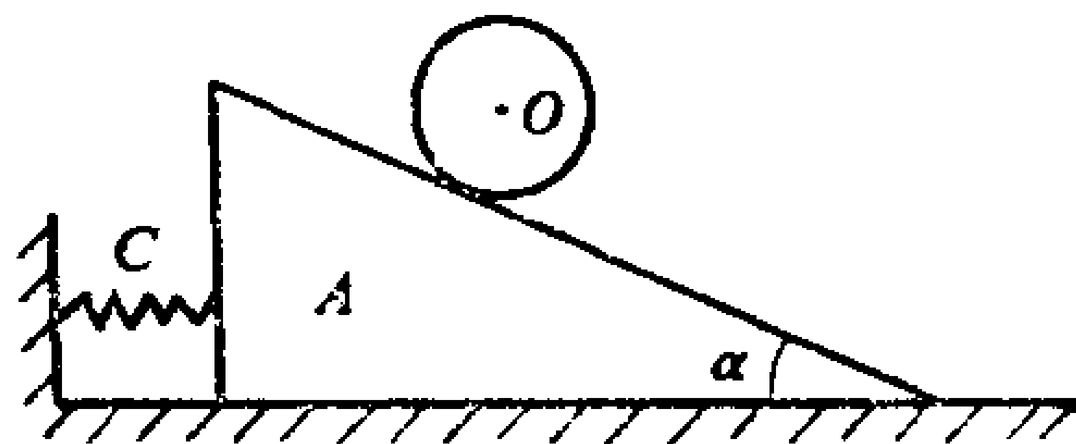
式中 $$k^2=\frac{3cg}{3P_1+P_2(1+2\sin^2\alpha)}$$

4-30 楔块A的重量等于P_1，物体B的重量为P_2，水平弹簧的刚度系数为c，α角为已知。如系统自静止状态开始运动，试求三棱柱A的加速度。设弹簧在初瞬时无变形，略去弹簧重量摩擦。

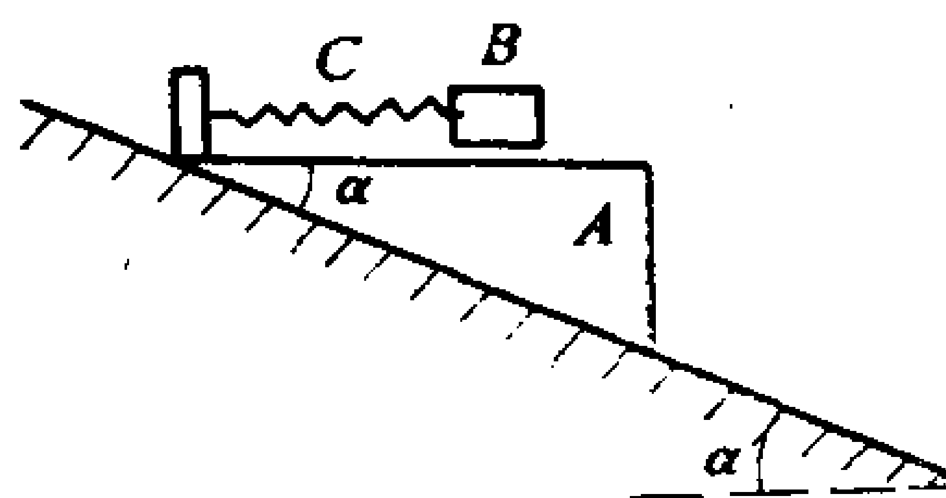
答:

$$a_1 = g\sin\alpha + \frac{P_2\sin\alpha\cos^2\alpha}{P_1+P_2\sin^2\alpha}g\cos kt$$

式中 $k^2 = cg\dfrac{P_1+P_2}{(P_1+P_2\sin^2\alpha)P_2}$



题4-29图



题4-30图

4-31 二均质实心圆盘的半径相同，其质量均为 m，二轴 O_1 和 O_2 用弹簧相连结。弹簧的刚性系数等于 c，其自然长度为 l，弹簧与斜面平行，斜面与水平成 α 角。如运动自静止状态开始，此时弹簧的形变等于 δ_0，试求圆盘中心的运动方程。设圆盘 1 重心的初始位置取为坐标原点，圆盘滚动而不滑动。

答:

$$x_1 = \frac{g}{3}t^2\sin\alpha + \frac{\delta_0}{2}\left(1-\cos kt\right)$$

$$x_2 = \frac{g}{3}t^2\sin\alpha + \frac{\delta_0}{2}\left(1+\cos kt\right)+l$$

式中 $k^2 = \dfrac{4c}{3m}$

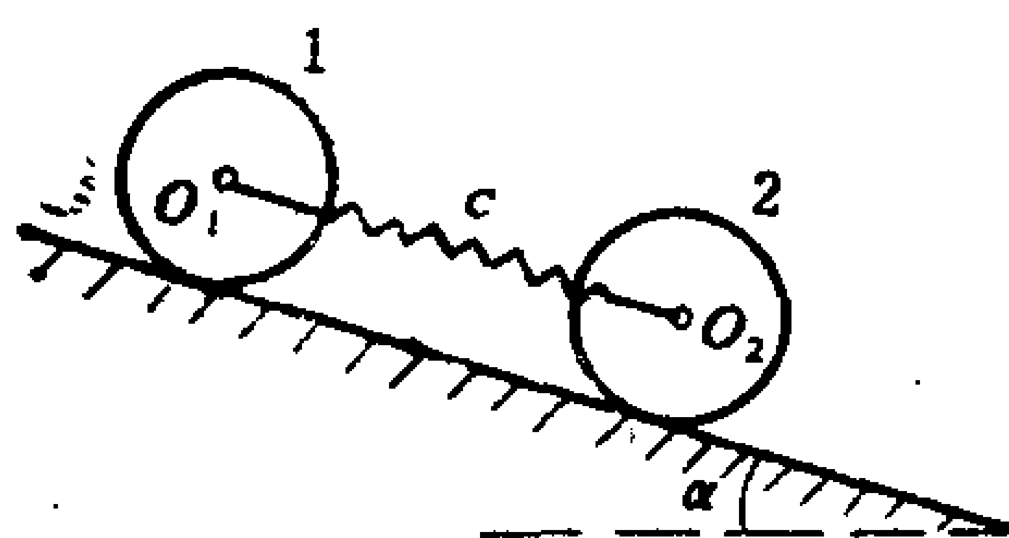
4-32 滑轮的 O 轴与刚性系数为 c 的铅垂弹簧一端相连。重物 M 在铅垂降落时解开绳子促使滑轮转动，滑轮的 O 轴则沿铅垂方向振动。设滑轮为均质圆盘，其重量为 Q，重物 M

的重量为P。略去弹簧和绳的重量。系统自静止状态释放，此时弹簧无形变。试求滑轮O轴及重物M的加速度。

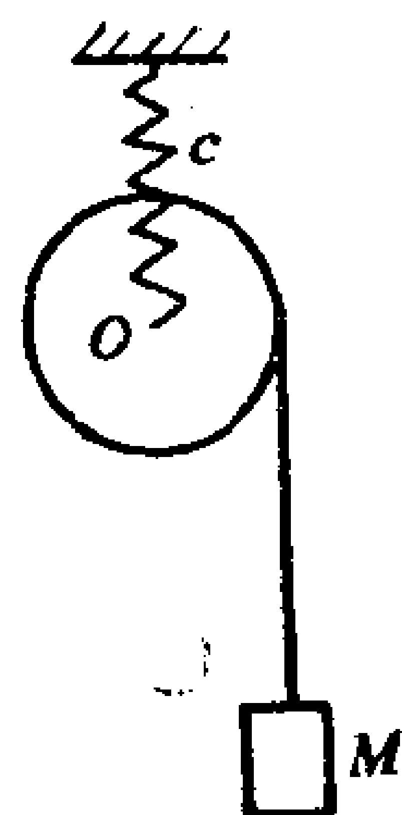
答：

$$a_0=g\cos kt;\quad a_M=g\frac{2P+Q\cos kt}{2P+Q}$$

式中 $k=\sqrt{\dfrac{cg}{Q}\dfrac{2P+Q}{3P+Q}}$



题4-31图



题4-32图

4-33 重物M_1及M_2的重量分别为P及Q。弹簧AB的刚性系数等于c。角α为已知。略去摩擦、滑轮的重量、绳和弹簧的重量。设$Q>P\sin\alpha$。系统自静止状态释放，此时弹簧AB无变形。试求重物M_1及M_2的加速度。

答：

$$a_1=\frac{Q-P\sin\alpha}{P+Q}g-\frac{Q}{P+Q}(1+\sin\alpha)g\cos kt$$

$$a_2=\frac{Q-P\sin\alpha}{P+Q}g+\frac{P}{P+Q}(1+\sin\alpha)g\cos kt$$

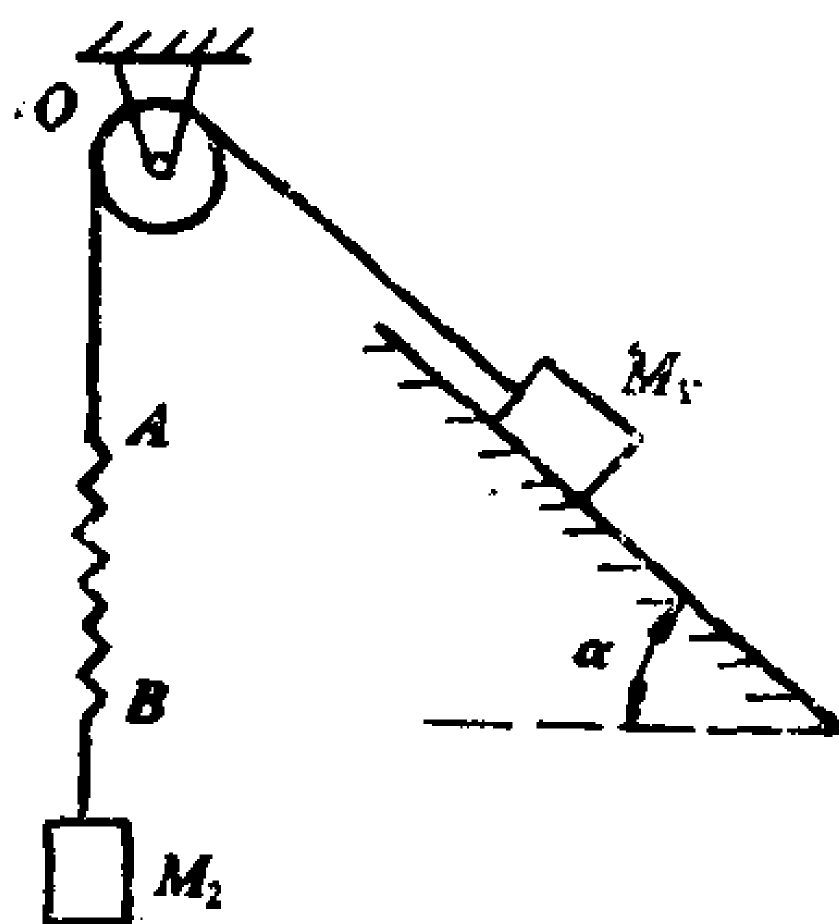
式中 $k=\sqrt{cg\dfrac{P+Q}{PQ}}$

4-34 齿条AB重为P_1，放置在与水平面夹角为α的斜面上。重为P_2的齿轮与齿条相啮合，在其轴C上作用有与齿条相平行的力$\boldsymbol{P}$，并在此力的作用下移动。摩擦力略去，求齿条AB与齿轮轴C的加速度。

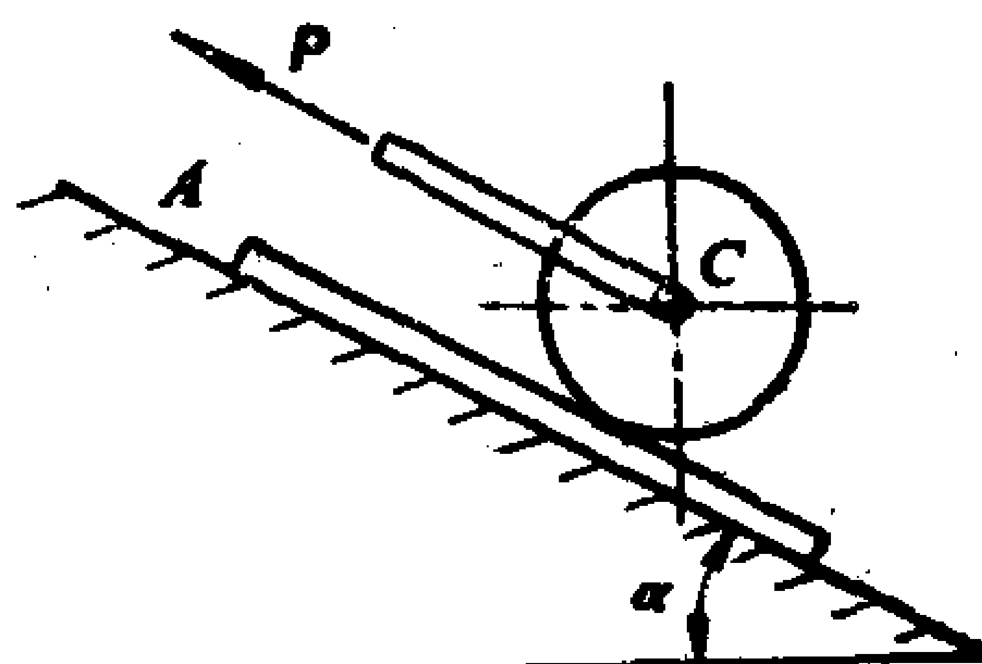
答：

$$a_{AB}=g\left(\sin\alpha-\frac{P}{3P_1+P_2}\right)$$

$$a_C=g\left[\frac{(2P_1+P_2)P}{(3P_1+P_2)P_2}-\sin\alpha\right]$$



题4-33图



题4-34图

4-35 重为Q的均质圆柱体A上缠绕着绳索，可沿与水平面夹角为α的斜面上滑动。绳索与斜面间的摩擦系数为f。重物M重为P_1，滑轮B重为P_2且可视为均质圆盘，略去绳的重量，求当重物M放下时，M与轮A之C轴的加速度。

答：

$$a_M=2g\,\frac{3P_1-Q(3f\cos\alpha+\sin\alpha)}{6P_1+3P_2+2Q};$$

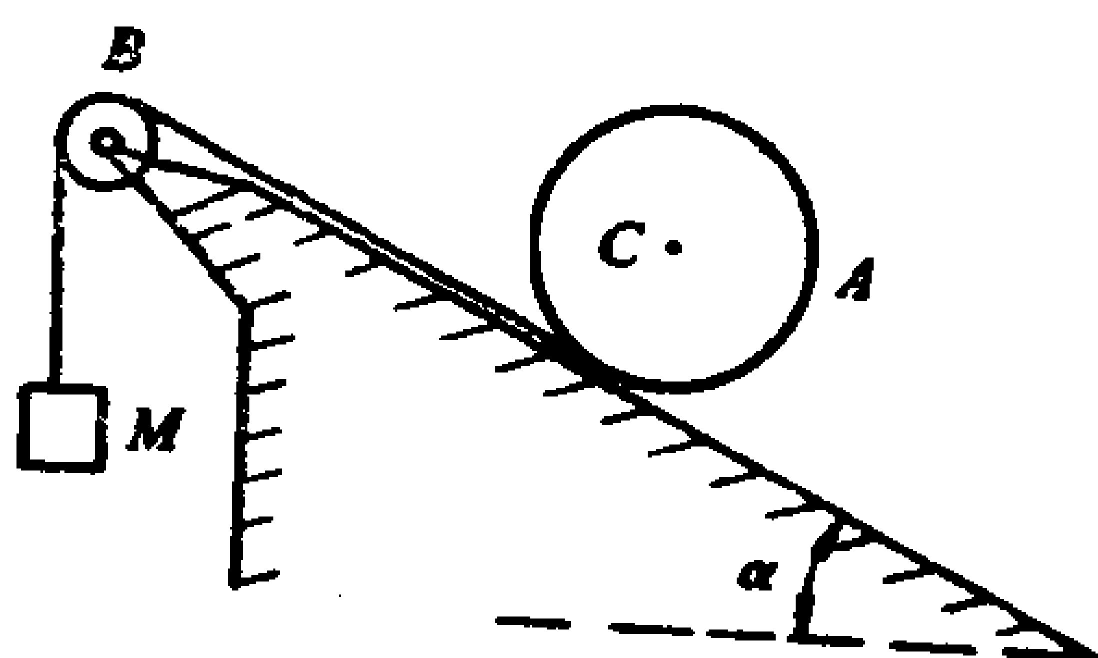
$$a_C=2g\,\frac{(2P_1+P_2+Q)\sin\alpha+Qf\cos\alpha-P_1}{6P_1+3P_2+2Q}$$

4-36 薄板AB重为P_1，用铰链与无重杆OA与O_1B相连结。$OA=O_1B$，且角α为已知。当杆为铅垂时，将重为P_2的物块M放在处于静止的板上，略去摩擦，求在此瞬时板AB的绝对加速度和物块M相对于板AB的加速度。

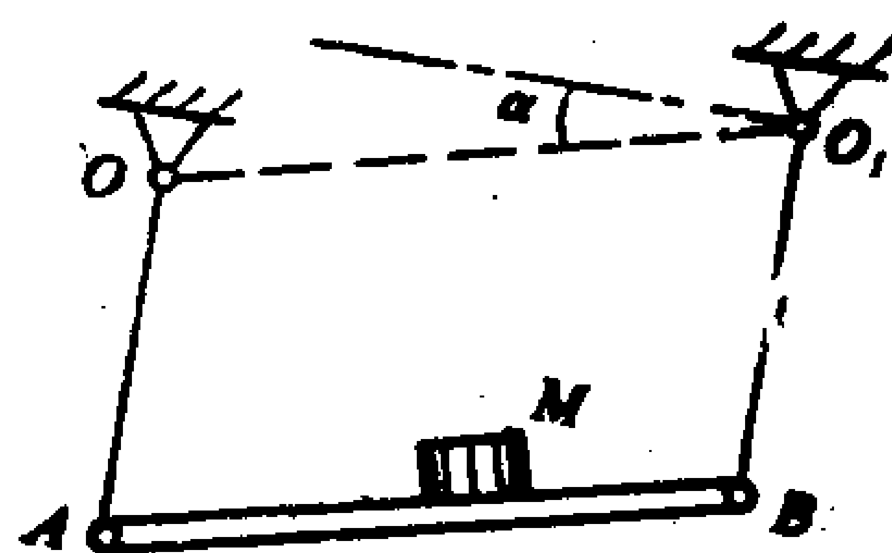
答：

$$a_{AB}=g\ \frac{P_2\sin 2\alpha}{2(P_1+P_2\sin^2\alpha)}$$

$$a_{Mr}=g\ \frac{(P_1+P_2)\sin\alpha}{P_1+P_2\sin^2\alpha}$$



题4-35图



题4-36图

4-37 绕过定滑轮A、B的绳索缠绕在鼓轮C上，在鼓轮C的轴上挂一重为Q的重物D，略去绳重及摩擦，并已知轮A、B、C的质量为均匀分布，重量分别为P_1、P_2、P_3，求物块D的加速度。

答：

$$a_D=\frac{(P_1+P_2+P_3)(P_3+Q)}{4P_1P_2+(P_1+P_2+P_3)(2P_3+Q)-P_3^2}g$$

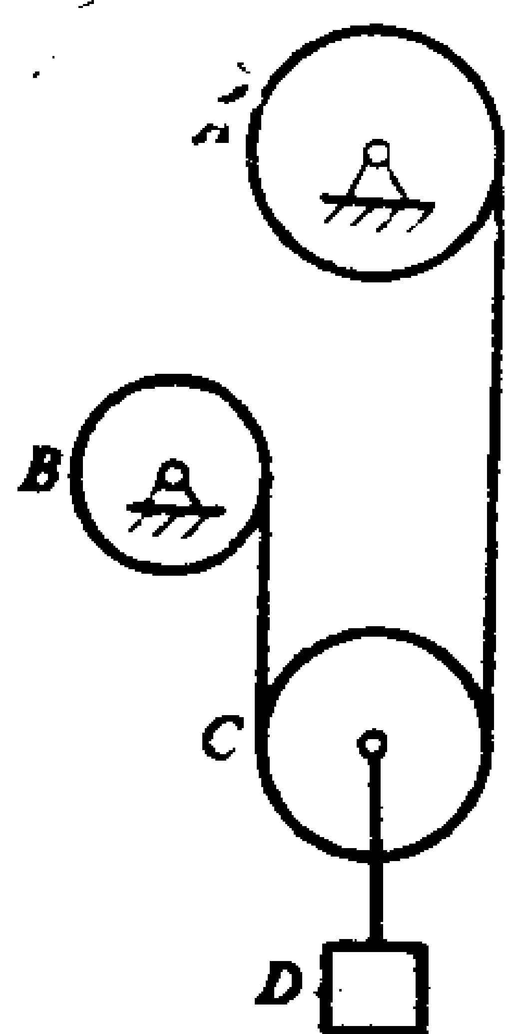
4-38 已知重物M_1、M_2、M_3的重量分别为P_1、P_2、P_3，略去滑轮与绳的重量以及滑擦，求重物M_1、M_2、M_3的加速度。

答：

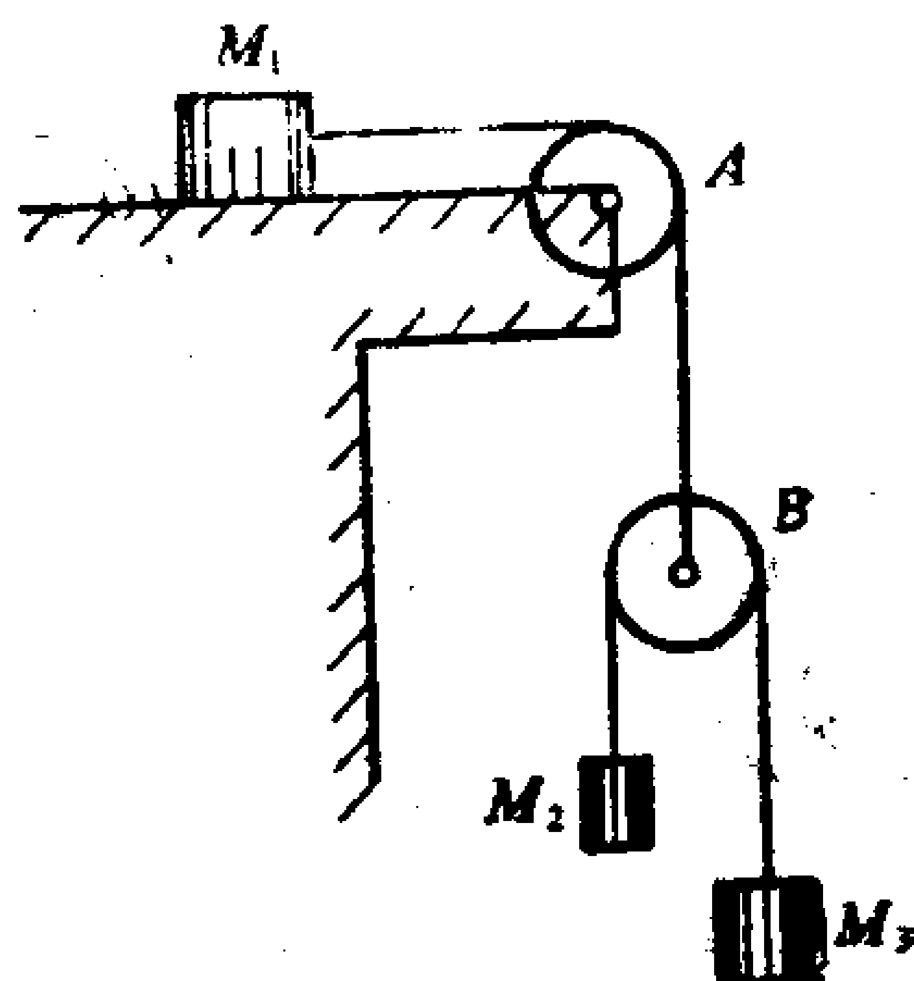
$$a_1=\frac{4gP_2P_3}{P_1(P_2+P_3)+4P_2P_3}$$

$$a_2=g\frac{P_1(P_2-P_3)+4P_2P_3}{P_1(P_2+P_3)+4P_2P_3}$$

$$a_3=g\frac{P_1(P_3-P_2)+4P_2P_3}{P_1(P_2+P_3)+4P_2P_3}$$



题4-37图



题4-38图

4-39 绕过动滑轮C的绳索缠绕在鼓轮A与B上，在滑轮C的轴上挂一重为P的重物D。鼓轮的半径均为r，重为Q，而动滑轮的重量为Q_1，且有转矩M_1、M_2分别作用于鼓轮上(方向如图所示)。将鼓轮及滑轮均看作均质圆盘，求其角加速度。

答:

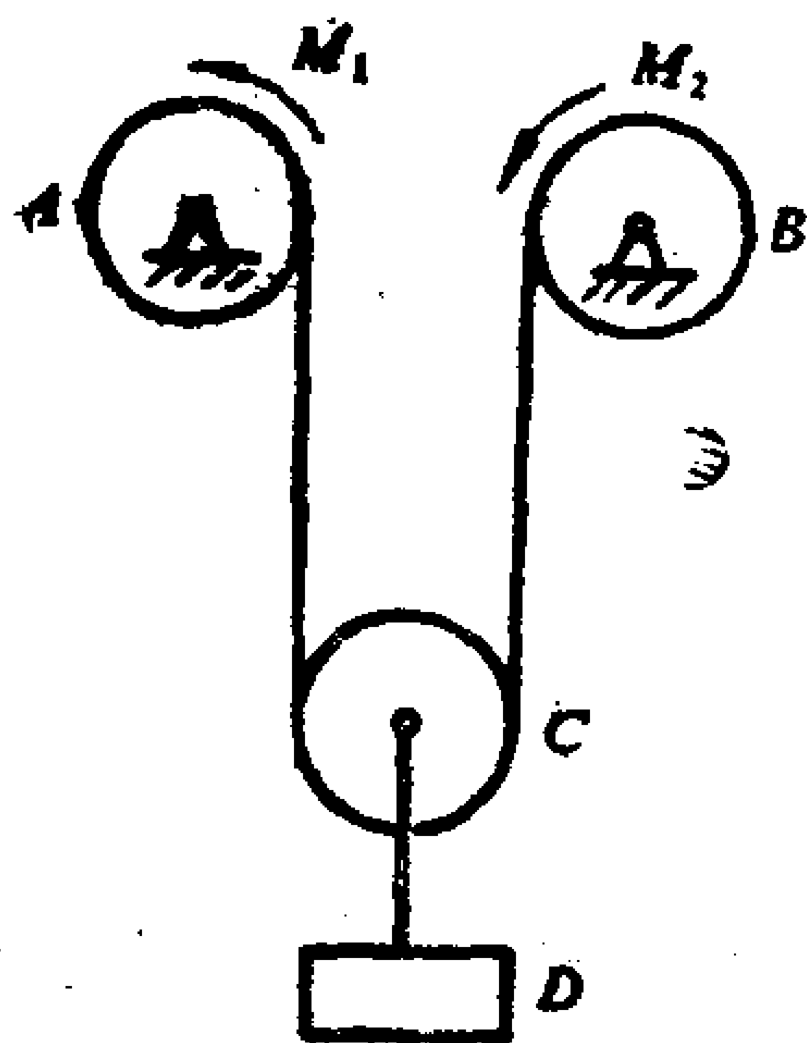
$$\varepsilon_1=g\frac{M_1(2P+4Q+3Q)+M_2(2P+Q_1)}{(P+Q+Q_1)(2Q+Q_1)r^2}-\frac{(P+Q_1)(2Q+Q_1)r}{(P+Q+Q_1)(2Q+Q_1)r^2}$$

$$\varepsilon_2 = g\frac{M_1(2P+Q_1)+M_2(2P+4Q+3Q)}{(P+Q+Q_1)(2Q+Q_1)r^2} + \frac{(P+Q_1)(2Q+Q_1)r}{(P+Q+Q_1)(2Q+Q_1)r^2}$$

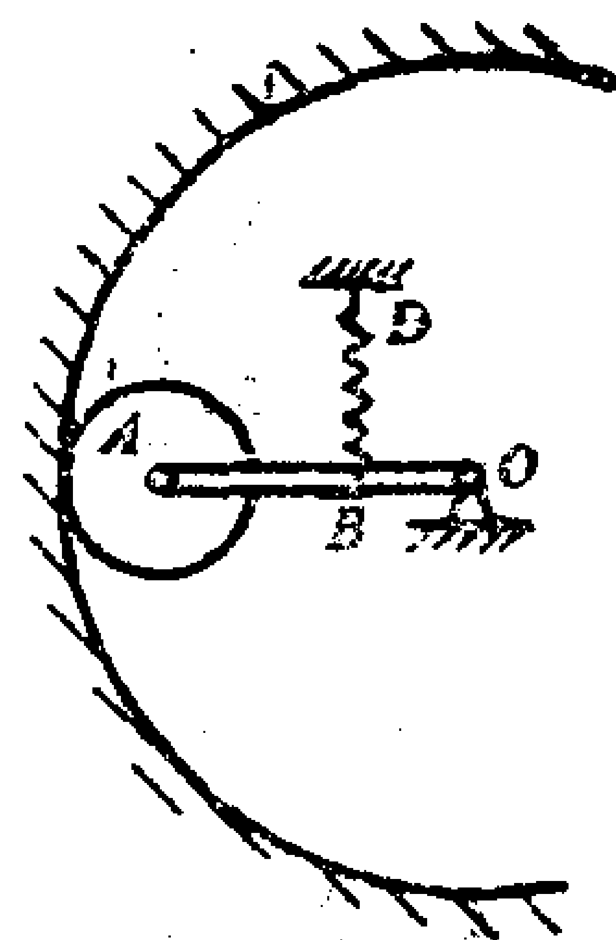
4-40　均质摇杆OA重为P，圆盘A重为Q。当系统平衡时，摇杆为水平，弹簧BD的静变形为δ_{st}且为铅垂位置。已知$OA=l$，$OB=a$。求圆盘A只滚不滑时，系统在其平衡位置附近作微振动的周期。

答：

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}l(2P+9Q}{3ag(P+2Q)}}$$

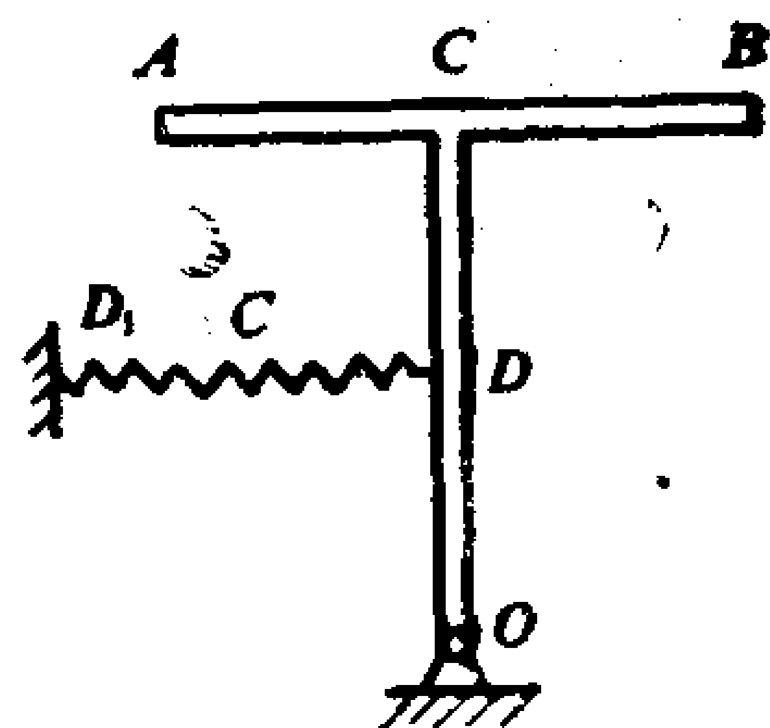


题4-39图



题4-40图

4-41　均质杆AB重为P，长为l。$AC=BC$、$CD=OD=\frac{a}{2}$、$AB\perp OC$。在平衡时杆，OC为铅垂，弹簧DD_1为水平，且未被拉紧。求弹簧的刚度系数c为多少时，杆AB的平衡为稳定，并求出杆AB在此平衡位置作微振动的周期。杆OC自重不计。



题4-41图

答：

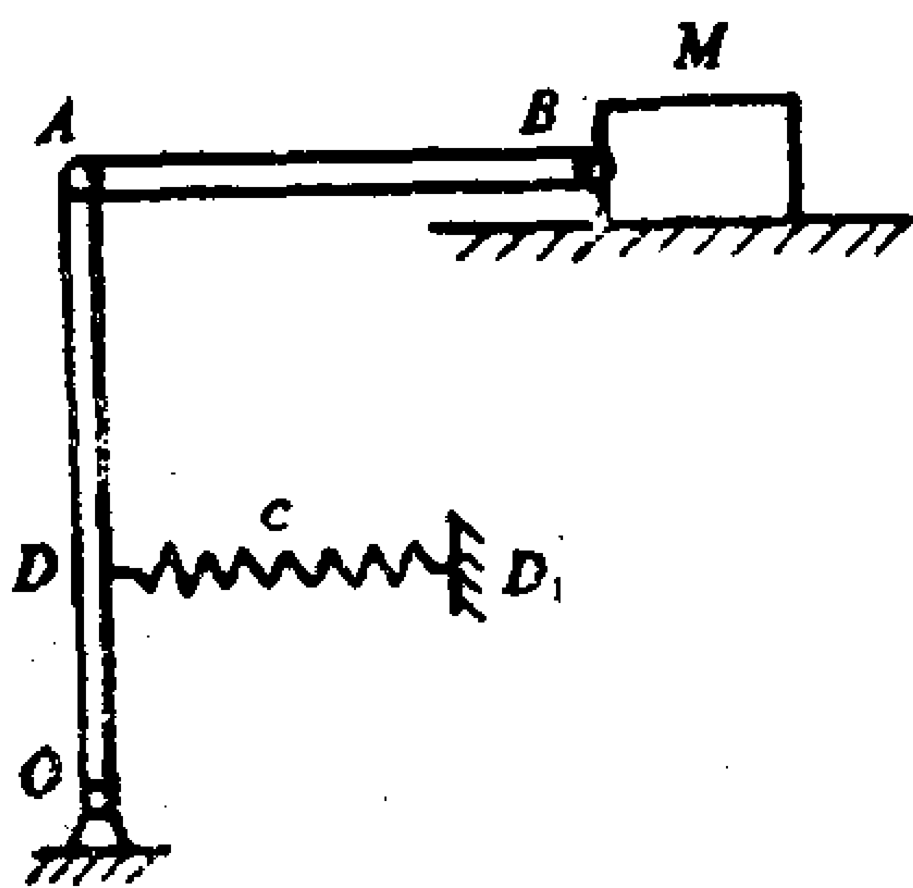
$$c>\frac{4P}{a};\quad \tau=2\pi\sqrt{\frac{P(l^2+12a^2)}{3ag(ca-4P)}}$$

4-42 摇杆OA重为P_1，连杆AB重为P_2，物体M重为P_3。$OA=l$，$OD=a$，当系统处于平衡时，$\angle OAB=90°$，刚度系数为c的弹簧DD_1为水平，且无变形。略去摩擦，如已知$c>\frac{P_1+P_2}{2a^2}l$，求系统作微振动的周期。

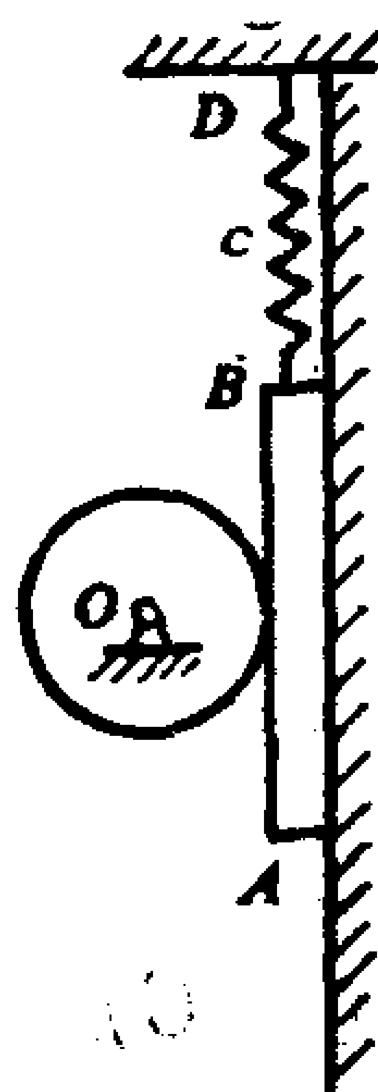
$$答：\tau=2\pi\sqrt{\frac{2l^2}{3g}\ \frac{P_1+3(P_1+P_3)}{2a^2c-(P_1+P_2)l}}$$

4-43 在铅垂墙与齿轮之间放入一个作铅垂振动的齿条。齿条重为P_1，齿轮重为P_2，弹簧的刚度系数为c，齿轮可视为均质圆盘。已知当它距平衡位置的距离为x_0时将其释放，并且有初速v_0，摩擦不计。求齿条振动的振幅。

$$答：\quad A=\sqrt{x_0^2+\frac{2P_1+P_2}{2cg}v_0^2}$$

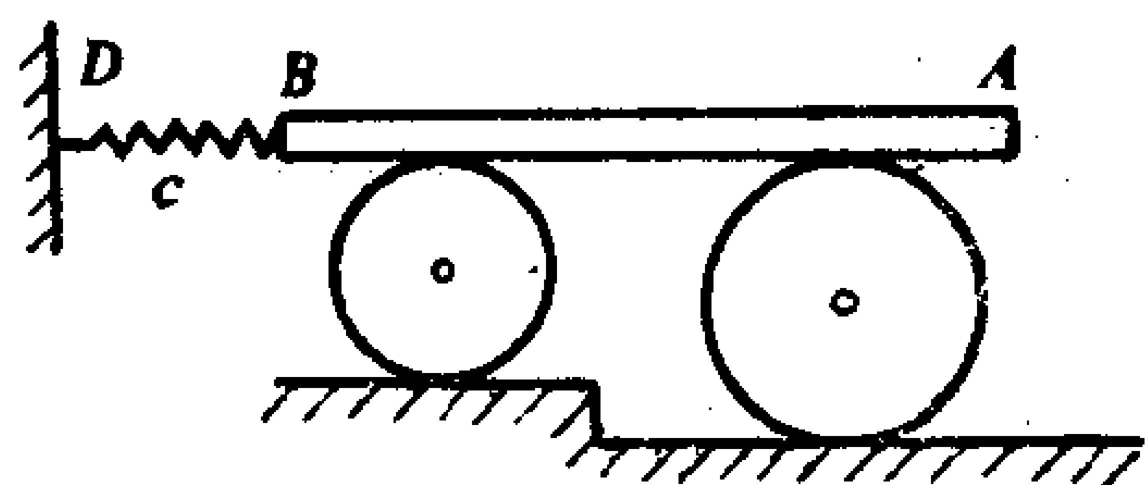


题4-42图



题4-43图

4-44 齿条AB重为P，两齿轮为均质圆轮，各重Q_1与Q_2，水平弹簧的刚度系数为c。如果齿条在其平衡位置上获得一初速v_0，已知齿轮只滚不滑。求在以后的运动中，它的两个极端位置之间的距离。



答：$d=v_0\sqrt{\dfrac{8P+3(Q_1+Q_2)}{2cg}}$

题4-44图

4-45 半径为r的滑轮上挂有长为$2a+\pi r$的均匀链条，链条单位长度的重量是μ，滑轮的转动惯量是J_0，滑轮轴承处无摩擦，滑轮与链条之间无滑动。开始时两边悬空长度为$a-x_0$和$a+x_0$，初速为零，求链条的运动方程(在一边悬空长度变为零以前)和轴承对滑轮的竖直、水平反力，用时间t的函数表示出来。

答：　运动方程：$x=x_0chkt$,

其中 $\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{J_0g+\pi\mu r^3}{2g\mu r^2}+\dfrac{a}{g}$

反力 $R_x=(2\mu rk^2/g)x_0chkt$,

$R_y=(\pi r+2a)\mu-(4\mu k^2/g)x_0^2ch(2kt)+P$,

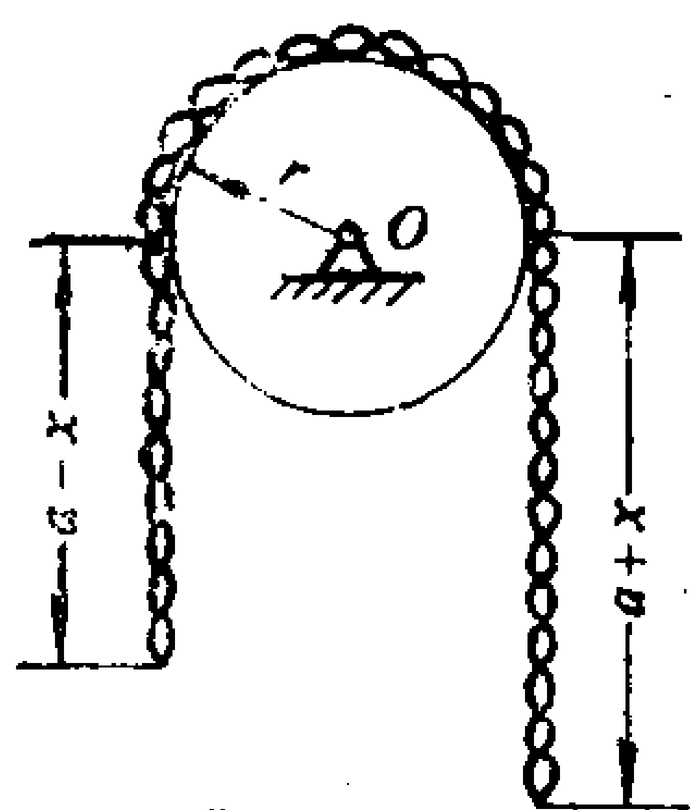
其中P是滑轮的重量。

4-46 半径为r的圆柱可以在水平地面上无滑动地滚动。圆柱的重心在C点，它与几何中心O的距离$OC=a$。圆柱相对于过重心C且与几何轴平行的轴之回转半径为k。以φ表示OC与向下竖直线的夹角。初始时圆柱体静止，且$\varphi=$

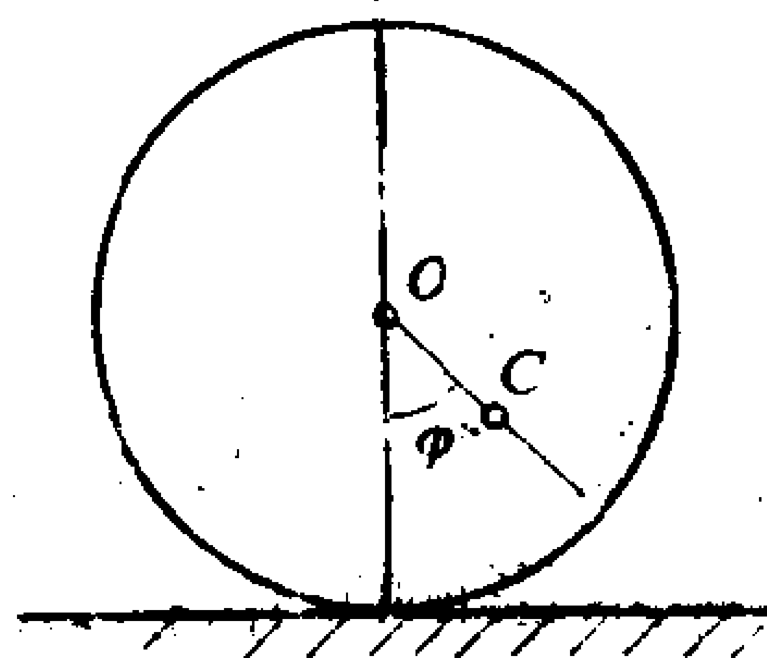
φ_0，然后释放。求圆柱体的角速度(表成φ角的函数)。

答：

$$\omega=\left[\frac{2ag(\cos\varphi-\cos\varphi_0)}{r^2+a^2+k^2-2ar\cos\varphi}\right]^{1/2}$$



题4-45图



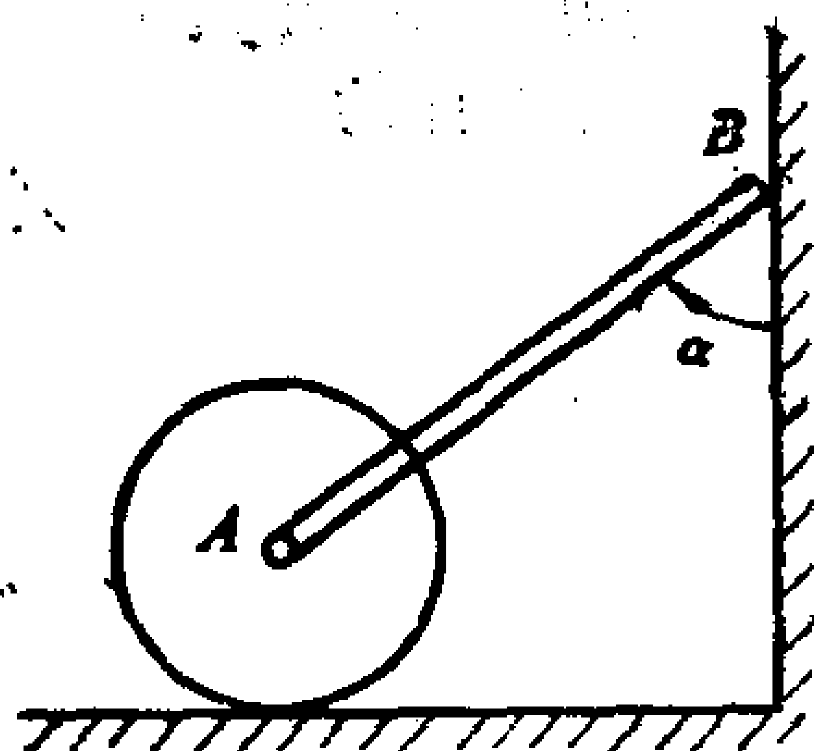
题4-46图

4-47　图示均质圆柱A的半径为r，质量为M，均质杆AB的长度为l，质量为m。铰链A和墙B处都是光滑接触，地面相当粗糙，以至圆柱只滚不滑。初始时系统静止，且$\alpha=45°$，然后释放，求初始时刻A点和B点的运动加速度、杆的角加速度。

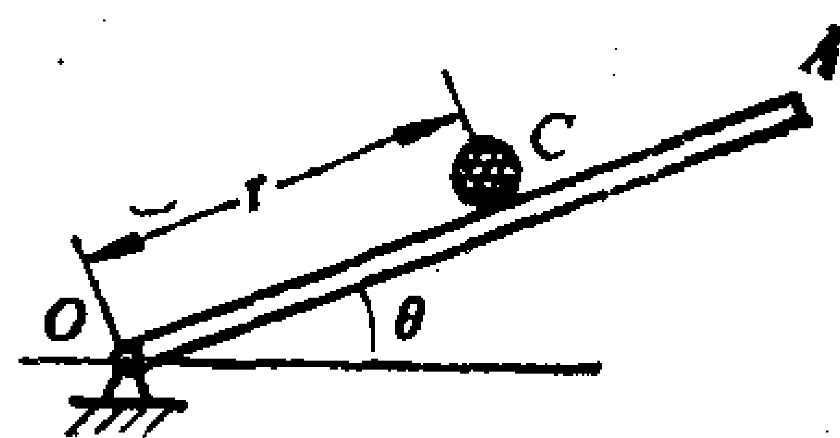
答：　$a_A=a_B=3mg/(9M+4m)$，$\varepsilon=\sqrt{2}a_A/l$。

4-48　均质直棒OA，长为l，在水平面上能绕其一固定端O自由转动，并驱动一个在棒前的小球C。球与棒的质量相同。初始时小球静止在棒前并离O点很近，同时此棒以某一角速度旋转，假定所有接触均为光滑的，求当小球离开端点A的瞬间，小球的绝对速度与棒所成的角度。

答：　$\theta=\mathrm{arctg}(1/2)\approx26°34'$



题4-47图



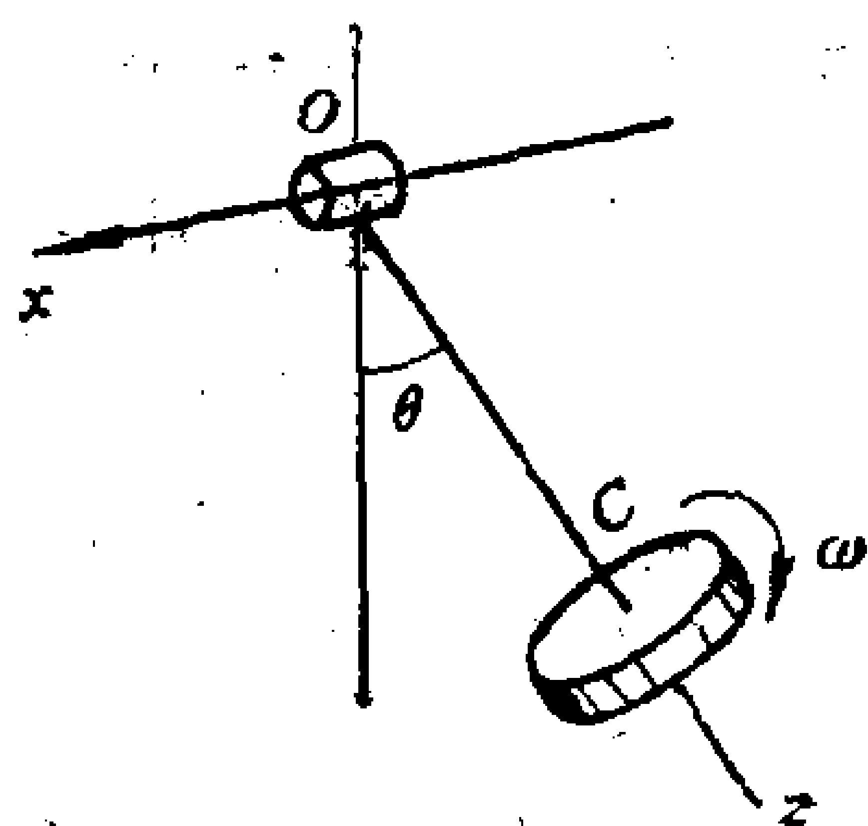
题4-48图

4-49 一均质圆盘以角速度ω绕OZ轴转动，OZ轴又绕水平轴OX摆动，不计摩擦和空气阻力。求证这个圆盘的自转并不影响它的摆动周期。

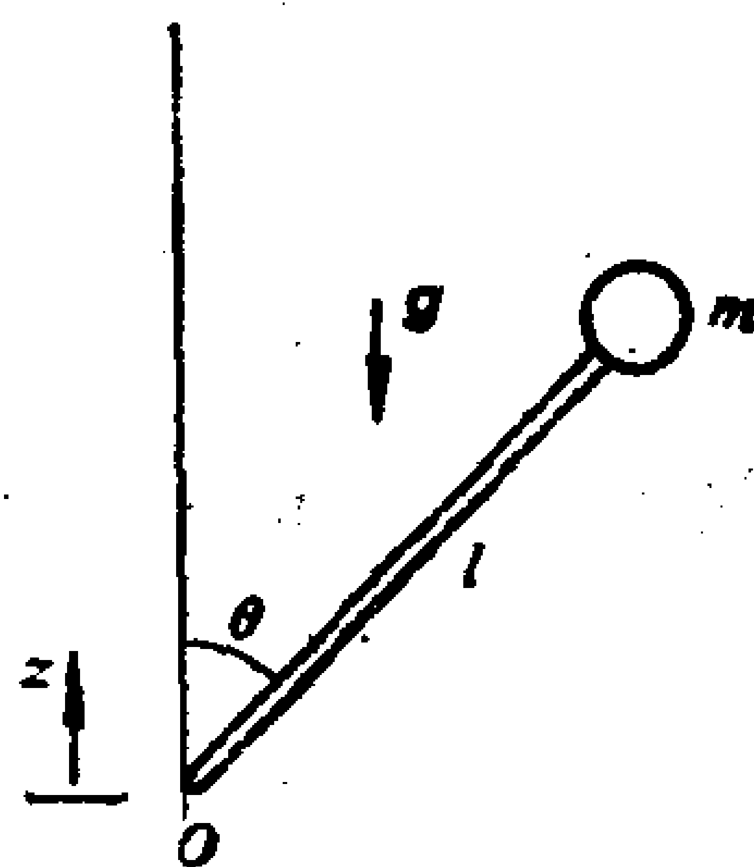
4-50 半径为a的均质薄球壳，质心为C，在重力作用下绕它表面上一点O作定点运动。半径OC与向上竖直线Oz之间的夹角为θ，平面ZOC与固定竖直面之间的夹角为ψ。初始时，$\theta=\pi/2$，$\dot{\theta}=0$，$\dot{\psi}=2n/5$，其中$n=\sqrt{15g/2a}$是球壳绕OC轴的自转角速度。求证：

(1) 当$t\longrightarrow\infty$时，$\theta\longrightarrow 0$；

(2) C点在以O为球心，a为半径的固定球面上画出螺旋轨迹。



题4-49图



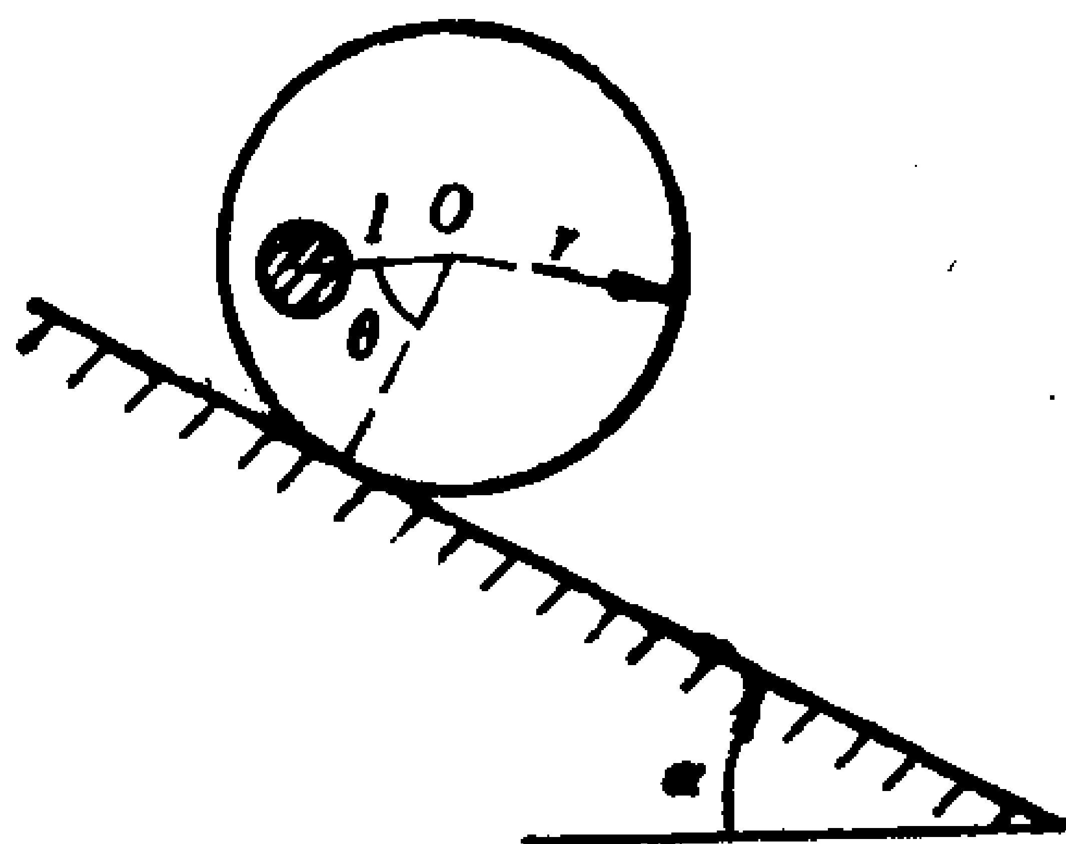
题4-51图

4-51 质量为 m 的质点由长为l的无质量刚杆支承而构成倒置摆。销轴O按已知规律 $z=A\sin\omega t$作铅垂运动。试写出拉格朗日函数，并求出运动微分方程。

答：
$$ml^2\ddot{\theta}+mlA\omega^2\sin\omega t\sin\theta-mgl\sin\theta=0$$

4-52 质量为m的质点被嵌入半径为r的无质量圆盘。质点到盘中心的距离为l。圆盘沿平面无滑动地滚下，平面对于水平面的倾角为α。试应用拉格朗日方法写出该系统的运动微分方程。

答：
$$m(r^2+l^2-2rl\cos\theta)\ddot{\theta}+mrl\dot{\theta}^2\sin\theta$$
$$-mgr\sin\alpha+mgl\sin(\theta+\alpha)=0$$



题4-52图

4-53 质量为 m的质点可在光滑的刚性金属线上滑动。金属线的形状为$y=3x^2$，而重力沿y轴的负向作用。

(a)试应用拉格朗日方法写出运动方程；

(b)设初始条件为$\dot{y}(o)=0$，$y(o)=y_0$，试求运动过程中的最大约束力。

答：
$$(a)\ m\ddot{x}=6x\lambda,\ m\ddot{y}+mg=-\lambda$$
$$(b)C_{max}=mg(1+12y_0)$$

4-54 质量为 m的质点的位置由直角坐标(x、y、z)

给定。设势能函数为$V=\frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)$，而约束由方程

$2\dot{x}+3\dot{y}+4\dot{z}+5=0$描述，试求：

(a) 运动微分方程，

(b) 动约束的速度。

答：

$$(a)\ m\ddot{x}+kx=2\lambda,\quad m\ddot{y}+ky=3\lambda$$

$$m\ddot{z}+kz=4\lambda$$

$$(b)\quad v=\frac{1}{29}(-10\boldsymbol{i}-15\boldsymbol{j}-20\boldsymbol{k})$$

4-55 三个质点由一根弹性杆相连，试考察该系统在平面内的横向微振动。设势能为

$$V=\frac{1}{2}k(y_1-2y_2+y_3)^2$$

其中常数k正比于弯曲刚度。试求该系统的固有频率及相应的一组正交模态列。

答：

$$\omega_1=\omega_2=0,\quad \omega_3=\sqrt{\frac{6k}{m}}$$

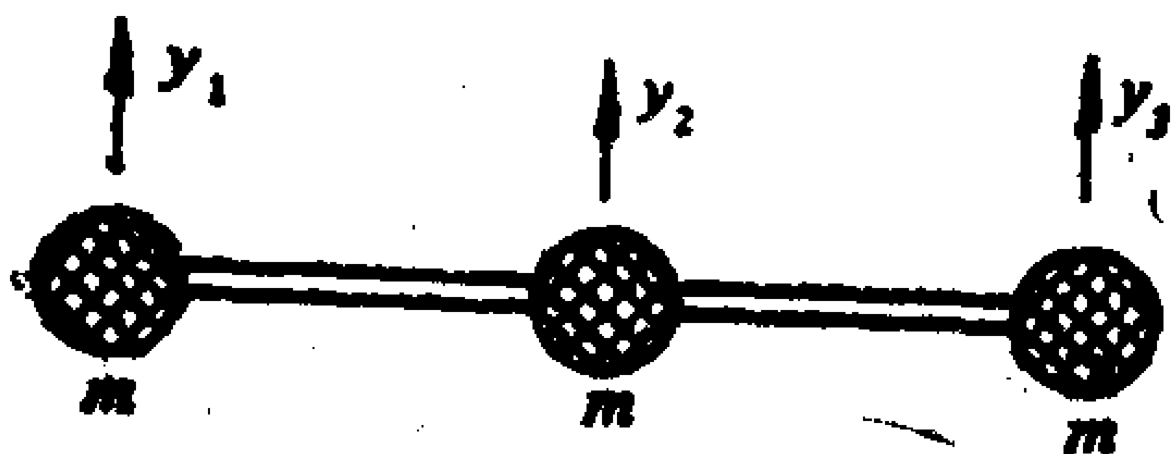
$$A^{(1)}=\{111\},\ A^{(2)}=\{10-1\},\ A^{(3)}=\{1-2,\ 1\}$$

4-56 一重物重P，悬于绳上。绳长l重P_1，绳之一部分绕在鼓轮上。鼓轮半径为a，重P_2，转轴水平。在初瞬时$t=0$，系统静止，绳下垂长l_0，设鼓轮的质量沿轮缘均匀分布，不计摩擦，求重物P的运动。

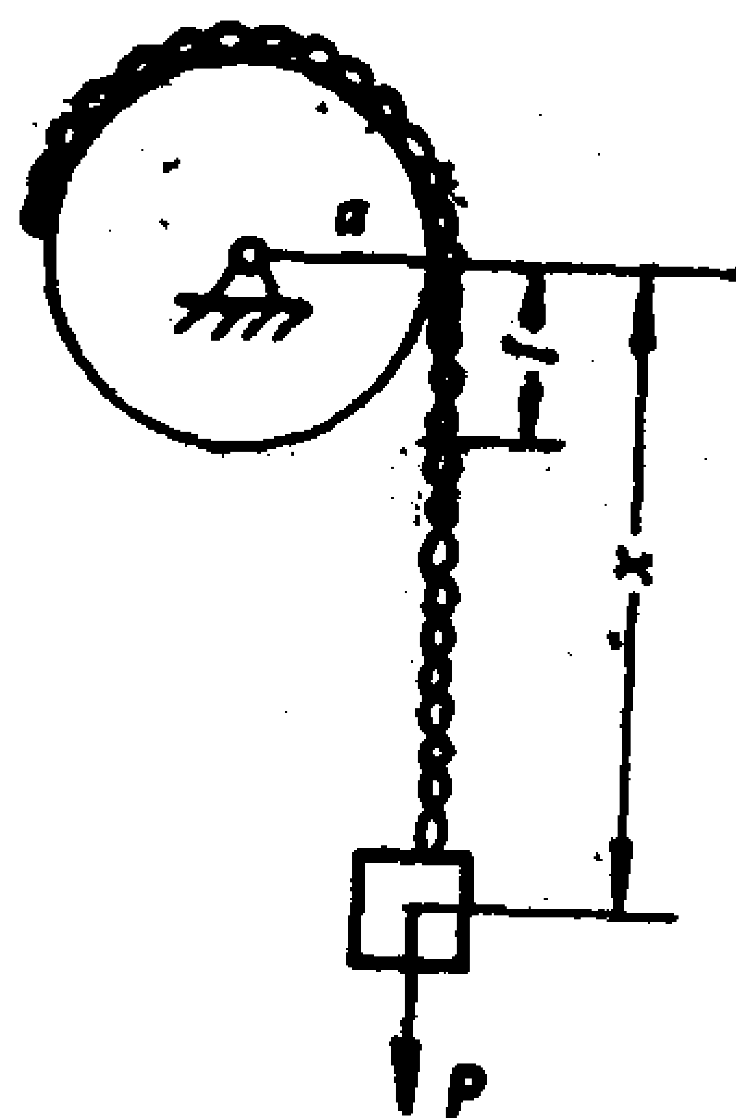
答：

$$\text{方程为}\ \ddot{x}-\frac{P_1 g}{(P+P_1+P_2)l}x=\frac{Pg}{P+P_1+P_2}$$

$$\text{解为}\ x=-\frac{P}{P_1}l+\left(l_0+\frac{P}{P_1}l\right)ch\sqrt{\frac{P_1 g}{(P+P_1+P_2)l}}t$$

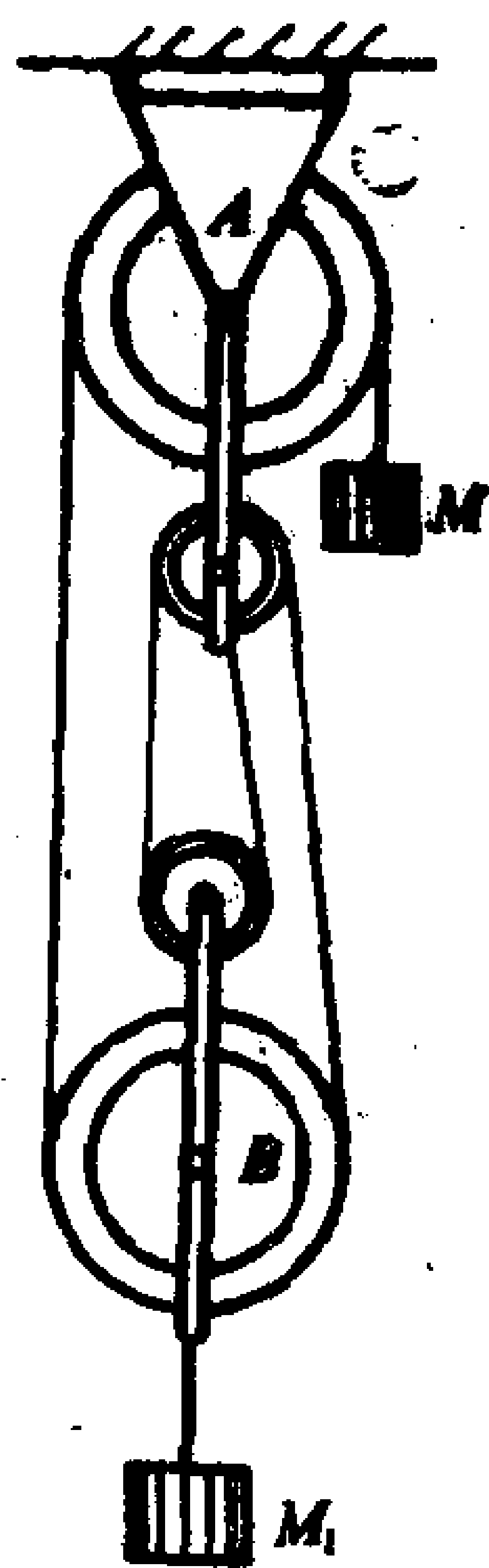


题4-55图

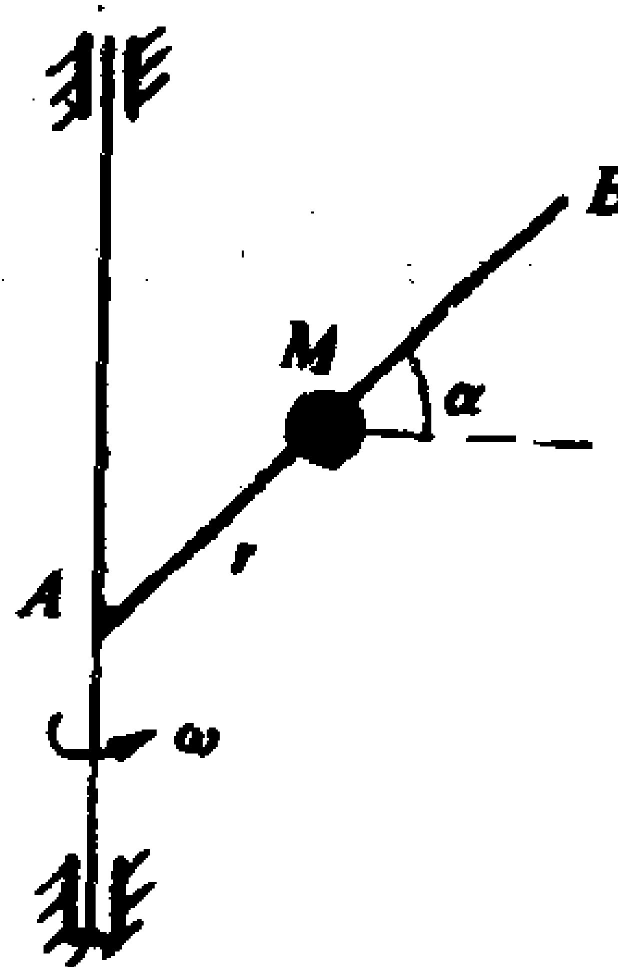


题4-56图

4-57 重物M重1010N，借滑车组将重物M_1举起，重物M_1和滑轮组的运动部分共重320N，滑车共四个，两个大滑轮每个重160N，两个小滑轮每个重80N，大滑轮半径为



题4-57图



题4-58图

r，小滑轮半径为r_1，求M的加速度。

答：$a=\dfrac{15}{155.5}g$

4-58　一质点M在重力作用下沿一等角速度ω绕固定铅垂轴转动的直线AB而运动，直线AB与水平成α角，求此质点运动规律。

答：　$r=c_1e^{\omega t\cos\alpha}+c_2e^{-\omega t\cos\alpha}+\dfrac{g\sin\alpha}{\omega^2\cos^2\alpha}$

4-59　一均质杆长$2a$，质量M，两端在一半径为R的光滑固定水平圆周上滑动，另一质量是m的质点以不变的相对速度v沿杆运动，试求杆的运动。

答：$t=0$，$\theta=\theta_0$，m在杆中点

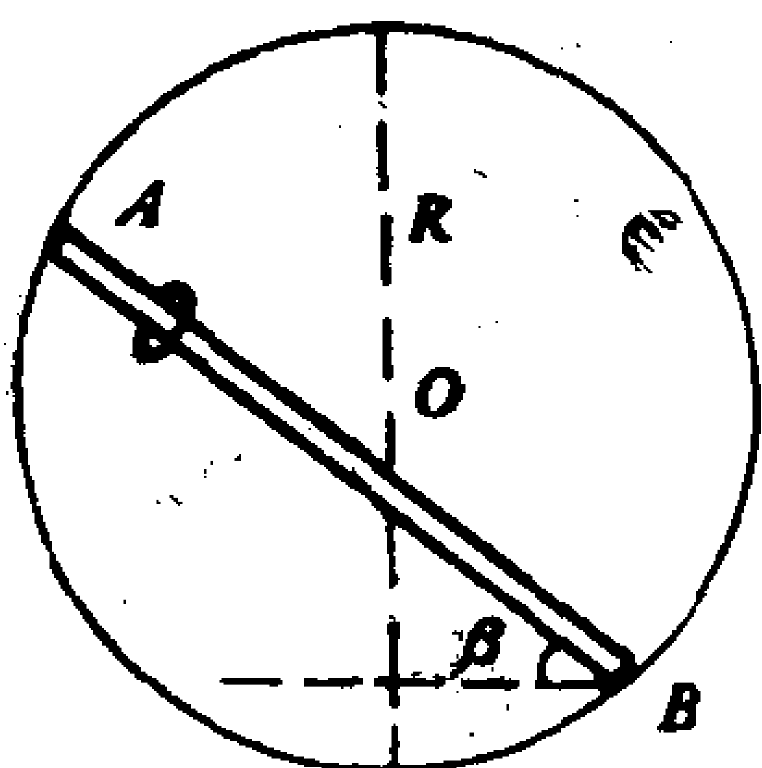
$$\theta-\theta_0=c\ \mathrm{arc\ tg}\frac{vt}{\sqrt{R^2-a^2+\dfrac{M}{m}\left(R^2-\dfrac{2}{3}a^2\right)}}$$

4-60　一粗糙圆柱体质量为m，半径为r，在一空心圆柱体内表面上无滑动地滚动。空心圆柱的质量是M，半径是R，能绕本身水平轴O转动，两圆柱对其自身轴的转动惯量分别为MR^2及$\dfrac{1}{2}mr^2$，试写出系统运动方程。

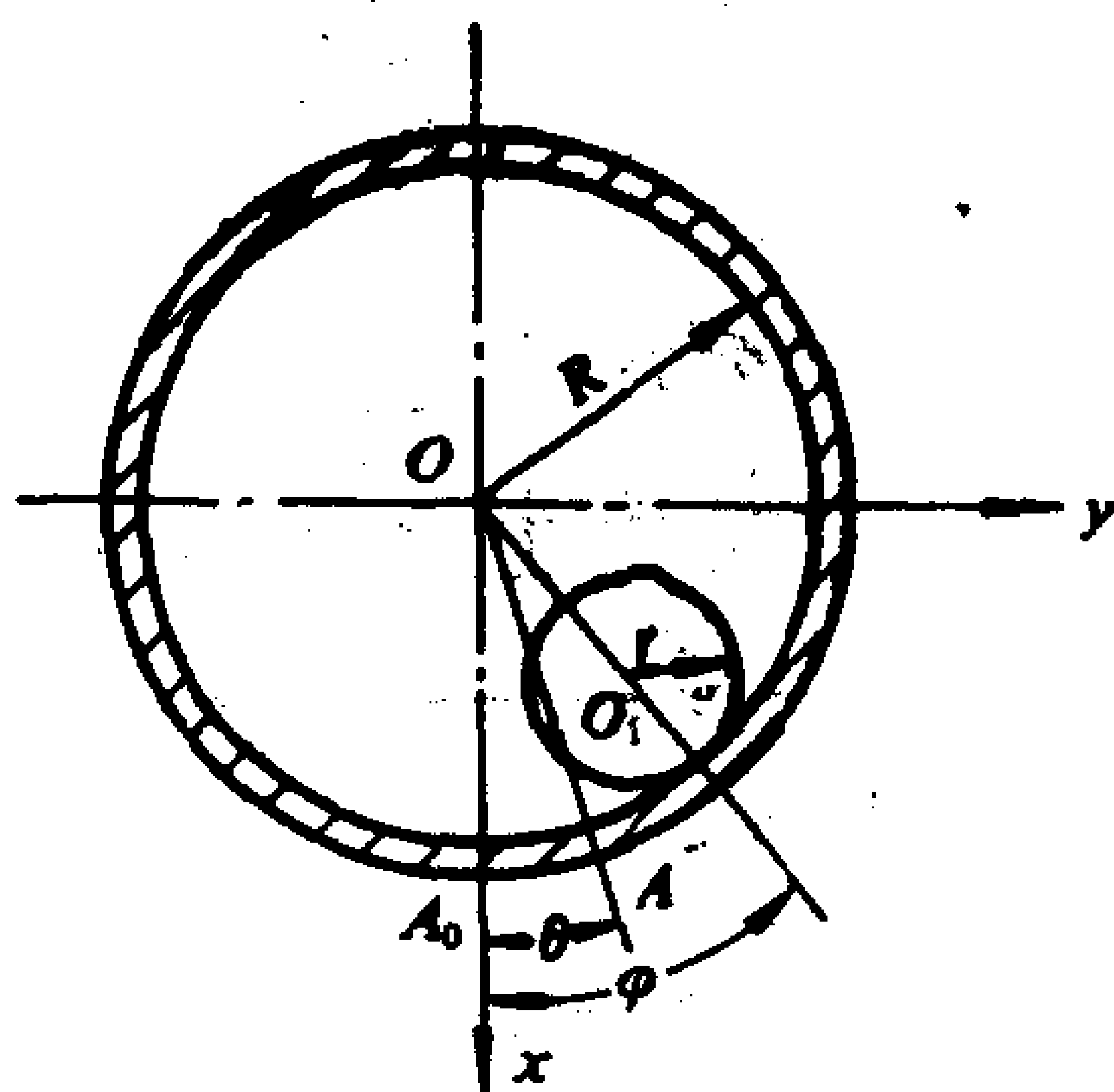
答：　设θ—空心圆柱转角，φ—两柱心联线的转角，有

$$\left(M+\frac{m}{2}\right)R\ddot{\theta}-\frac{1}{2}m\left(R-r\right)\ddot{\varphi}=0$$

$$\frac{3}{2}\left(R-r\right)\ddot{\varphi}-\frac{1}{2}R\ddot{\theta}+g\sin\varphi=0$$



题4-59图



题4-60图

4-61 一车在斜面上无滑动地滚动，斜面与水平面成α。同时另一圆柱体在车板（与斜面平行）上无滑动地滚动，圆柱体的母线与车板的最大斜坡线相垂直。车的质量（车轮除外）是M，所有车轮总质量是m，圆柱体质量是M_1，设车轮都是均质密实圆盘。试求车的加速度。

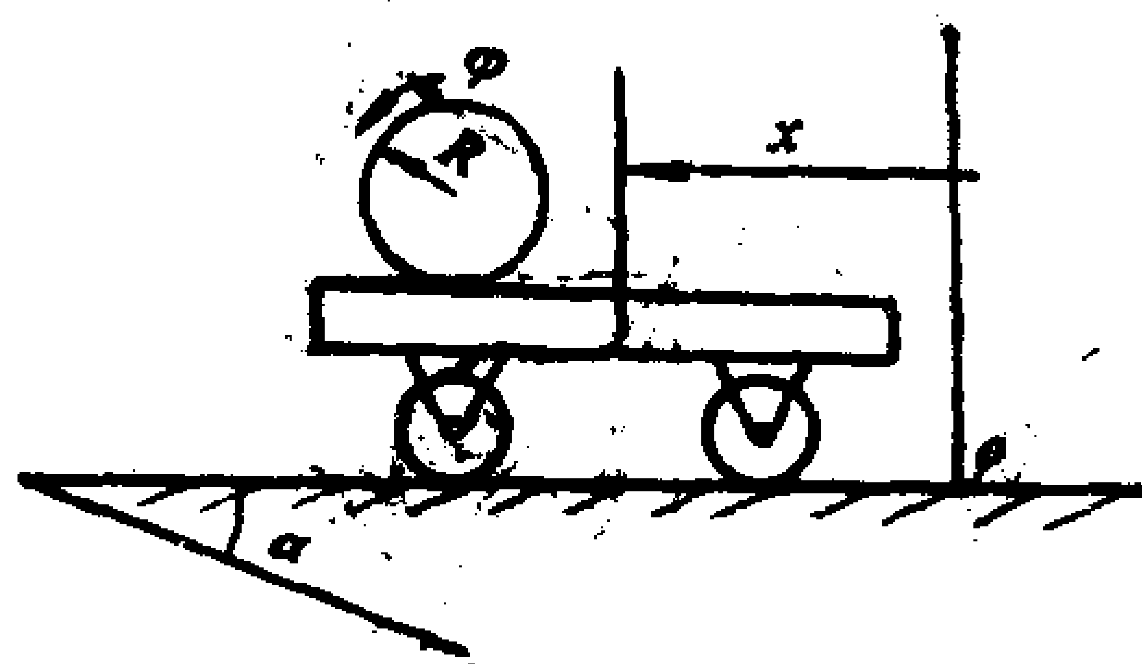
答：小车质心坐标x，圆柱体相对小车转角φ，

$$\ddot{x}=\frac{6M+6m+2M_1}{6M+9m+2M_1}g\sin\alpha$$

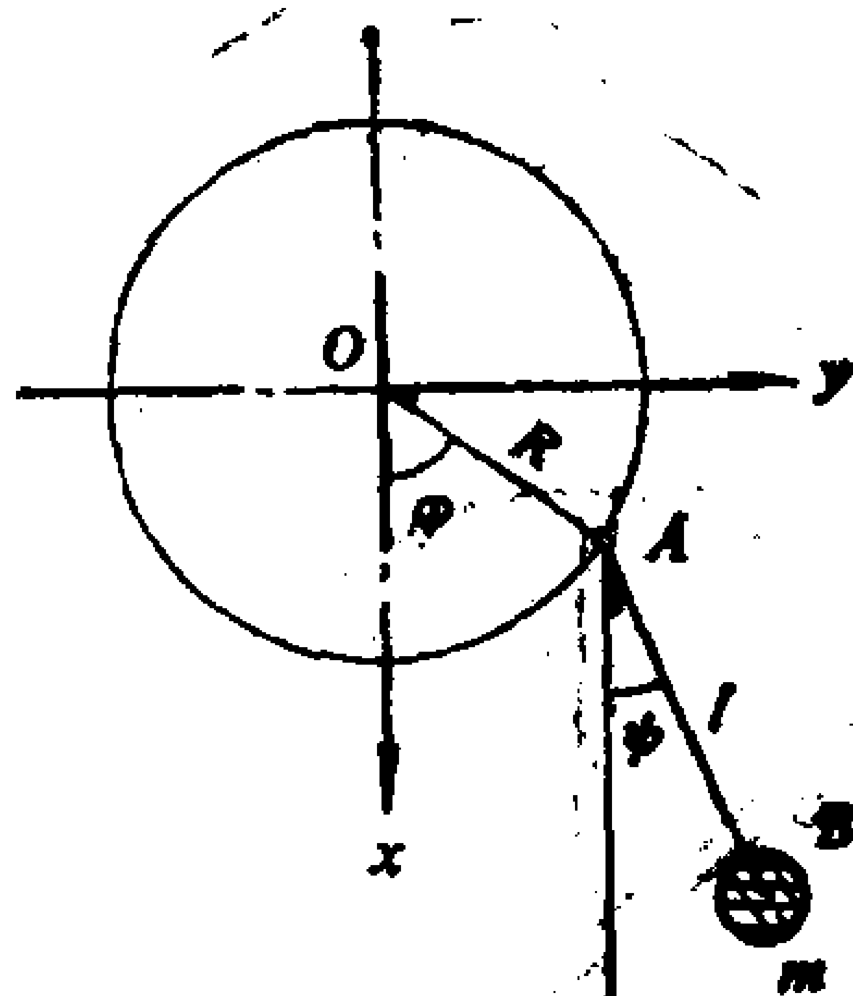
4-62 一均质圆盘半径为R，质量为M，可绕其自身水平轴O转动。在圆盘的圆周上以长l的绳AB悬一质量为m的质点。试写出该系统的运动方程。

答：$(m+M/2)R^2\ddot{\varphi}+mRl\cos(\varphi-\psi)\ddot{\psi}+mRl\sin(\varphi-\psi)\dot{\psi}^2+mgR\sin\varphi=0$

$mRl\cos(\varphi-\psi)\ddot{\varphi}+ml^2\ddot{\psi}-mRl\sin(\varphi-\psi)\dot{\varphi}^2+mgl\sin\psi=0$



题4-61图



题4-62图

4-63 一圆柱直径为d，质量为m，可在水平面上滚而不滑。两刚性系数均为c的相同弹簧联结于圆柱上。联结点在圆柱长度的中点，离轴线为a，两弹簧被固定。求圆柱振动的周期。

$$答：T=\frac{\pi\sqrt{3}}{1+\frac{2a}{d}}\sqrt{\frac{m}{c}}$$

4-64 作用力具有什么条件，才能将完整系统的拉格朗日方程写成形式

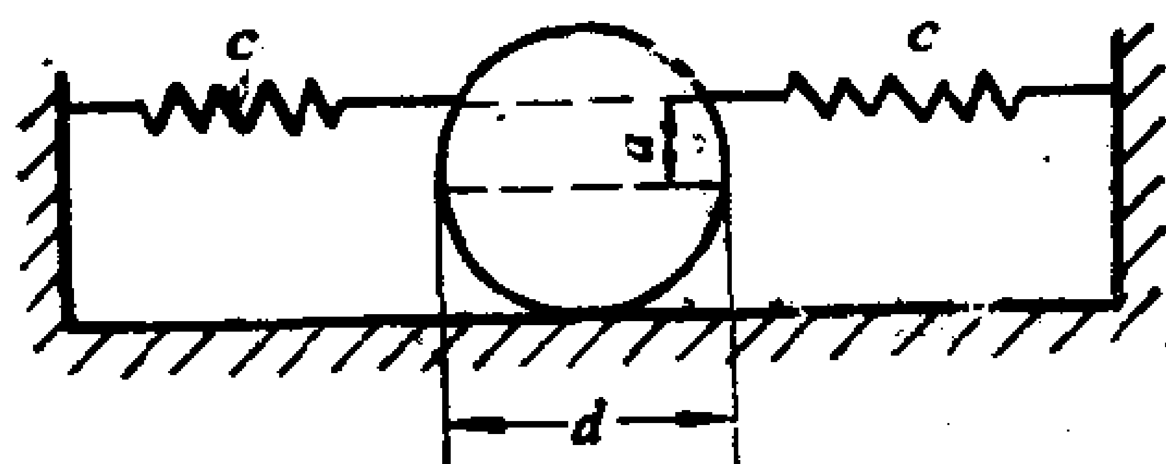
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \quad (s=1,2,\cdots,n)$$

4-65 两皮带轮M_1与M_2、质量为m_1与m_2，半径为r_1与r_2，其上缠有绳子，此绳绕过一质量为m_3，半径为r_3的滑轮M_3；滑轮M_3可无摩擦地绕定轴O转动。假定，绳子与滑轮之间没有滑动而皮带轮中心皆沿铅垂直线运动。求滑轮的角加速度$\ddot{\varphi}_3$及两皮带轮中心的加速度$\ddot{y}_1$，$\ddot{y}_2$。

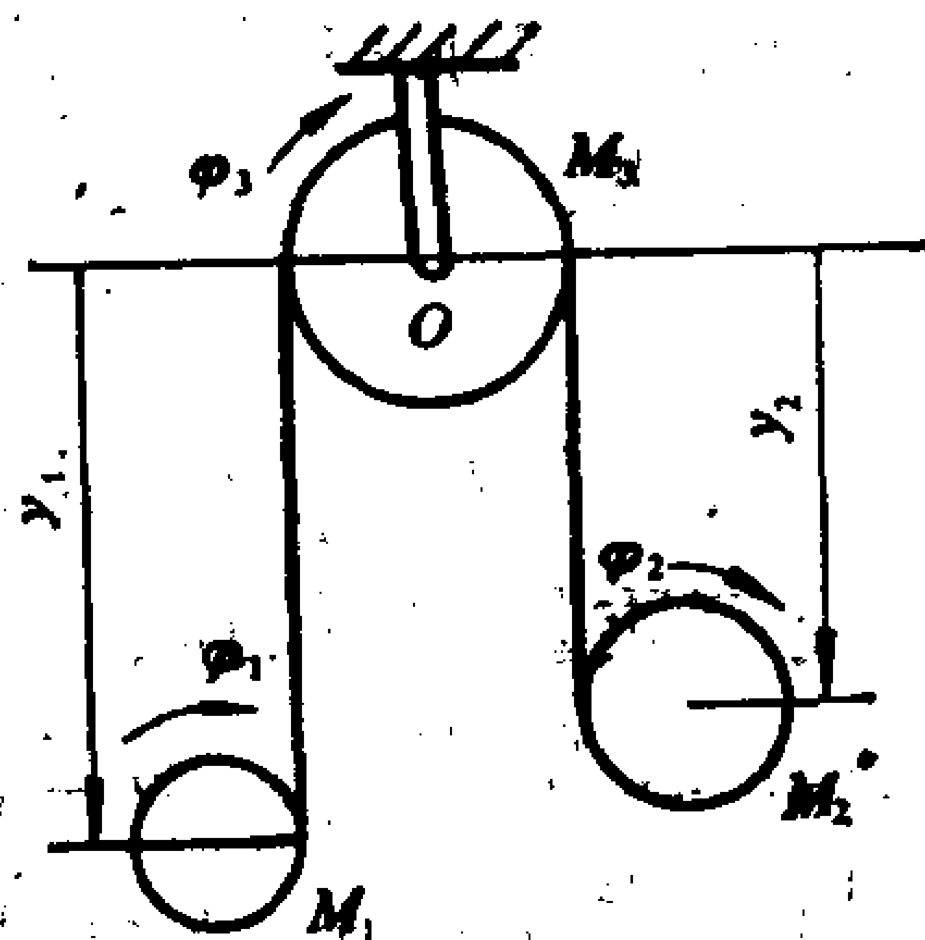
$$答：\ddot{\varphi}_3=\frac{m_2-m_1}{\left(m_1+m_2+\frac{3}{2}m_3\right)r_3}g;$$

$$\ddot{y}_1=\frac{3(m_1+m_3)+m_2}{3\left(m_1+m_2+\frac{3}{2}m_3\right)}\,g;$$

$$\ddot{y}_2=\frac{3(m_2+m_3)+m_1}{3\left(m_1+m_2+\frac{3}{2}m_3\right)}\,g。$$



题4-63图

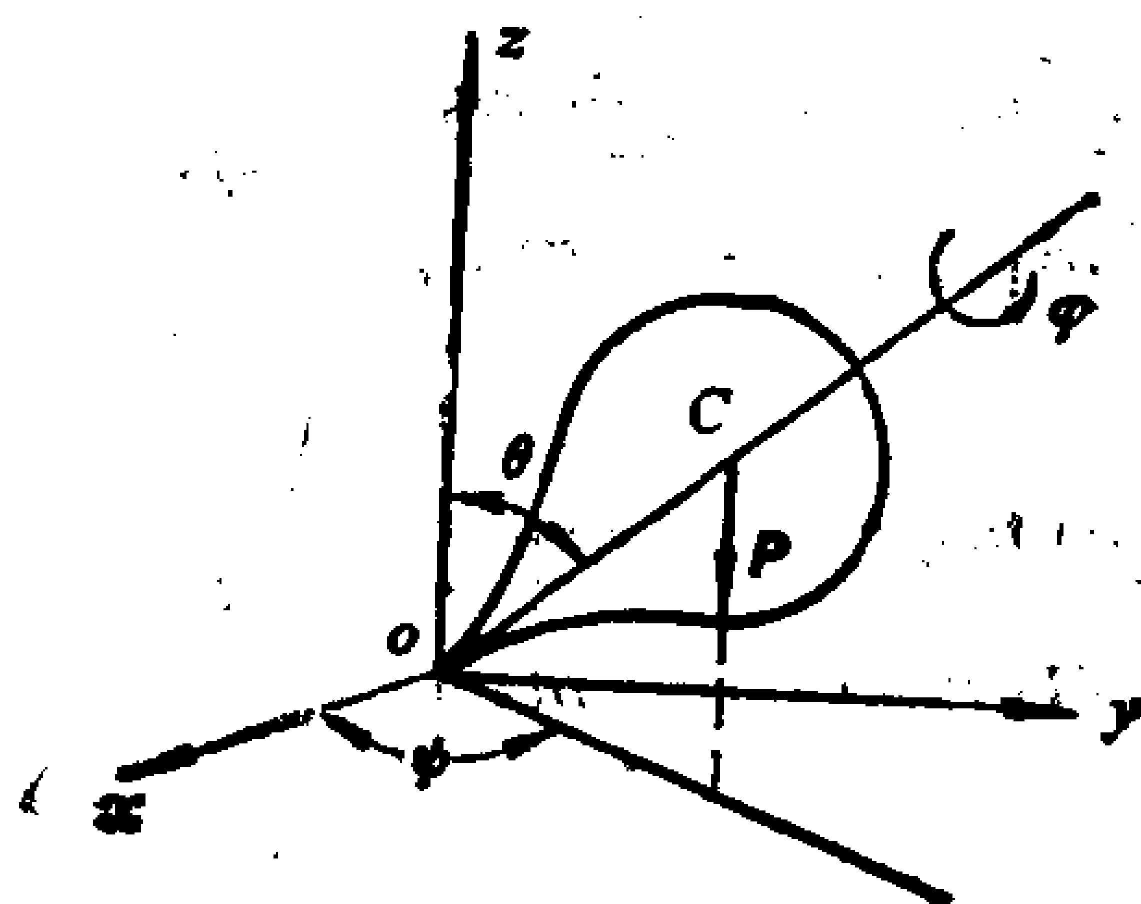


题4-65图

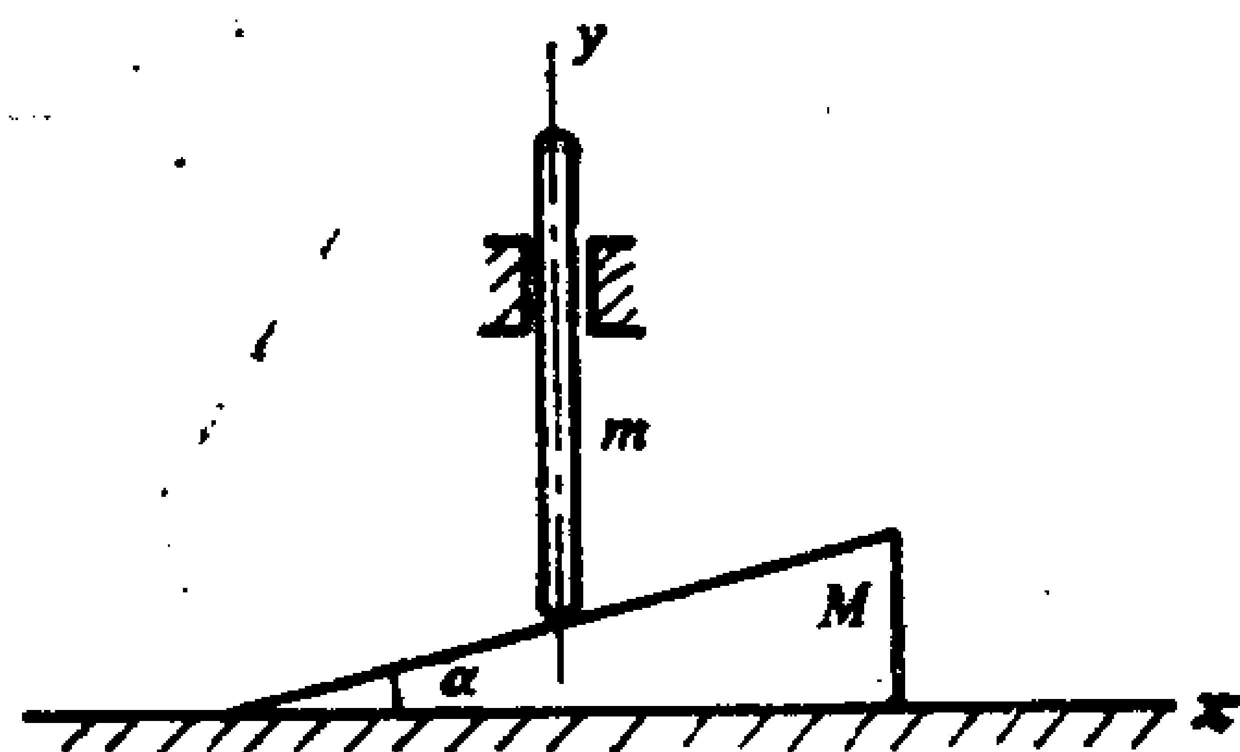
4-66 一对称陀螺支在固定支座上并且仅受重力作用，广义坐标取为：陀螺自转角φ，章动角θ及进动角ψ。试建立它的拉格朗日函数。设陀螺主惯性矩(对点O)为A、B、C。

4-67 质量为m的直杆可以自由地在固定套管中移动，杆下端搁在质量为M的绝对光滑的尖劈上，而尖劈于绝对光滑的水平面上。由于杆子的压力尖劈向水平方向移动。试求两物体的加速度。

答：杆 $\ddot{y}=\dfrac{-mg}{m+M\operatorname{ctg}\alpha}$； $\ddot{x}=-\ddot{y}\operatorname{ctg}\alpha$



题4-66图

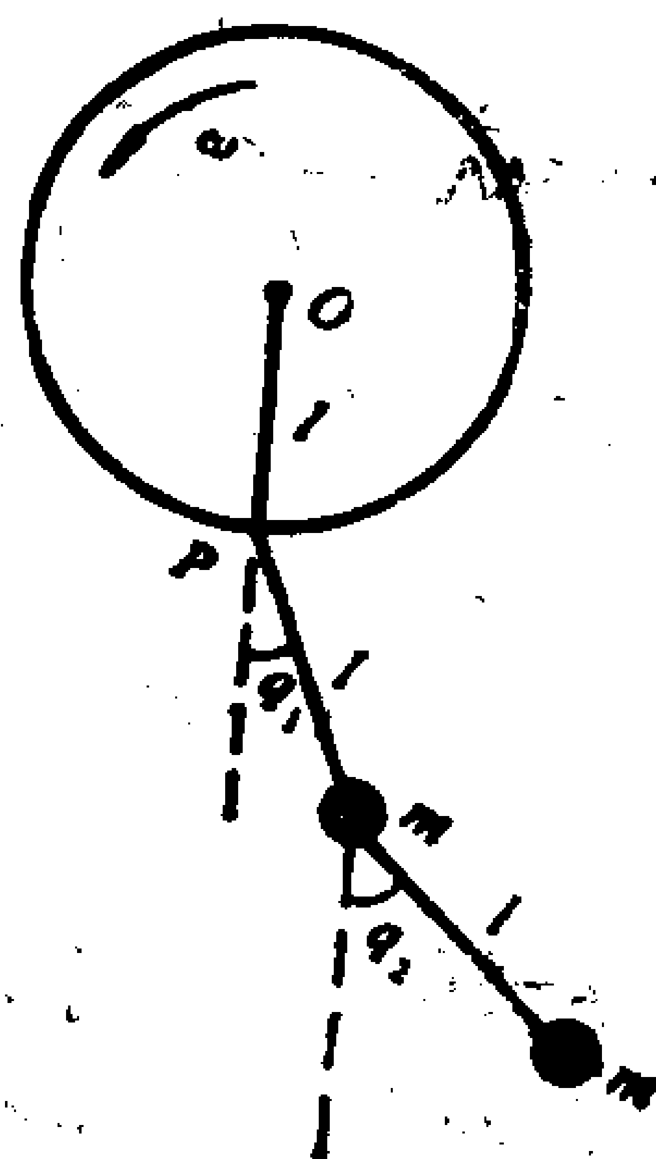


题4-67图

4-68 试求由拉格朗日函数$L=t\sqrt{1+\dot{x}^2}$所决定的点的运动规律。

答：$X=c_1\text{arc ch}\dfrac{t}{c_1}+c_2$

4-69 两根长为l的无质量杆在其一端都连有质量为m的质点，第一杆铰接于圆盘边缘上的点P，第二杆铰接于第一杆。圆盘半径为l，以匀角速度ω绕中心转动。设全部运动在水平面内进行，并以q_1和q_2表示相对于OP方向量出的角。试写出系统绝对运动的动能和相对运动的动能。能否应用下述方程？为什么？



题4-69图

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T_1}{\partial q_s}=-\frac{\partial}{\partial q_s}\left(-\frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{N}m_i r_i^2\right)+Q_s$$

$$(s=1,2,\cdots,n)$$

4-70 某力学系统的广义力Q_s根据等式

$Q_s=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial V}{\partial \dot{q}_s}-\dfrac{\partial V}{\partial q_s}$ $(s=1,2,\cdots,n)$由广义势$V(q_s,\dot{q}_s)$来确定。试证当取广义势

$$V_1=V(q_s,\dot{q}_s)+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\Psi}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

代替原来势$V(q_s,\ \dot{q}_s)$时，力Q_s不变。式中$\Psi(q_1,\cdots,q_n,\ t)$是可微的任意函数。

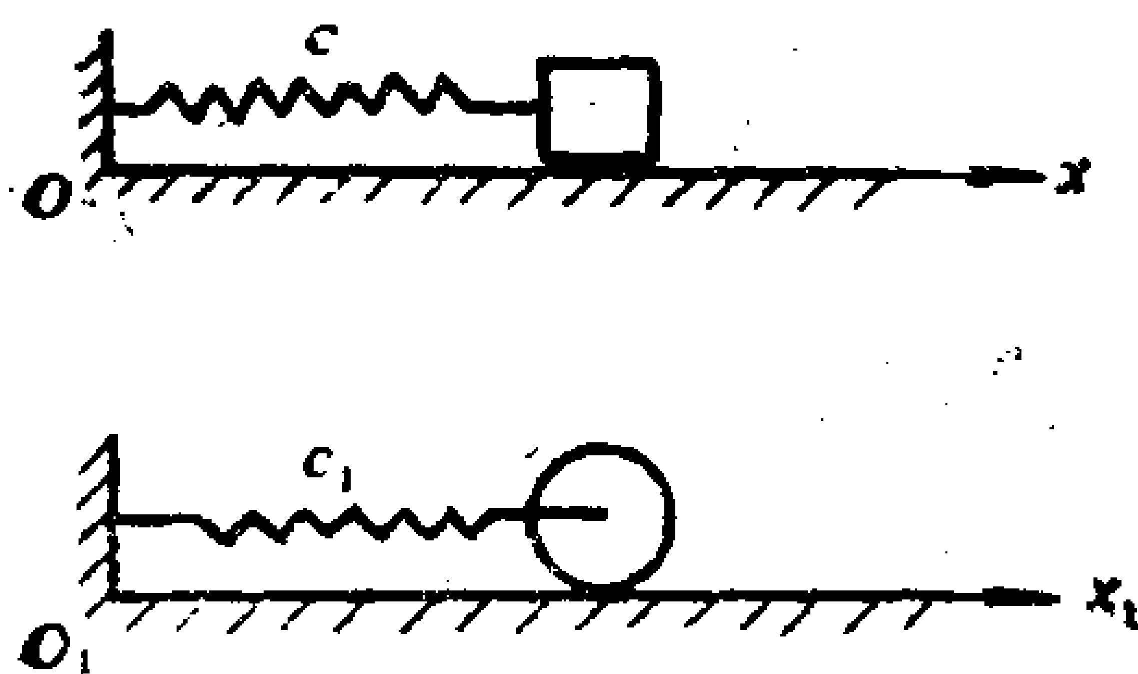
4-71 用刚度为c的弹簧固定到墙上的质量为m的重物，沿着粗糙导轨OX滑动、而且滑动摩擦系数等于f。半径为R而质量相同的圆盘中心用刚度为c_1的弹簧固定到墙上，圆盘沿导轨O_1X_1无滑动地滚动，而且滚动摩擦系数(滚动摩擦力偶臂)等于k。求使得重物惯性中心和圆盘惯性中心在同样的初始条件下，作相同的运动的这些参数c，c_1，f，k和R之间的关系。

答：$3c=2c_1$，$2k=3fR$

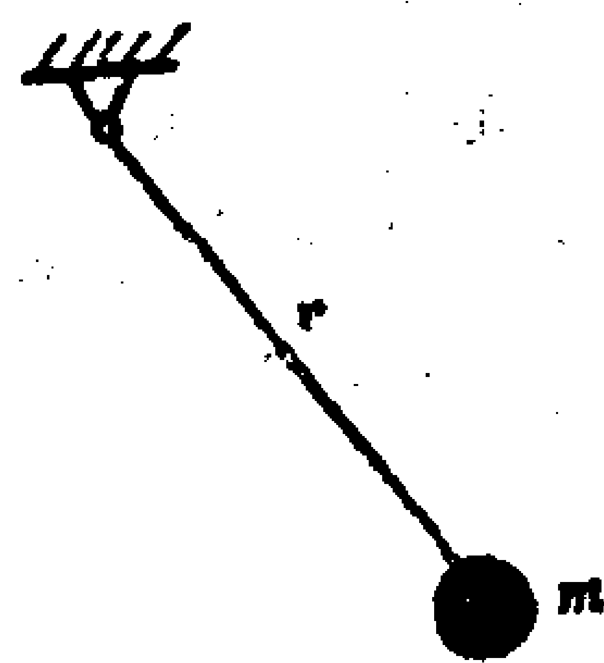
4-72 质量为m的点，用一长$r=a+b\cos\omega t(a>b>0)$的绳吊起形成一球摆，绳之质量可忽略，求质点运动微分方程。

答：$(a+b\cos\omega t)\ddot{\theta}-2b\omega\dot{\theta}\sin\omega t-(a+b\cos\omega t)\dot{\phi}^2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta=g\sin\theta$

$(a+b\cos\omega t)\ddot{\phi}\sin\theta-2b\omega\dot{\phi}\sin\omega t\sin\theta+2(a+b\cos\omega t)\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta=0$



题4-71图



题4-72图

4-73 质量为m的点在一半径为a的空心半球面内运动，球面顶点在水平面上。问以什么速度投射质点，方能使其保持在离顶点高为h的水平圆周上运动。

答：以角速度$\dot{\phi}=\sqrt{\dfrac{g}{a-h}}$投射即可。

4-74 两圆盘悬挂于质量可以忽略的铅直线上，圆盘的回转半径和质量分别为k_1，k_2和m_1，m_2，扭转一或二只圆盘，然后松手，使它们运动。设θ_1与θ_2是与其一特定方向的夹角。(1)证明动能是

$T=\dfrac{1}{2}\left(m_1k_1^2\dot{\theta}_1^2+m_2k_2^2\dot{\theta}_2^2\right)$；(2)证明势能是

$V=\dfrac{1}{2}\left[\tau_1\theta_1^2+\tau_2(\theta_2-\theta_1)^2\right]$，其中$\tau_1,\tau_2$是转动常数，即，使圆盘转过单位弧度所需的转矩；(3)建立系统运动微分方程。

答：$m_1k_1^2\ddot{\theta}_1-\tau_1\theta_1+\tau_2(\theta_2-\theta_1)=0$；

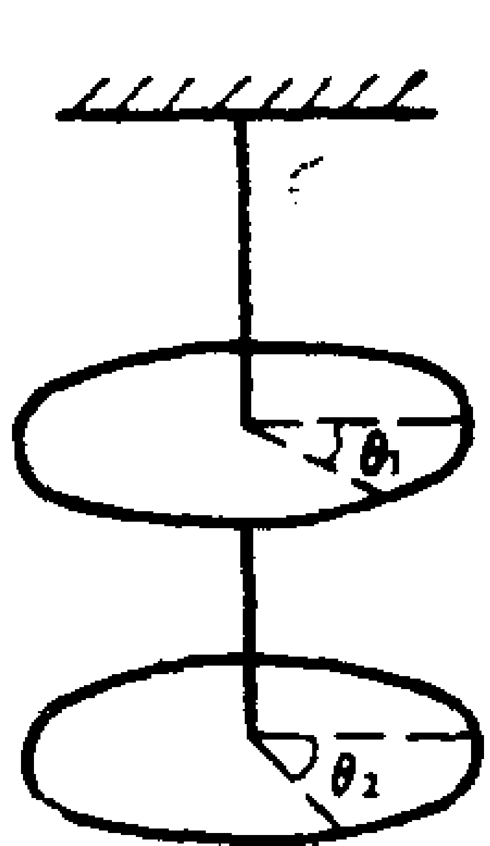
$m_2k_2^2\ddot{\theta}_2-\tau_2(\theta_2-\theta_1)=0$

4-75 图中AB是一光滑水平面，在O点有一小孔，一长为l的细绳通过O点，一端连接一质量为m的P物，另一端悬挂质量与P相同的Q物，当长度$OP=a$时，给P物一垂直于OP的初速度v_0，设r是OP的瞬时距离，而θ是OP与过O某一固定直线的夹角。(1)建立系统的拉氏函数；(2)写出以r表示的P的运动微分方程；(3)求出任意位置时P的速度。若P与Q之质量为m_1及m_2，试解此题。

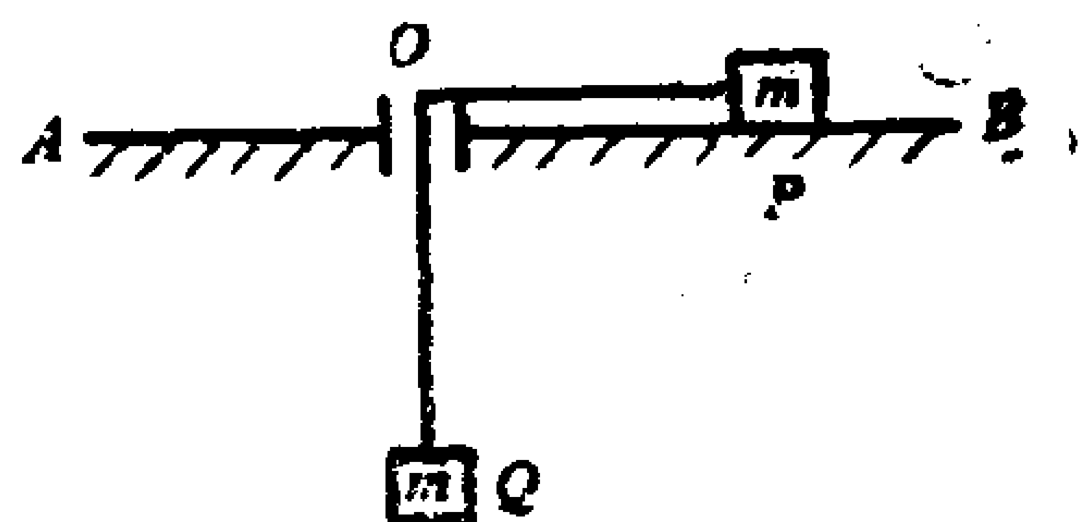
答：$L=\dfrac{m}{2}\left(2\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+mg(l-r)$

P之运动方程　$\ddot{r}=\dfrac{a^2\cdot v_0^2}{r^3}-g$

$$(m_1+m_2)\ddot{r}-\frac{m_1a^2v_0^2}{r^3}+m_2g=0$$



题4-74图



题4-75图

4-76 在一机器中，为了静平衡起见，轴承对铅垂线倾斜α角。按装在轴承中的转子对于本身的轴的转动惯量为J。在转子上带有一未均衡的质量m，它与轴的距离为r。试写出转子的运动微分方程式与其在本平衡位置附近作微振动的频率。

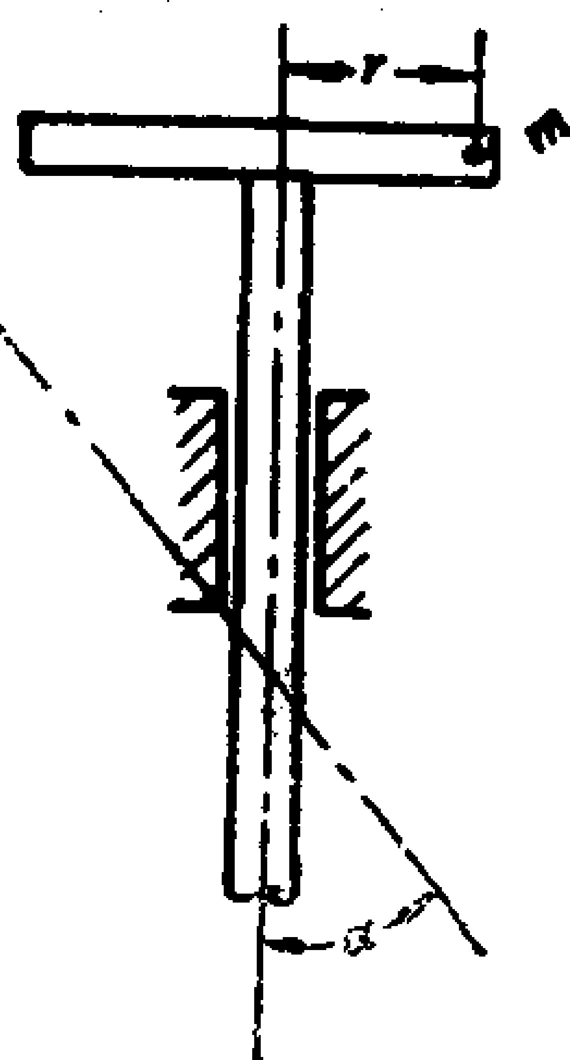
答：$(mr^2+J)\ddot{\varphi}+mgr\sin\alpha\sin\varphi=0$，$k=\sqrt{\dfrac{mgr\sin\alpha}{mr^2+J}}$，

此处φ为转子的转角。

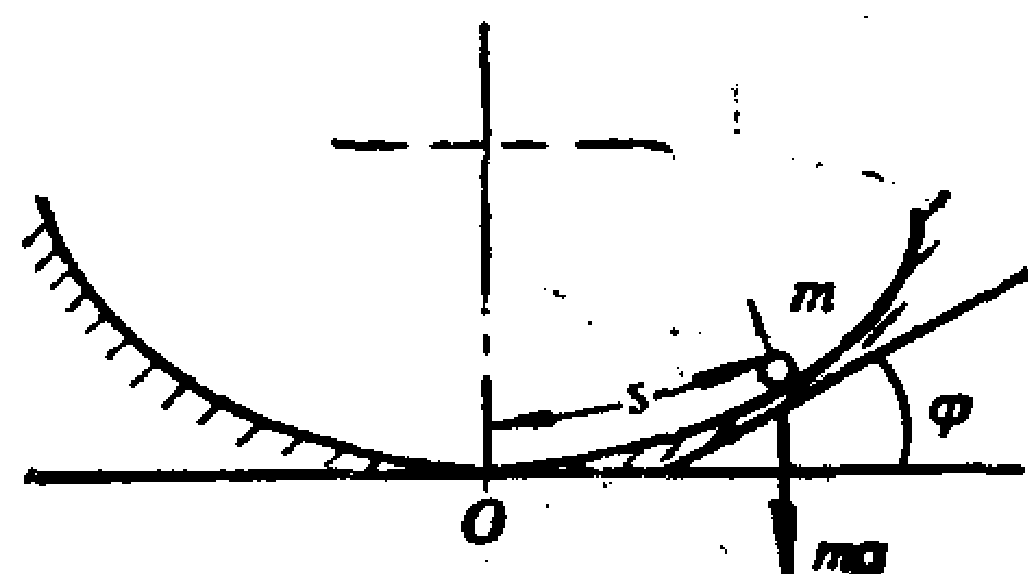
4-77 一质点的质量为m；受重力作用，在旋轮线的导轨上运动。旋轮线的方程式已知为$s=4a\sin\varphi$，此处s为自O点起算的弧长，φ为旋轮线的切线与水平轴的交角。求点的运动。

答：$S=A\sin\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{g}{a}}t+\varphi_0\right)$，

其A与φ_0为积分常数。



题4-76图



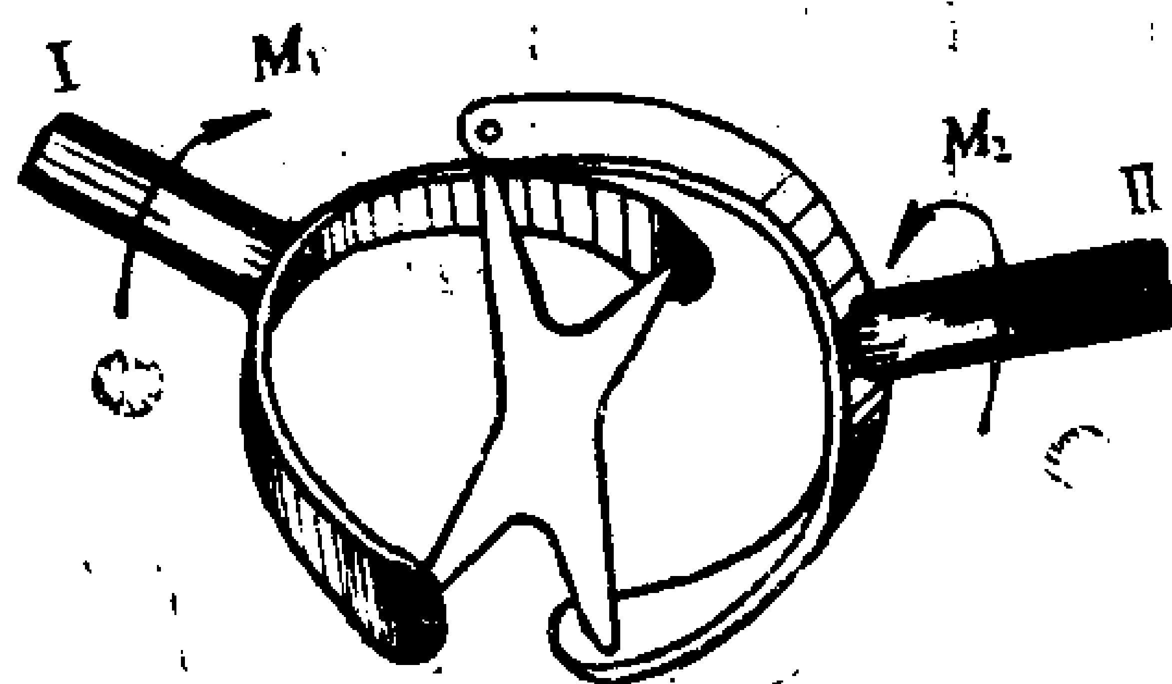
题4-77图

4-78 在同一平面内的二轴，其交角为α，用卡尔登铰链相联接。二轴的转动惯量分别为J_1与J_2。设作用在第一轴的转动力矩为M_1；作用在第二轴的反作用力矩为M_2，又设轴承中的摩擦可略去不计。试写第一轴的运动方程式。

答：以φ表示第一轴的转角，可得：

$$\left[J_1+J_2\left(\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\varphi\sin 2\alpha}\right)^2\right]\ddot{\varphi}$$

$$-\frac{J_2\sin^2\alpha\cos^4\alpha\sin^2\varphi}{(1-\cos^2\varphi\sin^2\alpha)^3}\dot{\varphi}^2=$$



题4-78图

$$=M_1-M_2\frac{\cos\alpha}{1-\cos^2\varphi\sin^2\alpha}$$

4-79 在上题中，当二轴间的夹角α很小时，求第一轴的运动方程式。精确程度计算到α^2为止。

$$答：\varphi=\frac{1}{2}\frac{M_1-M_2}{J_1+J_2}t^2+c_1t+c_2$$

4-80 一均质圆锥在粗糙的斜面上滚动。斜面与水平面倾斜α角，圆锥母线长l，顶角为2β。试写出圆锥运动的方程式。

提示：取接触母线与斜面最大倾斜线所成的交角θ为广义坐标。

$$答：\ddot{\theta}+\frac{g\sin\alpha}{l\left(\cos^2\beta+\frac{1}{5}\right)}\sin\theta=0$$

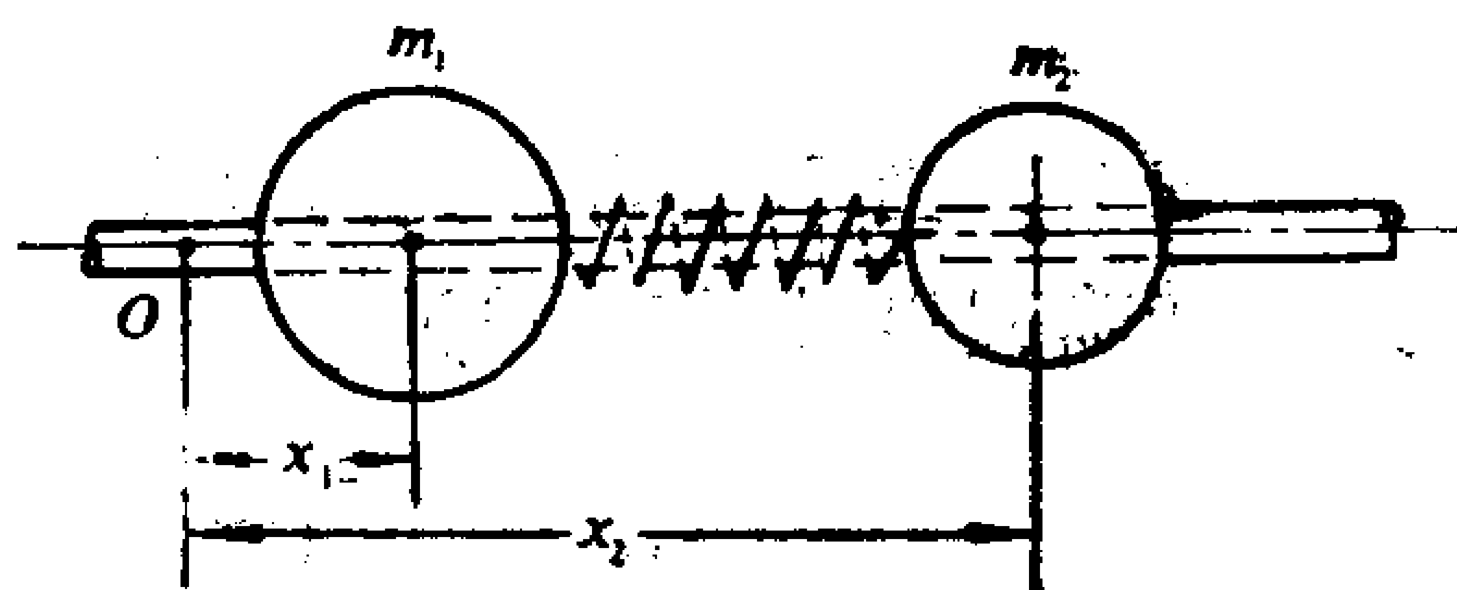
4-81 两质量m_1与m_2同在一光滑水平杆(ox轴)，用一刚性系数为c的弹簧相联结，并可沿此杆移动。当弹簧无应力时，两质量的重心间的距离为l。此系统的起始情况可由下列两质量重心的速度与坐标的数值来决定：

当$t=0$时$x_1=0$，$\dot{x}_1=u_0$，$x_2=l$，$\dot{x}_2=0$；试求该系统的运动。

$$答：x_1=\frac{1}{m_1+m_2}\left\{m_1u_0t+\frac{m_2u_0}{k}\sin kt\right\};$$

$$x_2-l=\frac{1}{m_1+m_2}\left\{m_1u_0t-\frac{m_1u_0}{k}\sin kt\right\};$$

$$k=\sqrt{c\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}$$

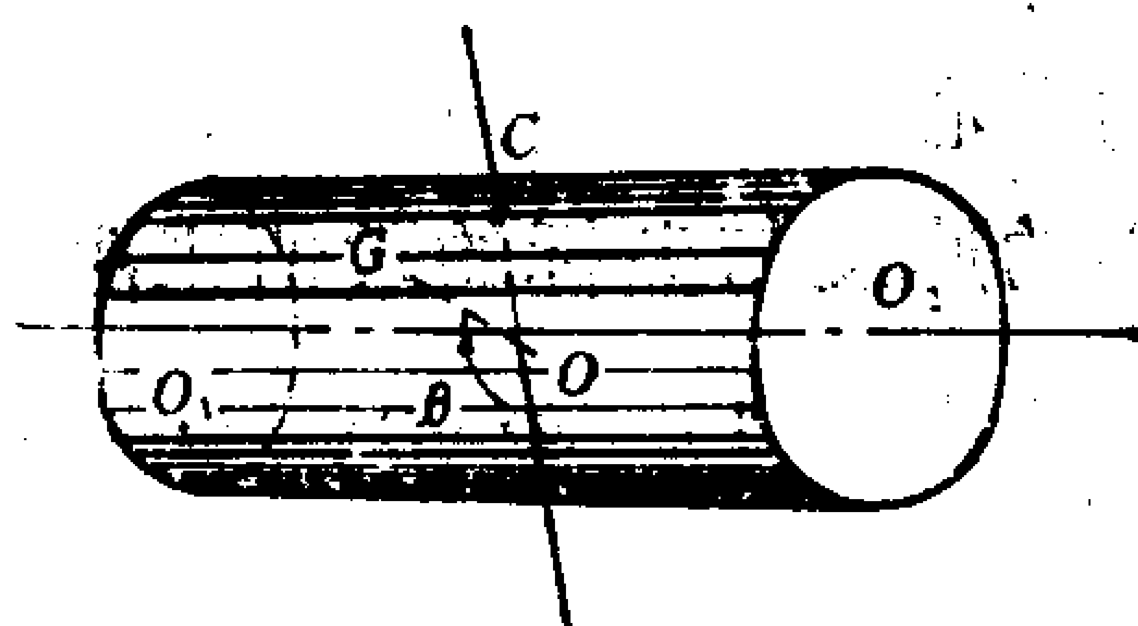


题4-81图

4-82　重 P之物可绕水平轴 O_1O_2转动；而此轴本身则以等角速度ω绕铅垂轴OC转动。物体 G 的重心在垂直于 O_1O_2的直线上，它与O点的距离为l。设O_1O_2与 OG 是物体在O点的惯性主轴。物体对主轴的转动惯量分别为A、B、C。试写出运动方程式。

答：$A\ddot{\theta}-\omega^2(C-B)\sin\theta\cos\theta=-Pl\sin\theta$，

其中θ为绕O_1O_2的转角。



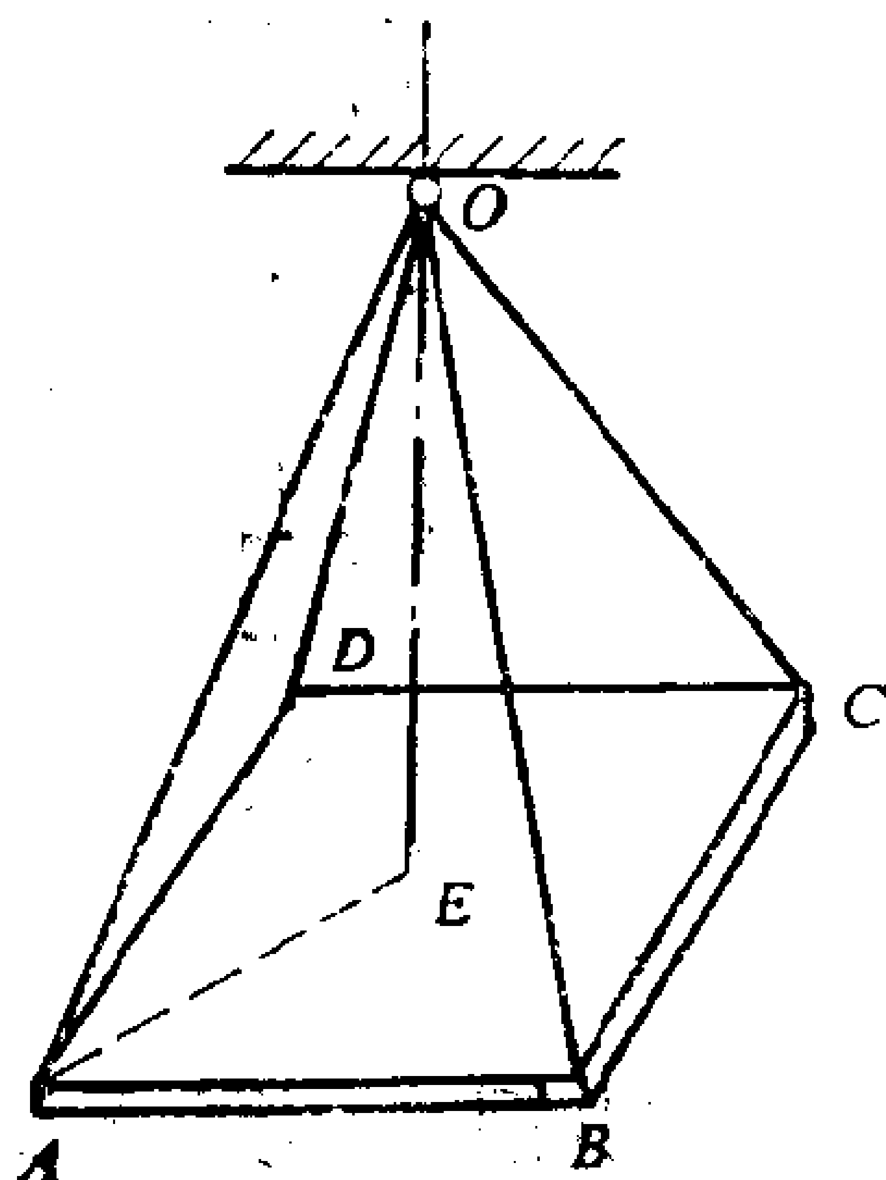
题4-82图

4-83　一正方形平板$ABCD$，质量为M，用四根弹性绳悬于固定点O，每绳的刚性为c，且当此系统在平衡位置时，O点在平板中心E的铅垂上方距离l处。平板对角线长为a，试求此系统微小摆动的周期。

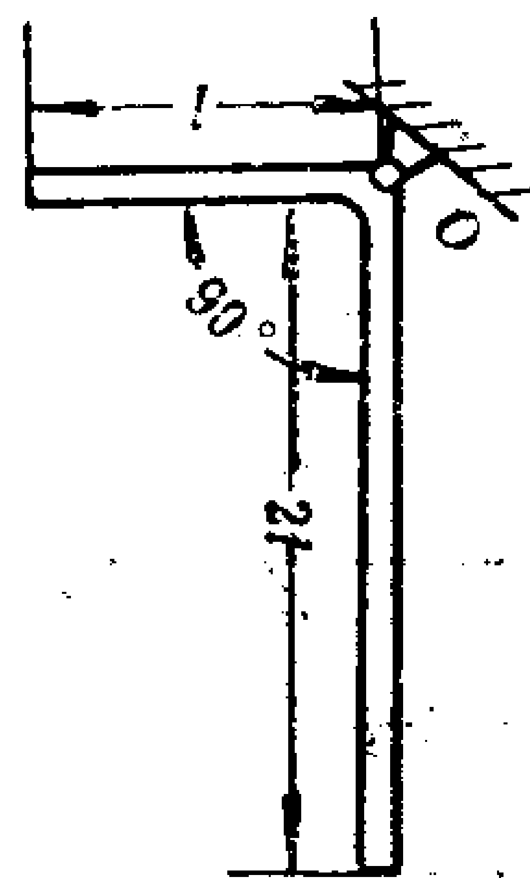
答：$T=2\pi\sqrt{\frac{M(a^2+4l^2)}{c\quad 16l^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{Mga^2}{16cl^3}}}$

4-84 一角尺由两长度各为l与$2l$的均质细杆构成，两杆互成90°交角；此角尺可绕O点转动。求角尺在其平衡位置附近作微小摆动的周期。

答：$T=2\pi\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{17}}\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}=7.53\sqrt{\frac{l}{g}}$



题4-83图



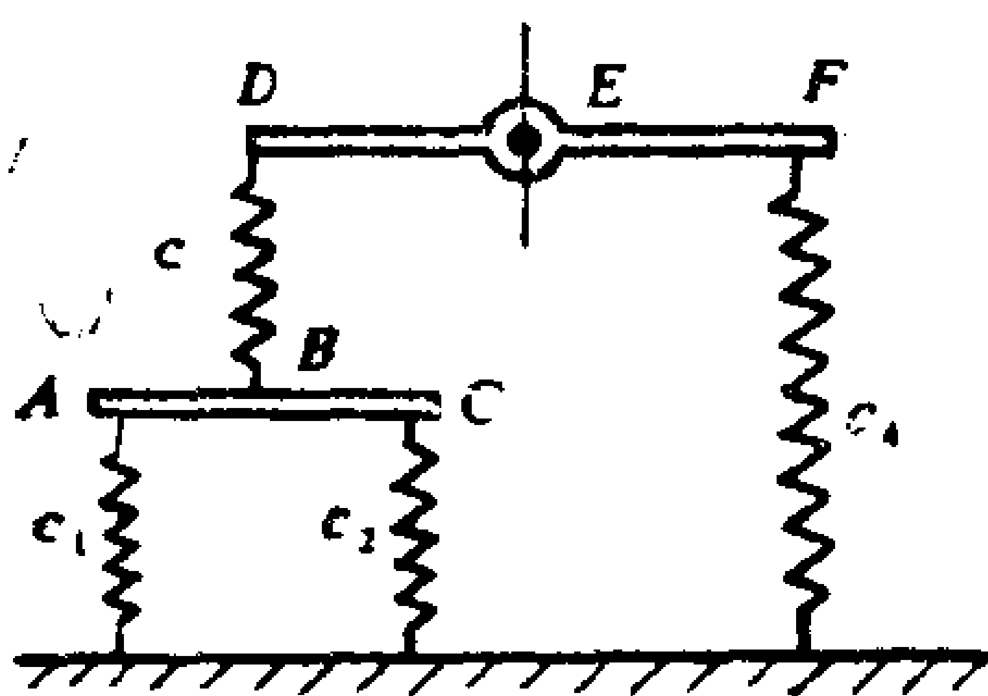
题4-84图

4-85 试求图示系统所包含的一质点E作铅垂微振动的频率。已知质点的质量为m；距离$AB=BC$，$DF=EF$；弹簧的刚性分别为c_1、c_2、c与c_4。杆AC与DF可视为刚硬的，但没有质量。

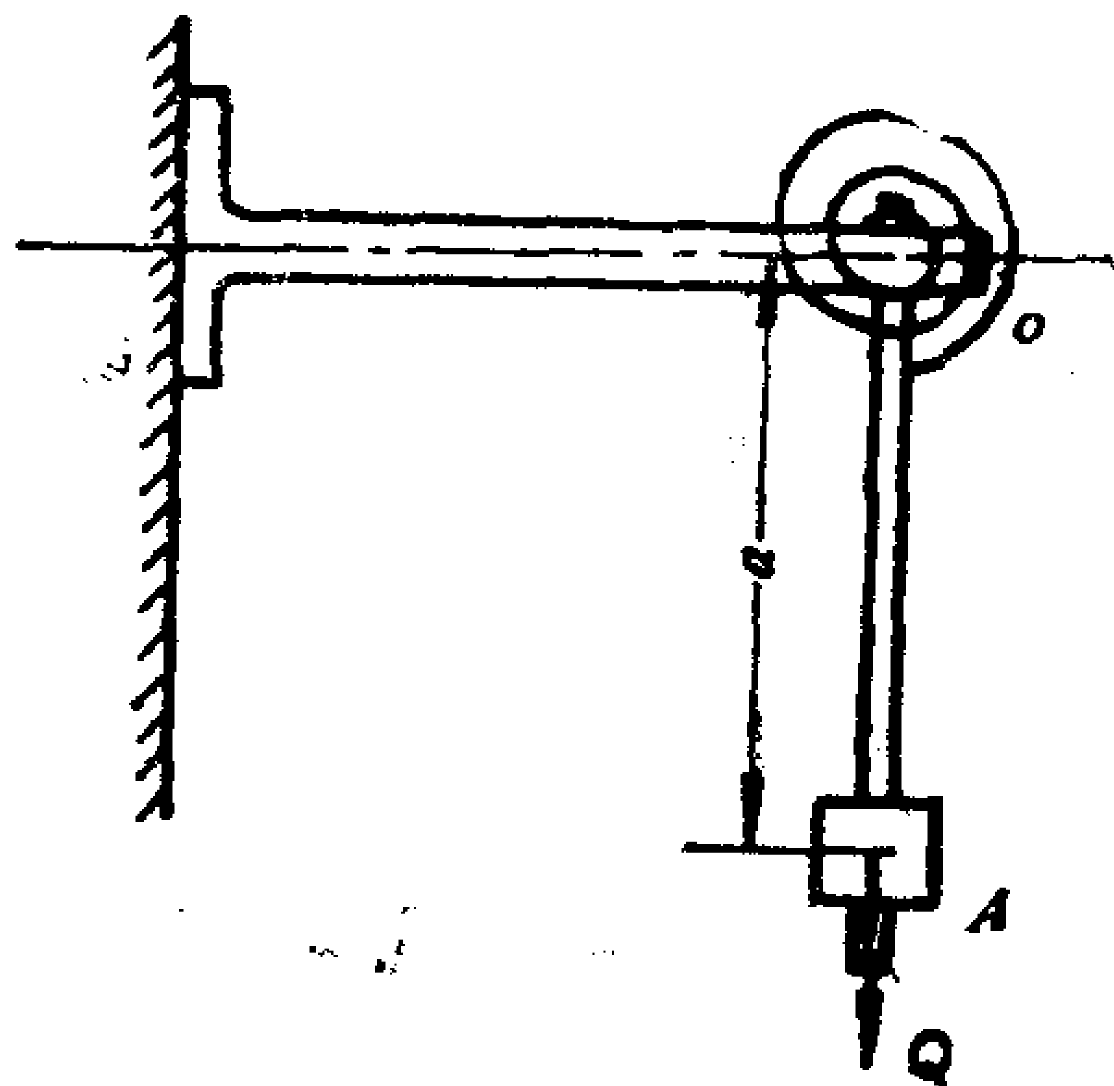
答：$k=\sqrt{\frac{4}{\left(m\frac{1}{4c_1}+\frac{1}{4c_2}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c^4}\right)}}$

4-86 用以记录水平振动的振动仪中，摆 OA 由一杠杆与一重物构成，并藉其本身重量与一螺线弹簧维持于铅垂稳定平衡位置。此摆可在其稳定平衡位置附近绕水平轴摆动。已知摆的最大静矩 $Qa=45$ N—cm，其对于 O 轴的转动惯量 $J=0.3$ N-cm-s^2，又弹簧的刚性 $c=45$ N/cm，求当摆的角度不大时，其自由摆动的周期。

答：$T=0.364s$



题4-85图



题4-86图

4-87 一摆的杆 OA 藉连杆 AB 与一小钢片弹簧 EB 相连；弹簧的刚性为c，且在未受力状态时，其位置为EB_1。已知：欲将弹簧引至相当于摆之平衡时的位置，应沿 OB 方向在弹簧上加一力F_0；$OA=AB=a$；又设杆的重量不计，摆的重心到转动轴的距离 $OC=l$，摆重为 Q。为了要达到最好等时性(振动周期与起始角偏度无关的性质)的要求，此系统加以调节，使摆之运动的方程式

$$\ddot{\varphi}=f(\varphi)=-\beta\varphi+\cdots$$

中，所舍弃诸项中第一项的方次为 φ^5。试求欲使此条件成立，常数Q、F_0、c、a、l 间应有的关系，求此摆微振动的

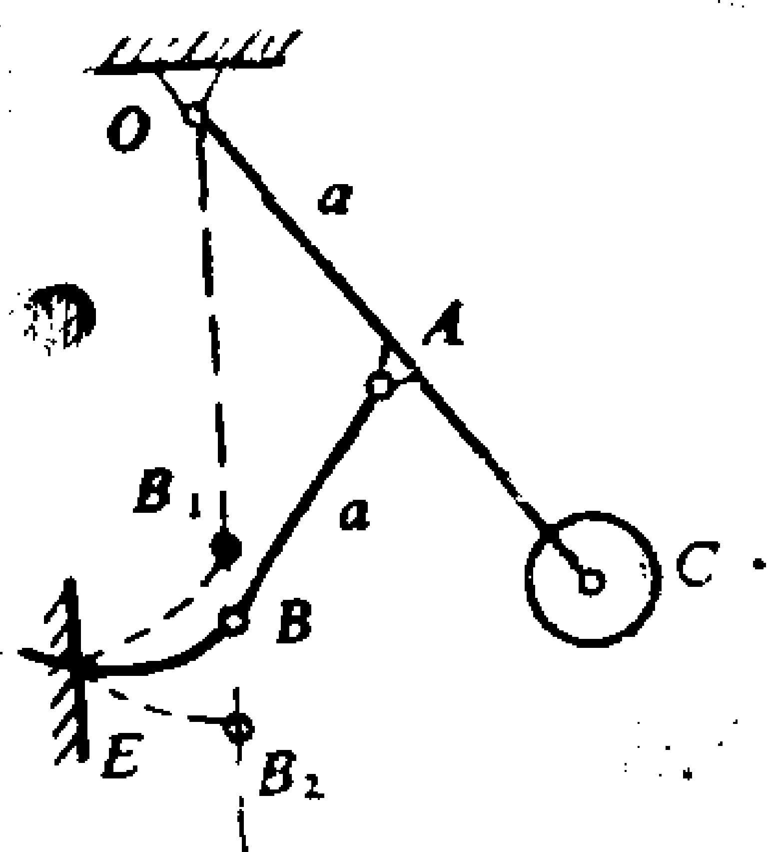
周期。

$$答：T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2aF_0}{Ql}}}}；$$

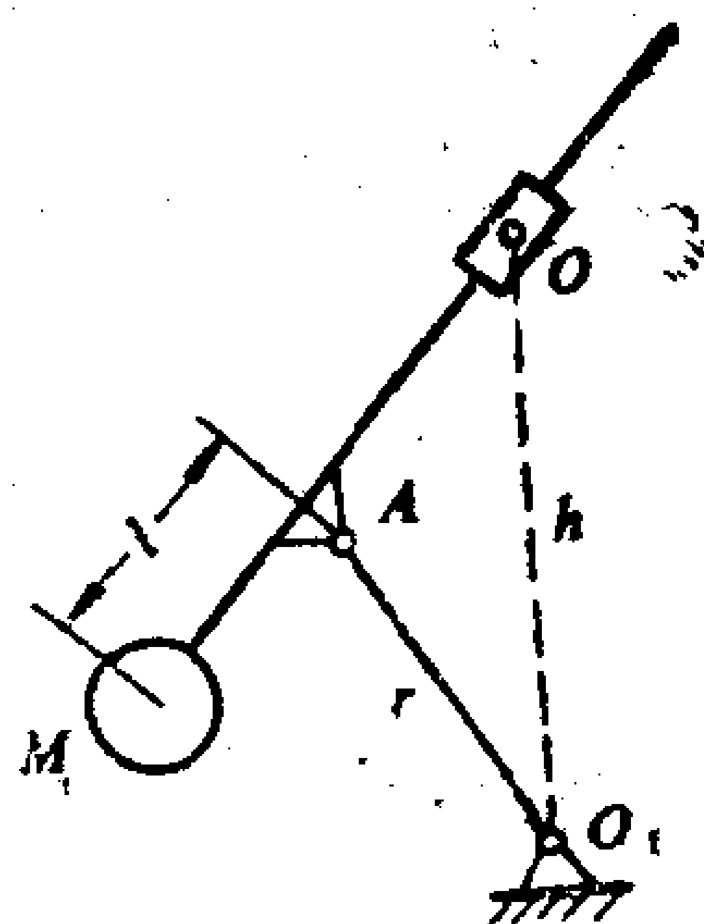
$$Ql-2aF_0=12a^2c$$

4-88 在自记振动仪之摆中，摆的重球M连结在一条杆上，此杆穿过可以转动的套管O并与绕固定轴O_1摇摆的摇杆AO_1用铰链相连接。问在何种条件下，此摆之杆OM的铅垂位置是稳定位置？并求此摆在此位置附近作微小振动的周期。尺寸如图示，杆重不计。

$$答：T=2\pi(h-r+l)\sqrt{\frac{r}{[rl-(h-r)^2]g}}；\ k-r<\sqrt{rl}$$

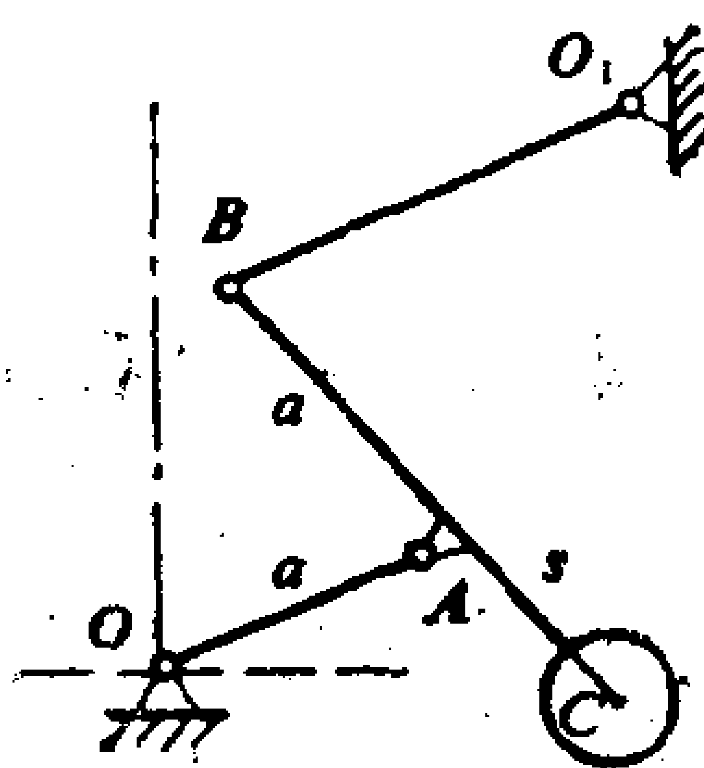


题4-87图



题4-88图

4-89 图示为一摆，重物的重心在四节铰链机构(直接引导机构)$OABO_1$之摇杆的延长端上。在平衡位置时，杆OA与BC是铅垂的，而杆O_1B则是水平的；$OA=AB=a$；$AC=s$。求此摆作微小振动的周期。



题4-89图

答：$T=2\pi\dfrac{s+a}{\sqrt{g(s-a)}}$

4-90 一质点以长为 l 的不可伸长的线挂起而构成一摆，摆的悬挂点沿水平线按规律 $\xi=\xi(t)$ 而运动。试求此摆运动的规律。

答：摆离开铅垂位置的偏角可由下式决定：

$$\varphi=C_1\sin kt+C_2\cos kt-\frac{\xi(t)}{l}+\frac{k}{l}\int_0^t\xi(\tau)\sin k(t-\tau)d\tau,$$

其中 $k=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

4-91 一质点重 P，挂在刚性为 c 的弹簧上；质点受到由下列条件决定的干扰力的作用：

$$当t<0;\ F=0,$$
$$当0<t<\tau;\ F=\frac{t}{\tau}F_0,$$
$$当\tau<t;\ F=F_0。$$

试求当 $t>\tau$ 时质点的运动，并求振动的振幅。

答：$x=\dfrac{F}{c}\left[1-\dfrac{2}{k\tau}\cos k\left(t-\dfrac{\tau}{2}\right)\sin\dfrac{k\tau}{2}\right]$；

$k=\sqrt{\dfrac{cg}{P}}$；$A=\dfrac{2F}{kc\tau}\sin\dfrac{k\tau}{2}$

4-92 物理双摆由均质直杆 O_1O_2 与 AB 构成：O_1O_2 杆长 $2a_1$，重 P_1，可绕固定水平轴 O_1 转动，AB 杆长 $2a_2$，重 P_2，在其重心用铰链与第一杆的一端 O_2 相连。设在开始时 O_1O_2 离开铅垂位置的偏角为 φ_0，而 AB 杆在铅垂位置，并有初角速度 ω_0，试求此系统的运动。

答：$\varphi=\varphi_0\cos\ 0.443\sqrt{\left(1+2\frac{P_2}{P_1}\right)\frac{g}{a_1}}t$；

$\psi=\omega_0 t$

其中ψ为杆AB与铅垂线所成的角度

4-93 一质点在一曲面的平衡位置与曲面的最低点重合，曲面以等角速ω绕通过此点的铅垂轴转动。曲面在最低点的主曲率半径为ρ_1与ρ_2。试求此质点在平衡位置附近作微振动的频率。

答：微振动频率为下面方程式的根：

$$k^4-\left[2\omega^2+\frac{g}{\rho_1}+\frac{g}{\rho_2}\right]k^2+\left(\omega^2-\frac{g}{\rho_1}\right)\left(\omega^2-\frac{g}{\rho^2}\right)=0$$

4-94 一水平的均质矩形板，边长为a与b，以四个刚性系数均为c的相同弹簧支持它的四个角；板的质量为M，求板作自由振动的频率。

答：$k_1=\sqrt{4\frac{c}{M}}$；$k_2=k_3=\sqrt{12\frac{c}{M}}$

4-95 一立方形桶，每边长$2a$，重P，以四个相同的弹簧支持它下面的四个角；弹簧在与立方体底边平行的三个轴之方向的刚性系数为c_x，c_y，c_z；立方体对于其主中心轴的转动惯量为J。试写出微振动的方程式，并当$c_x=c_y$时，这些振动的频率。

答：$m\ddot{x}+c_x x-c_x a\varphi_2=0$；

$m\ddot{y}+c_y y+c_y a\varphi_1=0$

$m\ddot{z}+c_z z=0$；

$J\ddot{\varphi}_1+c_y a y+c_y a^2\varphi_1+c_z a^2\varphi_1=0$；

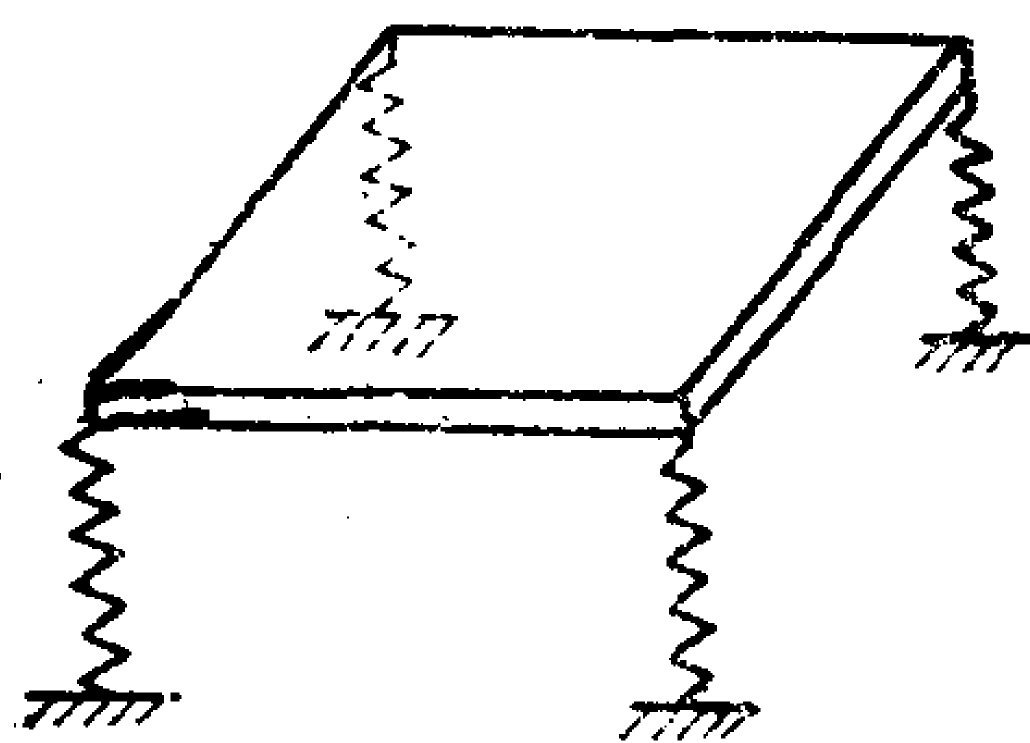
$J\ddot{\varphi}_2+c_x a^2\varphi_2-c_x a x+c_z a^2\varphi_2=0$，

$$J\ddot{\varphi}_3+c_x a^2\varphi_3+c_y a^2\varphi_3=0$$

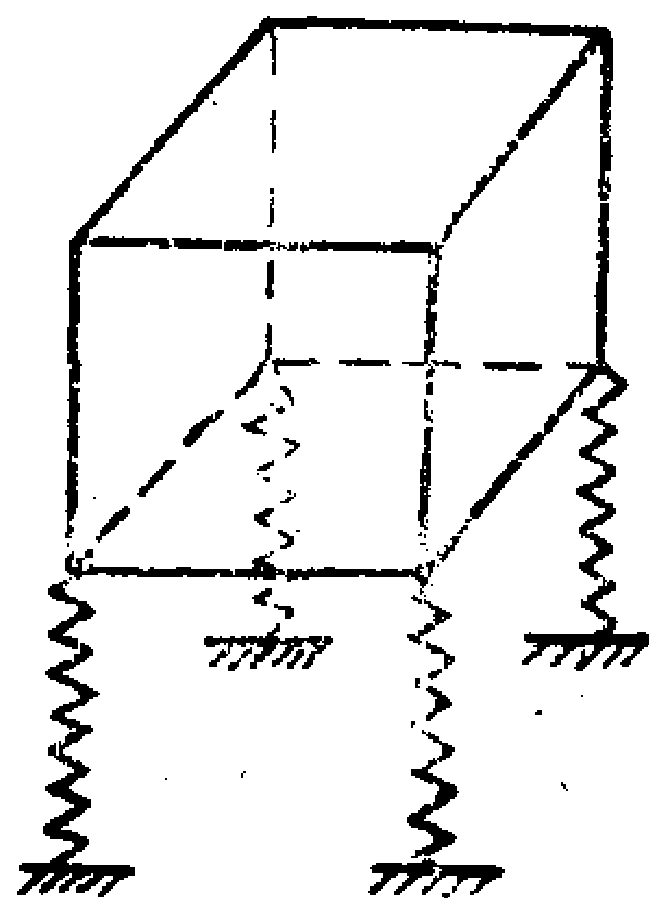
其中 x, y, z 为立方体中心坐标，φ_1, φ_2, φ_3 为立方体绕坐标轴的转角。如 $c_x=c_y$，则

$$k_z=\sqrt{\frac{c_z g}{P}};\quad k_{\varphi_3}=\sqrt{\frac{2c_x a^2}{J}};$$

$$k^4-\frac{m(c_x+c_z)a^2+c_x J}{mJ}k^2+c_x c_z\frac{a^2}{mJ}=0$$



题4-94图



题4-95图

4-96 一绳长 nl，铅垂地挂在一端。绳上结有 n 个质量同为 m 的质点，彼此成等距离 l。试写出运动方程式。并求 $n=3$ 时此系统横振动的振幅。

答：运动方程式为

$$m\ddot{x}_k=-\frac{mg}{l}\left[kx_k+(n-k+1)x_{k-1}+(n-k)x_{k+1}\right],$$

其中 x_k 为第 k 个质点的横位移(号码的计算由上而下)。

$$k_1=0.646\sqrt{\frac{g}{l}};\ k_2=1.515\sqrt{\frac{g}{l}};\ k_3=2.505\sqrt{\frac{g}{l}}$$

4-97 一质点可以沿一光滑的平面曲线运动，此曲线则

以角速度ω绕铅垂轴转动。质点的位能$V(s)$为已知且只和质点的位置有关，而其位置则由沿曲线计算的弧长s所决定；质点到转动轴的距离为$r(s)$。试求质点在相对平衡位置附近作微振动的频率。

答：$k^2=\frac{1}{m}\left(\frac{d^2v}{ds^2}-\frac{d}{ds}\left[mr\frac{dr}{ds}\right]\omega^2\right)_{s=s_0}$，

其中s_0由下面的方程式决定：

$$\left(\frac{dv}{ds}\right)_{s=s_0}=\omega^2\left(mr\frac{dr}{ds}\right)_{s=s_0}$$

4-98 一质点，质量为m，在与距离的n次方成比例的中心力$F=ar^n$的作用下走一圆周轨迹。试求受扰动后运动轨迹与趋近原始圆周所需满足的条件。

答：当$n<-3$时运动是不稳定的，而当$n>-3$时则是稳定的。

4-99 一重球在一弯成椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$形状的光滑小管内，小管以等角速度$\omega$绕铅垂轴$oz$（朝下）转动。试求小球的相对平衡位置，并讨论其稳定性。

答：当$\omega^2\leqslant\frac{gc}{a^2}$时，有两个平衡位置：

1） $x=0$，$z=c$（稳定的）。

2） $x=0$，$z=-c$（不稳定的）。

当$\omega^2>\frac{gc}{a^2}$时，有三个平衡位置：

1） $x=0$，$z=+c$（不稳定的）；

2） $x=0$，$z=-c$（不稳定的）；

3） $z=\frac{gc^2}{\omega^2a^2}$（稳定的）

4-100 一质点被迫在一光滑的圆环面上运动，此圆环的参数方程式为：

$$x=\rho\cos\psi;\ y=\rho\sin\psi;\ z=b\sin\theta,\ \rho=a+b\cos\theta$$

（z 轴铅垂向上）。试求以角 θ 不变为特征的此质点的可能运动，并讨论其稳定性。

答：$\theta=\theta_i=$常数，可由下面方程求得：

$$(1+\mathrm{d}\cos\theta_i)=-\beta\,\mathrm{ctg}\,\theta_i,$$

其中 $\alpha=\dfrac{b}{a}$；$\beta=\dfrac{g}{a\omega^2}$；$\dot{\psi}=\omega=$常数。

这个方程式可有两个不同的实根

$$-\frac{\pi}{2}<\theta_1<0;\quad \frac{\pi}{2}<\theta_2<\pi$$

符合于第一解的运动是稳定的，符合于第二解的运动则是不稳定的。

4-101 质量为M的铁丝弯曲成螺旋线，$x=a\cos\psi,y=b\sin\psi$，$z=a\psi tan\beta$，可以绕水平轴（z轴）自由旋转，铁丝的长度使其质心位于轴上。有一质量为m的小环在铁丝上滑动。当小环从铁丝的最下端以速度$a\omega$沿着铁丝水平抛出时，铁丝处于静止状态。证明如果ω不很大，通过z轴和滑环的平面将象长度为$a(M+m\sin^2\beta)/(M\cos^2\beta+m\sin^2\beta)$的单摆那样摆动，而且在摆动周期$T$内铁丝转过一个角度$(m\omega T\sin^2\beta\cos\beta/(M\cos^2\beta+m\sin^2\beta))$。

4-102 质点m用一无质量的原长为a的弹簧连结在一粗糙的水平桌面的一固定点上，弹簧的弹性系数为k。质点限制在过固定点的直线上运动。质点和桌面的接触摩擦系数为μ。试求系统的拉格朗日函数。

答：$L=(m\dot{x}^2/2)-[k(x-a)^2/2]-\mu mgx\dot{x}/|\dot{x}|$

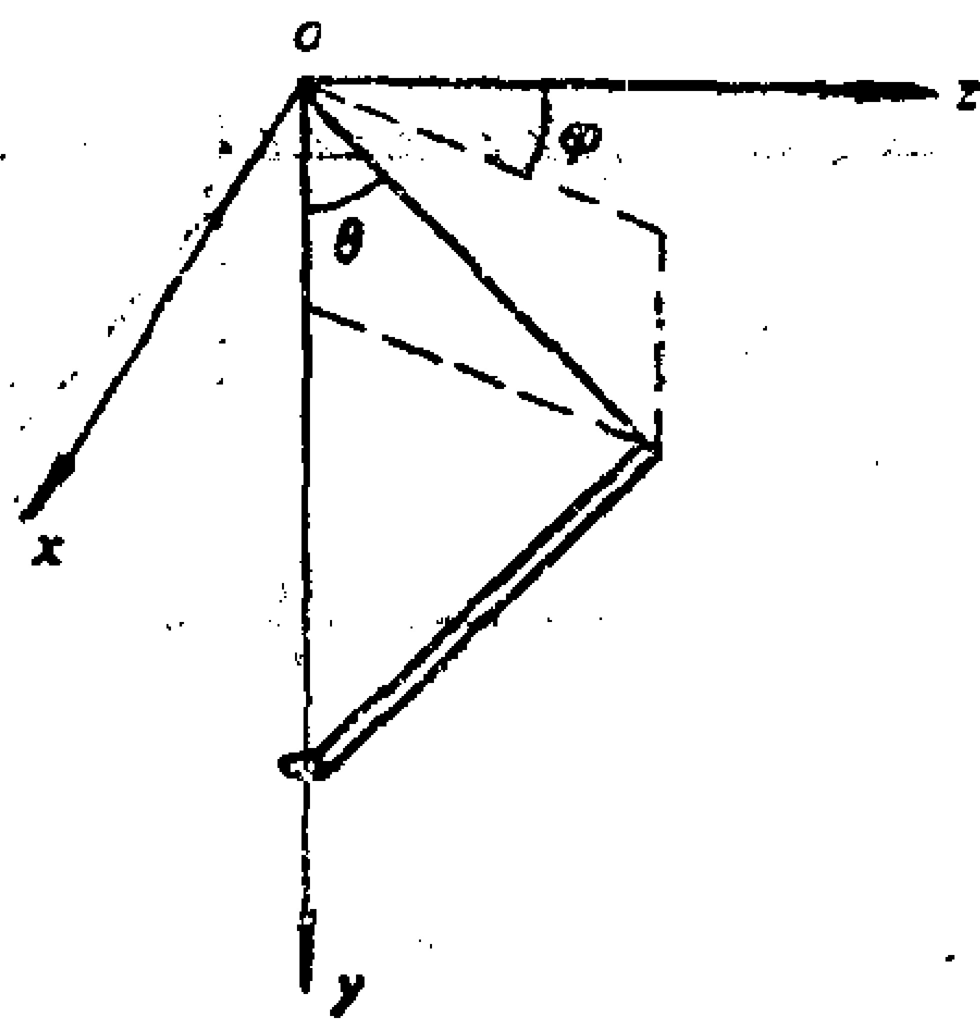
4-103　质量为 m，长为 $2a$ 的均质杆 OA 支于 O 点，杆与向下的铅垂轴成 θ 角，AOZ 平面与固定的垂直面成 φ 角。质量为 $2m$ 的小珠用原长为 a，弹性系数为 nmg 的弹性线系于 O 点，并可在杆上滑动。选 $x=OP$，θ 和 ϕ 为广义坐标，求拉格朗日运动方程，并证明若 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 和 $x=4a/3$ 稳定运动可能时，则 $\dot{\phi}^2=3g/2a$，$n=6a$。

4-104　一质量为 m 半径为 a 的圆柱体在半径为 b 的水平半圆槽中无滑动滚动，半圆槽联结在质量为 M 的滑块上。滑块由弹簧系数为 k 的弹簧支持，并限制在铅垂导槽中作无摩擦移动。取滑块的垂直位移 x 和圆柱中心的角位移 θ 为坐标（两者都从静平衡位置算起），利用拉格朗日方程求系统的运动方程。

答：$(M+m)\ddot{x}+m(b-a)\cos\theta\dot{\theta}^2+m(b-a)\sin\theta\ddot{\theta}$
$=-kx$

$$\sin\theta\ddot{x}+\frac{3}{2}\left(b-a\right)\ddot{\theta}=-g\sin\theta$$

4-105　质量为 M 长为 $2L$ 的均质直杆的一端可沿铅垂线无摩擦地滑动，它的另一端与质量不计长为 $2L$ 且不可伸长的细绳连接，细绳的另一端系于铅垂线上的固定点 O 上。令 θ 为铅垂线和细绳间的夹角，φ 为杆和细绳构成的平面与 yz 平面的夹角，如图所示：



题4-105图

（a）试问杆子末端在笛卡儿坐标系上有几个约束及杆子

有几个自由度。

(b) 试用变量 θ、φ 及其对时间的导数写出拉格朗日方程。

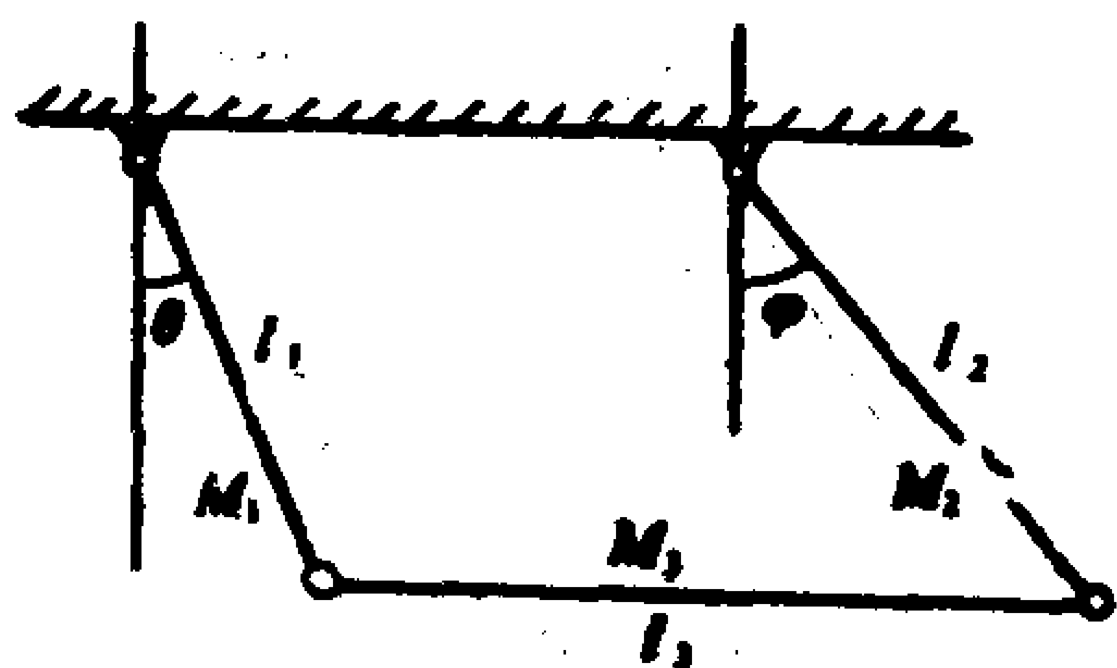
4-106 长度分别为l_1，l_2，l_3，质量分别为M_1，M_2，M_3的三根均质细杆连在一起且能在铅垂平面内运动，如图所示：

(a) 这些杆子的末端在笛卡儿坐标系上的约束力是什么？

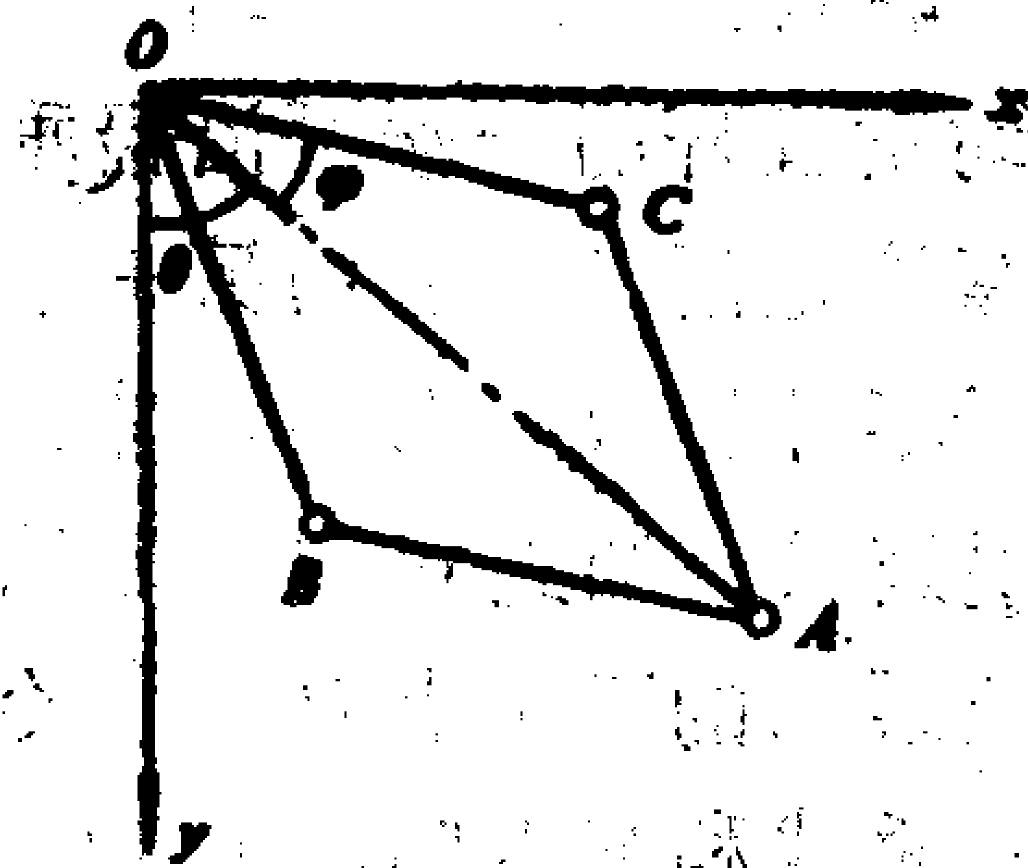
(b) 把角θ和φ作为广义坐标，是否正确？

(c) 写出拉格朗日方程。

4-107 四根相同的均质杆铰接在一起构成一个菱形，如图所示。这个菱形限制在铅垂面内运动，菱形的一个角被铰接在固定点O上，所有的铰链都略去摩擦。除了重力以外，O点和A点之间有吸引力，它与距离$\overline{OA}$成正比。将该力写成$(Mg/kl)\overline{OA}$，其中M是一根杆子的质量，l是杆的长度，k是常数。试利用角θ和φ写出系统的运动方程。



题4-106图



题4-107图

4-108 质量为m的自由质点在力F

$$F = x_0 i + y_0 j + z_0 k$$

的作用下在三维空间运动。其中 x_0，y_0，z_0 是常量。用广义坐标ξ，η，ζ写出拉格朗日运动方程，该坐标与笛卡儿坐标之间有关系式

$$x=l\cosh\xi\cos\eta,\ y=l\sinh\xi\sin\eta,\ z=\zeta$$

试说明为什么把ξ，η和ζ称为椭圜圆柱坐标，并用ξ，η和ζ计算弧长ds。分别用Θ H和Z表示广义力分量。

4-109 试用双轴柱面坐标回答题4-108中的问题。

$$x=\frac{l\sinh\xi}{\cosh\xi+\cos\eta},\quad y=\frac{l\sin\eta}{\cosh\xi+\cos\eta},\quad z=\zeta$$

4-110 试用抛物柱面坐标回答题4-108中的问题。

$$x=l(\xi^2-\eta^2),\ y=2l\xi\eta,\ z=\zeta$$

4-111 在三维空间运动的一质点，通过一不计质量的线性弹簧连接到一光滑的垂直杆上，弹簧能在杆上滑动，试用笛卡儿坐标和广义坐标，写出点的运动方程。

4-112 一质点在光滑的回转表面上运动。不用乘子写出笛卡儿坐标系和柱坐标系中的拉格朗日方程。并证明后者是由前者通过笛卡儿坐标系向柱坐标系的变换式得来的。

4-113 一圜槽呈抛物线形，它的顶端向下，现有一质点在槽内运动，不计摩擦。试用合适的广义坐标导出拉格朗日方程。

4-114 令四维空间的笛卡儿坐标为w，x，y，z，一单位质量的质点在有势力的作用下在半径为R的四维球面上运动，$w^2+x^2=\text{const}$势能在柱面上保持常量。设θ、φ和ψ与w，x，y和z间的关系式如下：

$$w=R\cos\theta\cos\varphi,\ x=R\cos\theta\sin\varphi$$
$$y=R\sin\theta\cos\psi,\ z=R\sin\theta\sin\psi$$

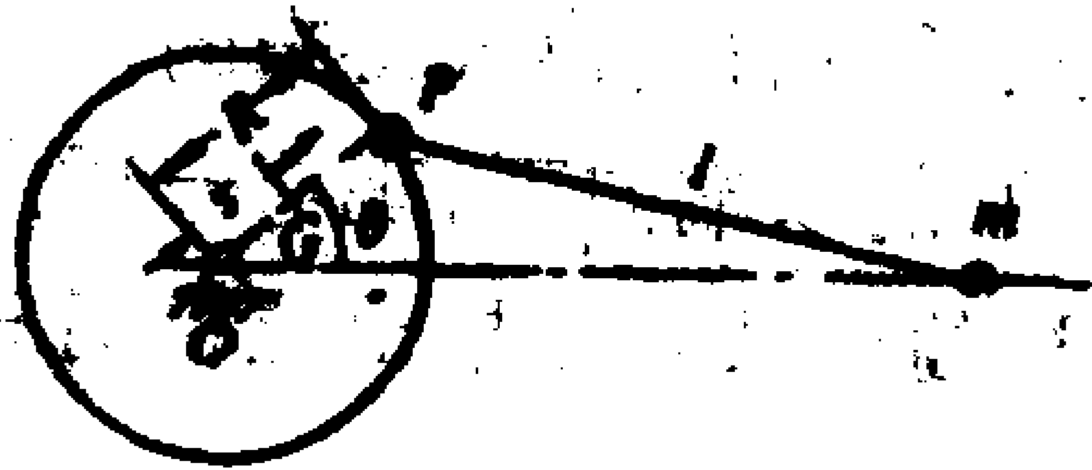
试证明θ、φ和ψ是合适的广义坐标，并用θ、φ和ψ写出拉格

朗日方程。

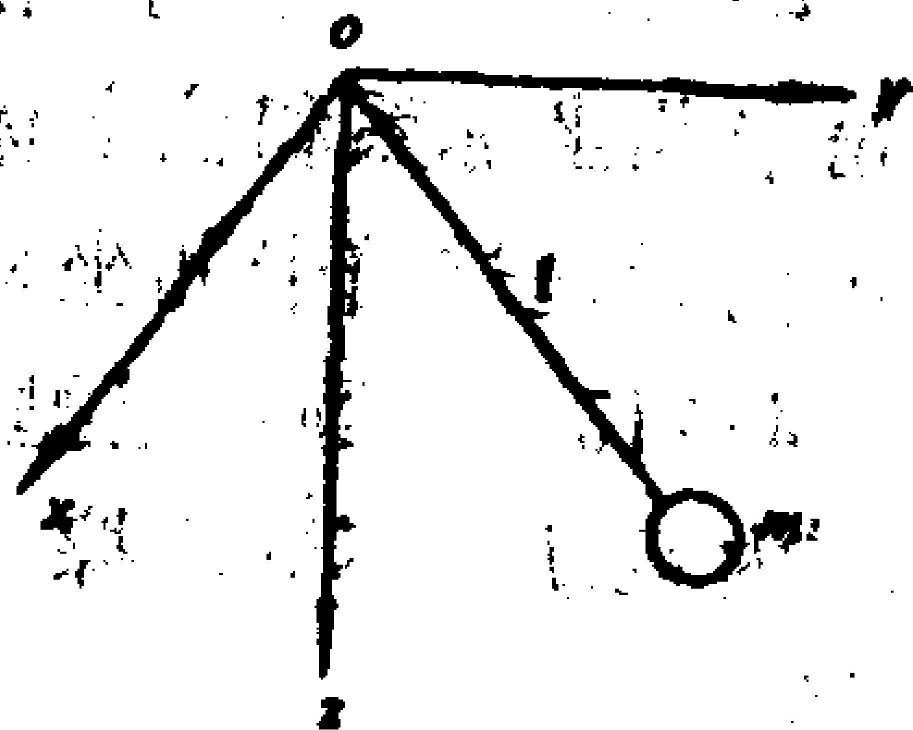
4-115 一偏心圆盘可以绕固定在O点的光滑的水平轴旋转。令它对旋转轴的转动惯量为I，它的质心离旋转轴距离为s，长为l的无质量的连杆光滑地铰接在圆盘的P点，P点离旋转轴距离为R，连杆的另一端连接限制在光滑水平面上运动的质点m，如图所示。O，G和P位于一直线上。如果作用在系统上只有重力，试确定合适的坐标并写出该系统的拉格朗日方程。

4-116 研究两质点系统在无力作用下的运动，此两质点在一平面上且其间的连线始终通过一固定点。

4-117 图示球面摆，它由质量为m的小球，系在摆长为l不计质量的细绳上，绕支点O摆动而成。现支点O按已知规律$f(t)$沿水平x轴移动。试分析摆的运动。



题4-115图



题4-117图

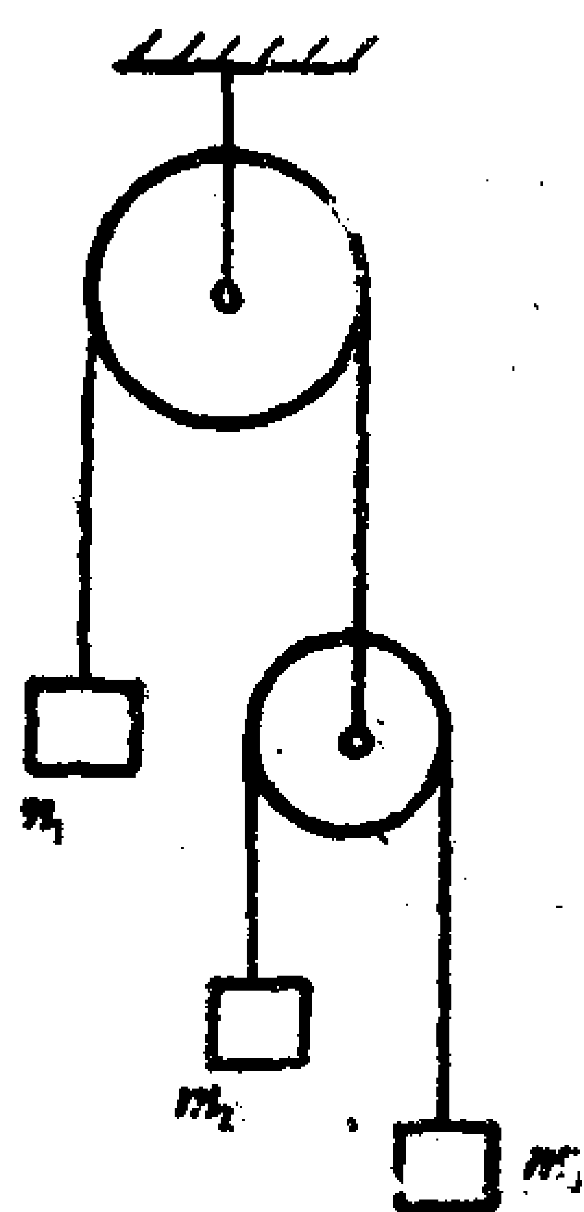
4-118 当支点O按已知规律$f(t)$沿铅垂轴z移动时，试分析上题同样的问题。

4-119 当支点O固定，但摆长按已知规律$f(t)$变化时，试分析上题同样的问题。

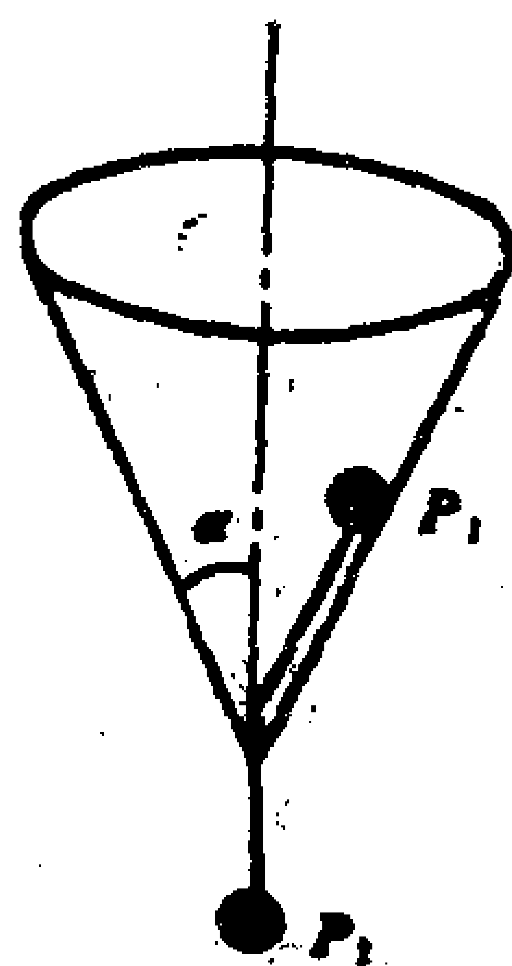
4-120 试研究图示系统中物块的运动。已知三物块的

质量分别为 m_1，m_2，m_3，滑轮和绳索的质量略去不计，绳与轮间无相对滑动。求各物块在重力作用下的加速度。

4-121 质量分别为 m_1 和 m_2 的两个质点 P_1 和 P_2 用一长为 l 无质量且不能伸长的细线连接起来。P_1 限制在倒置的圆锥体光滑的内表面上运动，P_2 限制在铅垂线上移动(细线穿过圆锥体顶端的光滑小孔，如图示)。试分析系统的运动，它存在能量积分与动量积分。



题4-120图

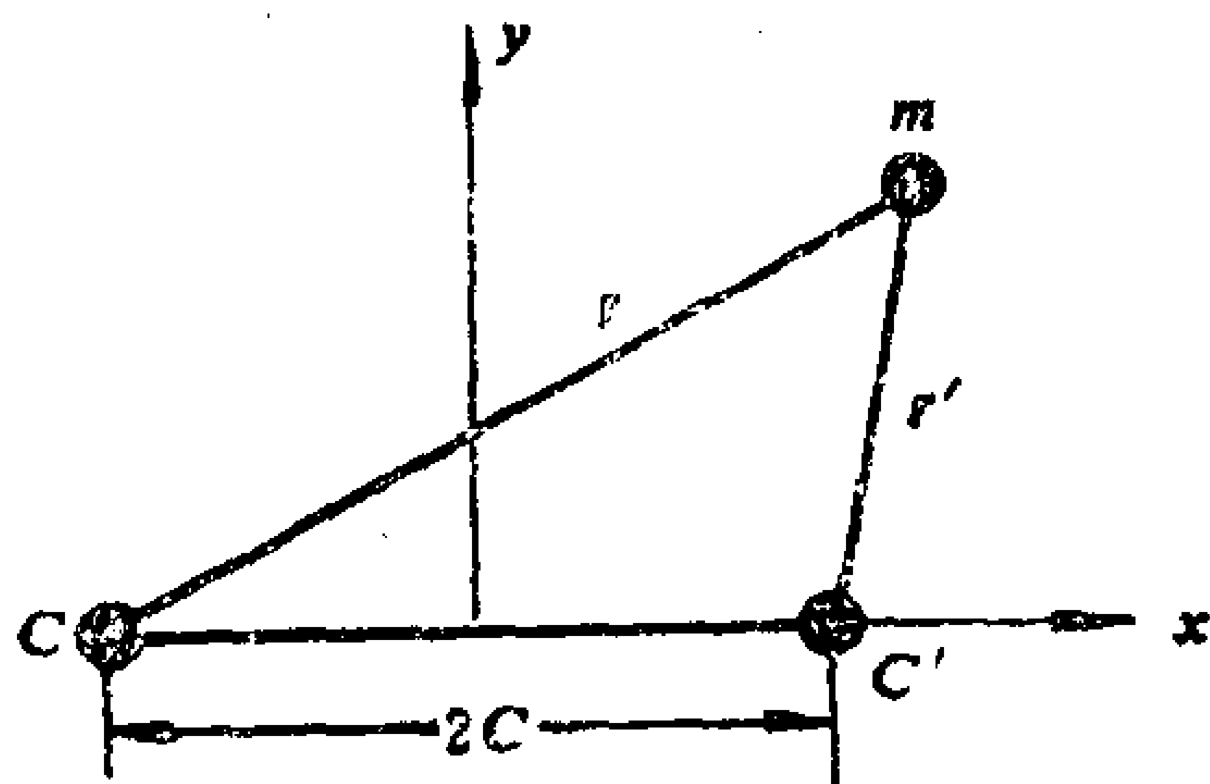


题4-121图

4-122 对存在运动积分的情况下，当质点除受重力外，还受到相互间作用的牛顿引力时，试分析上题系统的运动。

4-123 质点 m 受两个固定中心力所吸引，引力的大小与质点到中心的距离平方成反比。令这两个力的中心相隔 $2c$，x 轴与它们的连线重合。坐标原点取在连线的中点。如图所示。假设运动发生在由质点位置 (x, y) 和力的中心确定的平面内，且质点到力的中心的距离分别为 r 和 r'，如图示。

势能为$A/r+A'/r'$，其中A和A'是正的常数，动能为$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$。试证明该系统用坐标$q_1=\frac{1}{2}(r+r')$和$q_2=\frac{1}{2}(r-r')$表示是刘维尔(*Liouville*)系统。



题4-123图

4-124 一均质杆限制在铅垂面内运动，其一端限制在水平线上移动，致使它离此线上固定点的距离是一确定的函数$f(t)$。试讨论系统有积分存在。

4-125 在三维空间内，$N/3$个质点的系统中的每一个质点都与其它各质点用弹簧(线性或非线性)相连，而且它们相互间都受到牛顿引力的作用，试证明通过求积分可找到7个运动积分和3个附加积分。

4-126 试分析题4-125存在运动积分，并将求全解简化为求积分。

4-127 试分析在x_1，x_2，x_3空间中无约束的$n=\frac{N}{3}$质点系统。令作用在第k个质点上的已知力X_i^k的x_i分量仅为x_i^k的函数，其中x_i^k是第k个质点位置的坐标分量x_i。证明此问题的解可以简化为求积分。

4-128　将上题的结果用于下列情况：$n=3$，$m_1=m_2=m_3=1$，$x_i^k=(x_i^k)^m$，m为奇整数。

4-129　质点m在oxy平面内在无力作用的情况下沿一椭圆线$x=l\cosh\xi\cos\eta$，$y=l\sinh\xi\sin\eta$滑动，其中l为常量，ξ，η为椭圆坐标。试讨论其运动。

4-130　在上题中考虑质点重量时，试讨论同样的问题。

4-131　系统运动取决于拉格朗日函数L

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i\dot{q}_i{}^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i+\dot{q}_it}{\cos^2q_it}$$

$$(a_i=\text{const})$$

求系统的运动。

4-132　系统运动取决于拉格朗日函数L

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mg\left(Z+\frac{\dot{x}}{x}+\frac{\dot{y}}{y}\right)$$

求系统的运动。

4-133　质量为m的点在势为$\Pi(x,\ y,\ z)$的力场中运运。求点的拉格朗日函数，建立点在下列坐标系中的运动微分方程

1）柱坐标

2）球坐标

3）抛物线坐标u，v，φ：

$X=\sqrt{uv}\cos\varphi$，$Y=\sqrt{uv}\sin\varphi$，$Z=(u-v)/2$。

答：1)　$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-\Pi(r\cos\varphi,$

$r\sin\varphi,\ z)$；

2)　$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)-$

$-\Pi(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$；

3) $L=\dfrac{m}{8uv}[(v\dot{u}+u\dot{v})^2+uv(\dot{u}-\dot{v})^2+$

$+4u^2v^2\dot{\varphi}^2]-\Pi(\sqrt{uv}\cos\varphi,\ \sqrt{uv}\sin\varphi,$

$(u-v)/2)$ 。

4-134 一质点在势为$\Pi(x,y)$的力场中作平面运动，求坐标q_1和q_2的拉格朗日函数。坐标q_1和q_2与笛卡尔坐标的关系用等式$x=(q_1-q_2)/2$，$y=\sqrt{q_1q_2}$表达。

答：$L=\dfrac{m}{8q_1q_2}(q_1+q_2)(\dot{q}_1{}^2q_2+\dot{q}_2{}^2q_1)$

$$-\Pi\left(\frac{q_1-q_2}{2},\ \sqrt{q_1q_2}\right)$$

4-135 可以取由质量为m_1和m_2的相互间为弹性联系的两质点所组成的系统，作为两原子分子的模型。两质点的相互作用力$F=-c(r-r_0)$，其中r是两点间的距离，$c=\text{const}$。而r_0相应于弹力等于零的位置。试求拉格朗日函数，建立该系统的运动微分方程，并写出运动积分。

答：$L=\dfrac{m_1+m_2}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$

$$+\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+r^2\dot{\psi}^2\sin^2\varphi)$$

$$-\frac{c}{2}(r-r_0)^2,$$

式中x，y，z是系统质心的坐标，而角φ和ψ(纬度和经度)决定着连结两点的直线方向

4-136 如果方程$Y_i=\varphi_i(Z_i)$（其中$\varphi_i(Z_i)=F'_i(Z_i)$）以函数$Z_i=\psi_i(Y_i)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$作为其解，试

求拉格朗日函数为 $L=\sum_{i=1}^{n} F_i(\dot{q}_i+q_i)$ 的系统的运动。

答：$q_i=q_i^{(0)}e^{-t}+\int_0^t e^{-(t-\tau)}\psi_i[e^{\tau}\varphi_i(q_i^{(0)}+\dot{q}_i^{(0)}\tau)]d\tau \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

4-137 求拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k-\sum_{i=1}^{n} c_i(t)q_i$$

的力学系统的运动，式中 $a_{ik}=a_{ki}$ 是常量。

答：$\boldsymbol{q}=-A^{-1}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} C(\xi)\,d\xi\,d\tau+\dot{\boldsymbol{q}}_0 t+\boldsymbol{q}_0$，

式中 A^{-1} 是矩阵 $A=\|a_{ik}\|_{i,\ k=1}^{n}$ 的逆矩阵。

4-138 求拉格朗日函数

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{d}{2}(\dot{x}y-\dot{y}x)-\frac{1}{2}\rho_1 x^2-\frac{1}{2}\rho_2 y^2$$

所决定的点的运动规律（α，ρ_1，ρ_2 是正的常数）。

答：
$$\begin{Vmatrix} X \\ Y \end{Vmatrix}=C_1\begin{Vmatrix} \sqrt{\rho_2-m\omega_1^2}\cos(\omega_1 t+\alpha_1) \\ -\sqrt{\rho_1-m\omega_1^2}\sin(\omega_1 t+\alpha_1) \end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix} \sqrt{\rho_2-m\omega_2^2}\cos(\omega_2 t+\alpha_2) \\ -\sqrt{\rho_1-m\omega_2^2}\sin(\omega_2 t+\alpha_2) \end{Vmatrix}$$

$$\omega_{1,2}^2=\frac{1}{2m}\left[\left(\rho_1+\rho_2+\frac{\alpha^2}{m}\right)\pm\sqrt{\left(\rho_1+\rho_2+\frac{\alpha^2}{m}\right)^2-4\rho_1\rho_2}\right.$$

4-139 质量为m的重质点可在铅垂面oxz内沿曲线$z=f(x)$做无摩擦运动。试建立拉格朗日方程，并求其首次积分。

答：
$$\ddot{x}\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\dot{x}^2+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g=0$$

4-140 质量为m的重质点可沿光滑椭圆抛物面$Z=ax^2+by^2$($a>0$，$b>0$，轴OZ垂直向上)运动。试建立拉格朗日方程。

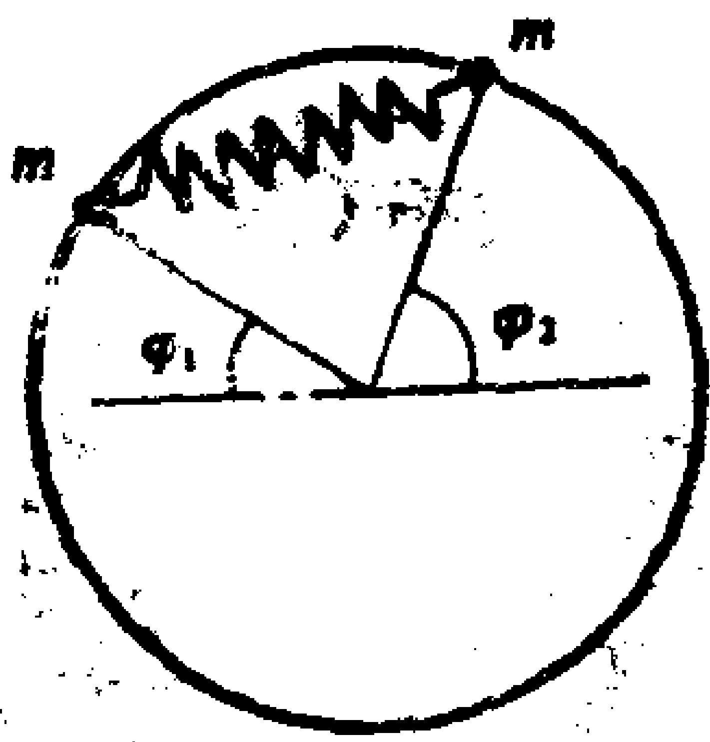
答：
$$(1+4a^2x^2)\ddot{x}+4abxy\ddot{y}+4a^2x\dot{x}^2+4abx\dot{y}^2+2agx=0,$$
$$(1+4b^2y^2)\ddot{y}+4abxy\ddot{x}+4b^2y\dot{y}^2+4aby\dot{x}^2+2bgy=0$$

4-141 两个质量均为m的质点由刚度为c的弹簧联结，可沿水平面内的半径为r的固定环做无摩擦运动。弹簧长度在未变形状态下等于l。试建立拉格朗日方程。利用坐标$\theta_1=\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)$，$\theta_2=\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)$求积分形式的运动规律。

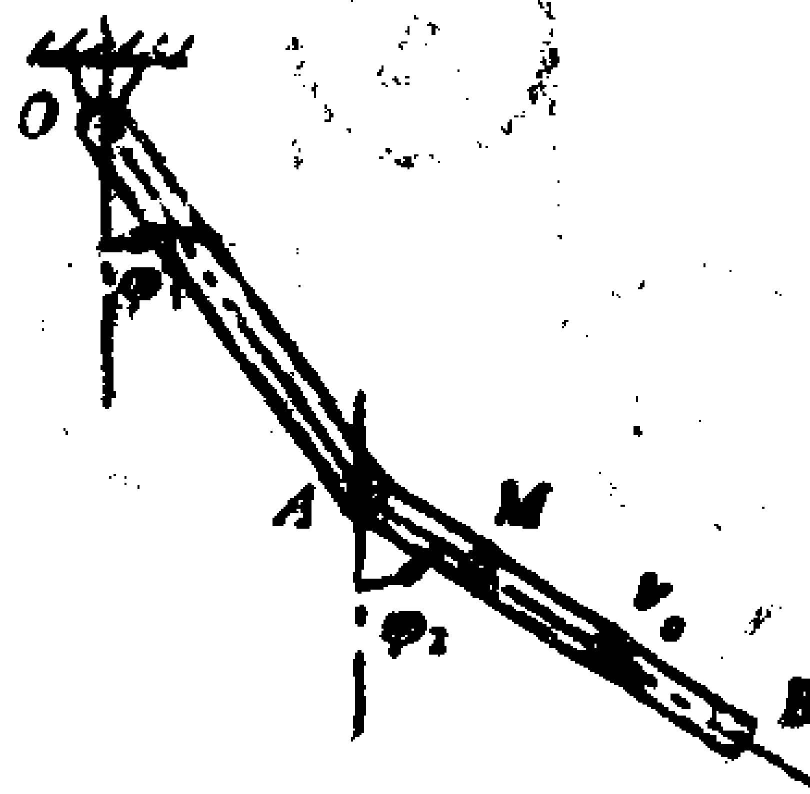
答：
$$L=\frac{mr^2}{2}(\dot{\varphi}_1^2+\dot{\varphi}_2^2)-\frac{c}{2}\left(l-2r\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)^2$$

4-142 质量为m，长度为$2l$的均质杆可自由地沿光滑水平面运动。杆的每一单元都受水平面上一条固定直线(直线Ox)吸引。吸引力与单元的质量和单元距吸引直线的距离成正比(比例系数为k)。试以拉格朗日形式建立杆的运动微分方程。试证杆的中心是按正弦曲线运动。

4-143 如果质量为M的点以相对速度$v_0=\text{const}$沿杆AB移动；在$t=0$时，$AM=0$，试建立描述由两个质量各为m，



题4-141图



题4-143图

长度各为l的均质杆所组成的平面双摆运动的拉格朗日方程。

答：$L=\frac{ml^2}{6}[4\dot{\varphi}_1^2+\dot{\varphi}_2^2+3\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)]$

$$+\frac{M}{2}[l^2\dot{\varphi}_1^2+v_0^2t^2\dot{\varphi}_2^2+v_0^2+2lv_0t\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$+2lv_0\dot{\varphi}_1\sin(\varphi_2-\varphi_1)]+\frac{mgl}{2}(3\cos\varphi_1+\cos\varphi_2)$$

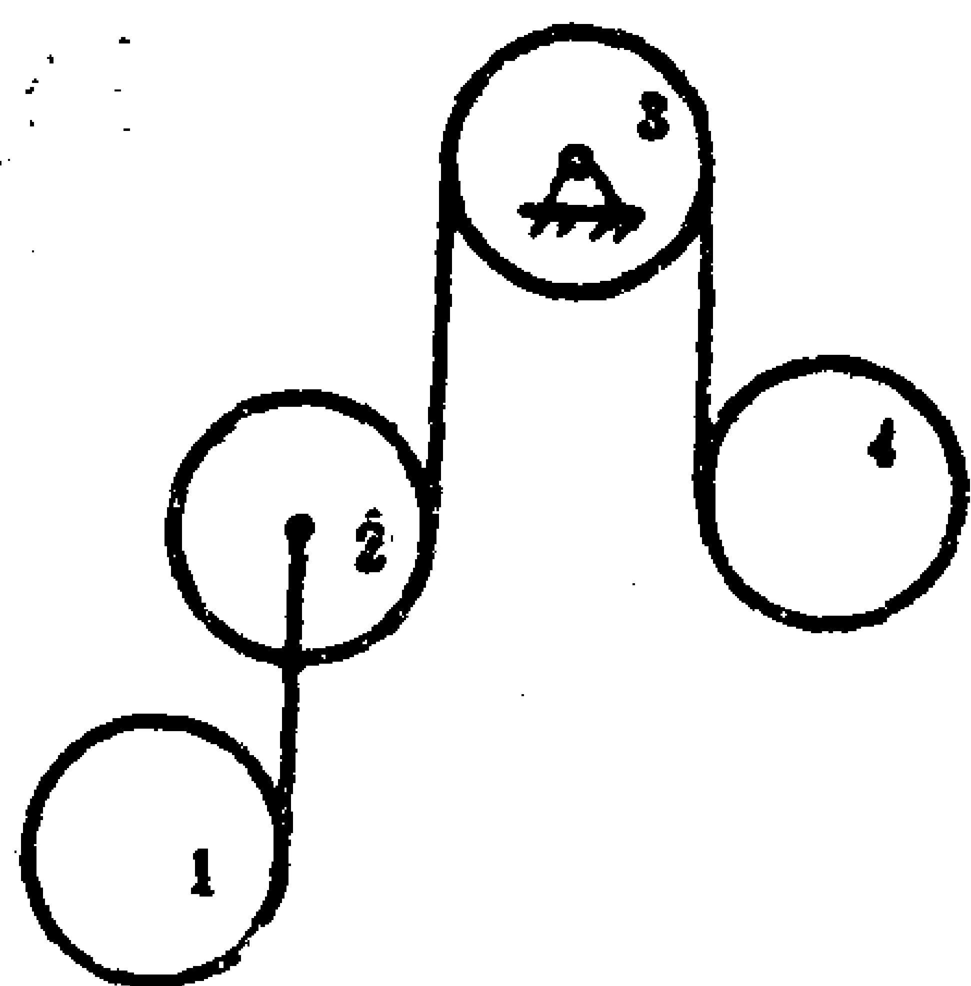
$$+mg(l\cos\varphi_1+v_0t\cos\varphi_2)$$

4-144 试用拉格朗日方程求四个相同的半径为r的均质圆柱运动，如图所示。圆柱之间用不可伸长而无重量的绳子联结。绳在圆柱上不滑动，圆柱1、2、4的中心沿铅垂线移动。

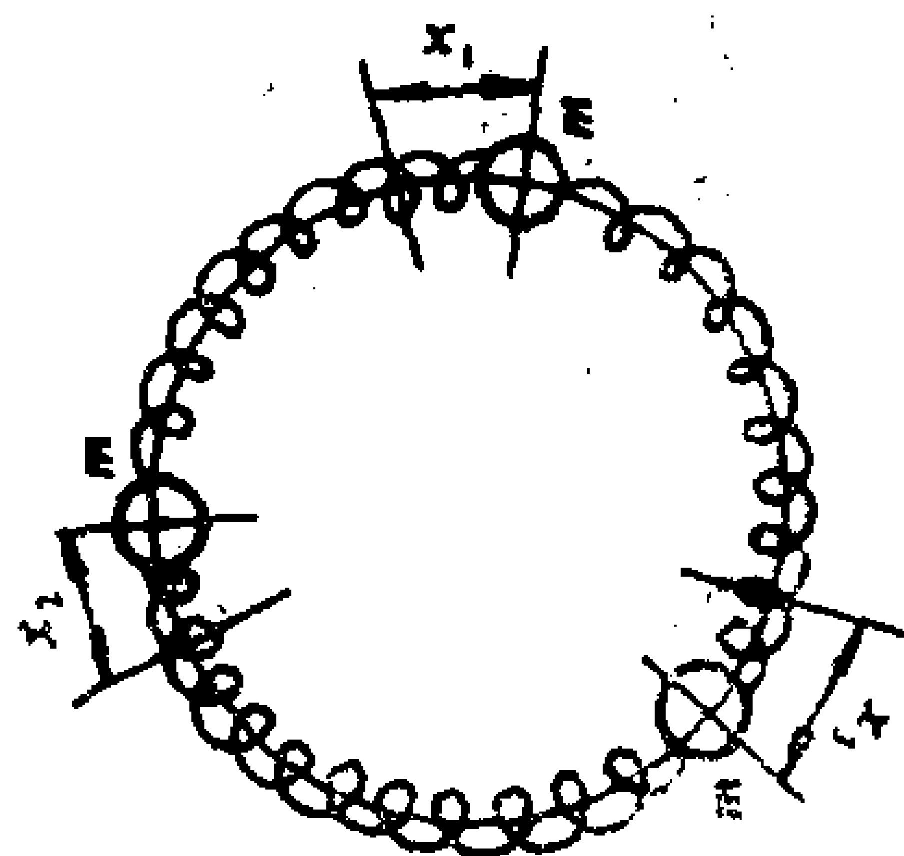
答：圆柱1、2和4的质心以匀加速度

$w_1=\frac{72}{79}g$，$w_2=\frac{58}{79}g$，$w_4=\frac{52}{79}g$运动；

圆柱O_3的角加速度是$\varepsilon_3=\frac{2}{79}\frac{g}{r}$



题4-144图



题4-145图

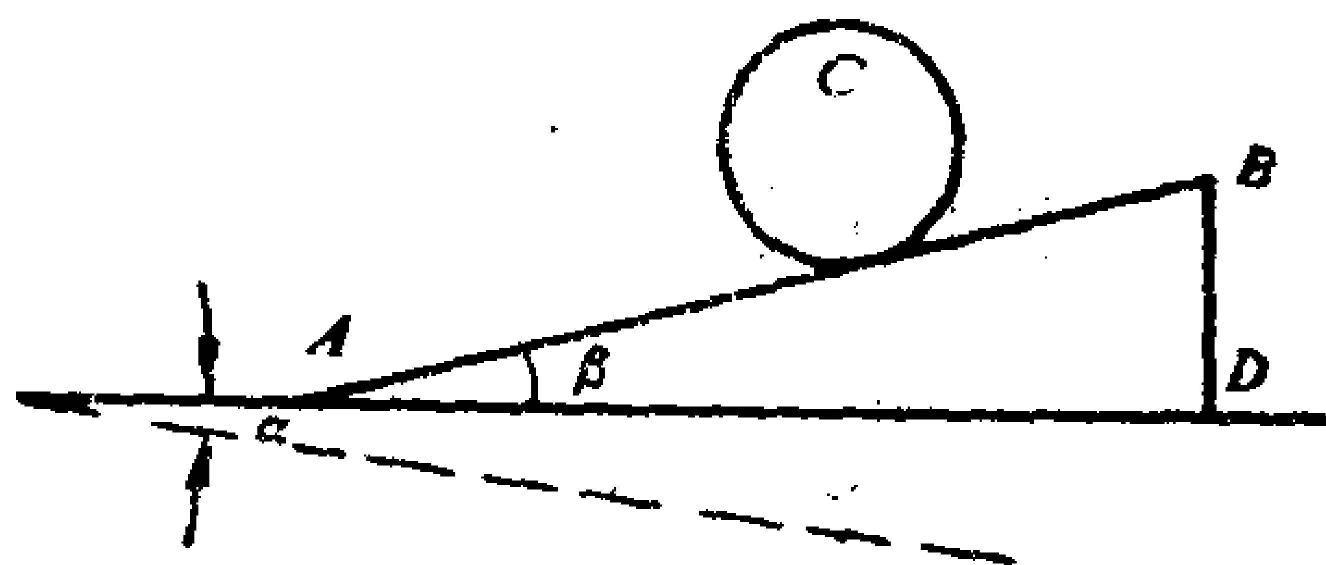
4-145 质量皆为m的三个质点，用弹性系数为k的三根相同的弹簧沿固定水平圆环相连结如图示。试求质点沿圆环运动的微分方程。

答：$m\ddot{x}_1+k(2x_1-x_2-x_3)=0$

$m\ddot{x}_2+k(-x_1+2x_2-x_3)=0$

$m\ddot{x}_3+k(-x_1-x_2+2x_3)=0$

4-146 质量为M的三棱柱ABD沿光滑斜面滑动，斜面与水平面成α角；$\angle BAD=\beta$。沿棱柱AB面有质量为m的均质圆柱在无滑动地向下滚动。试利用拉格朗日方程求棱柱的加速度W和圆柱中心相对棱柱的加速度W_C。



题4-146图

答：$W=\dfrac{2m\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-3(M+m)\sin\alpha}{3M+m(3-2\cos^2\beta)}g$

$$W_c=\frac{2(M+m)\sin\beta\cos\alpha}{3M+m(3-2\cos^2\beta)}g$$

4-147 一光滑细管可在竖直平面内绕通过其一端的水平轴以匀角速ω转动。管中有一质量为m的质点。开始时，细管取水平方向，质点距转动轴的距离为a，质点相对于管的速度为v_0，试由拉格朗日方程求质点相对于管的运动规律。

答：$x=\left[\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{v_0}{\omega}\right)-\dfrac{g}{4\omega^2}\right]e^{\omega t}+\left[\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{v_0}{\omega}\right)\right.$

$$\left.+\frac{g}{4\omega^2}\right]e^{-\omega t}+\frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t \quad \text{（取管轴为}x\text{轴）}$$

4-148 质量为M的木块用两根刚度为C的相同弹簧与固定墙联结，并沿水平导板无摩擦地滑动。质量为m的重物用长度为l的不可伸长的绳子悬挂在木块中心上。试以拉格朗日方程形式建立系统的运动微分方程。

答：$(M+m)\ddot{x}+ml\ddot{\varphi}\cos\varphi-ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi+2cx=0$

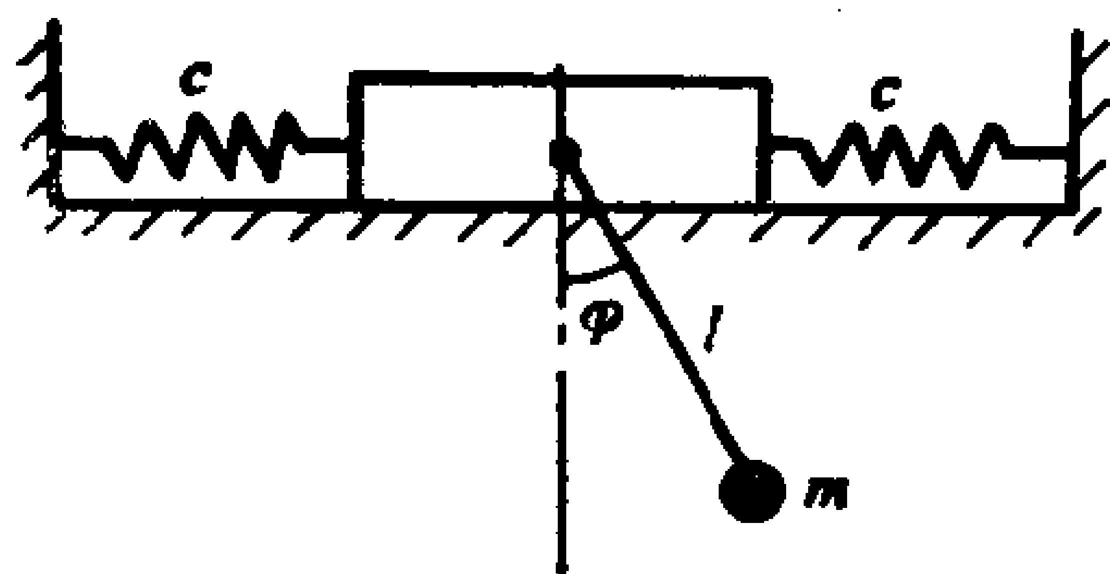
$$l\ddot{\varphi}+\ddot{x}\cos\varphi+g\sin\varphi=0$$

4-149 质量为M的木板无摩擦地在水平导板上滑动。质量为m的重物用刚度为c的弹性绳子悬挂在木块中心上（绳在未张紧状态下的长度为l_0）。试以拉格朗日方程形式建立系统的运动微分方程。

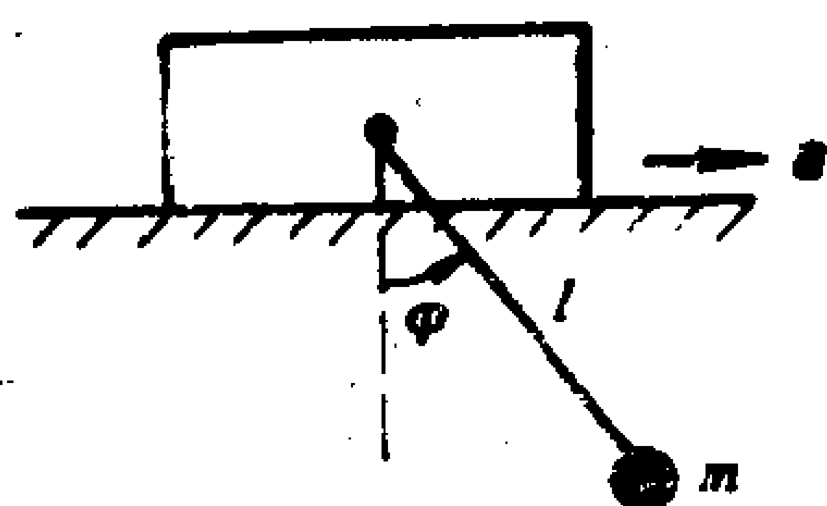
答：$(m+M)\dot{x}+m(\dot{l}\sin\varphi+l\dot{\varphi}\cos\varphi)=\text{const}$

$$l\ddot{\varphi}+\ddot{x}\cos\varphi+2\dot{l}\dot{\varphi}+g\sin\varphi=0$$

$$m\ddot{l}+m\ddot{x}\sin\varphi-ml\dot{\varphi}^2-mg\cos\varphi+c(l-l_0)=0$$



题4-148图



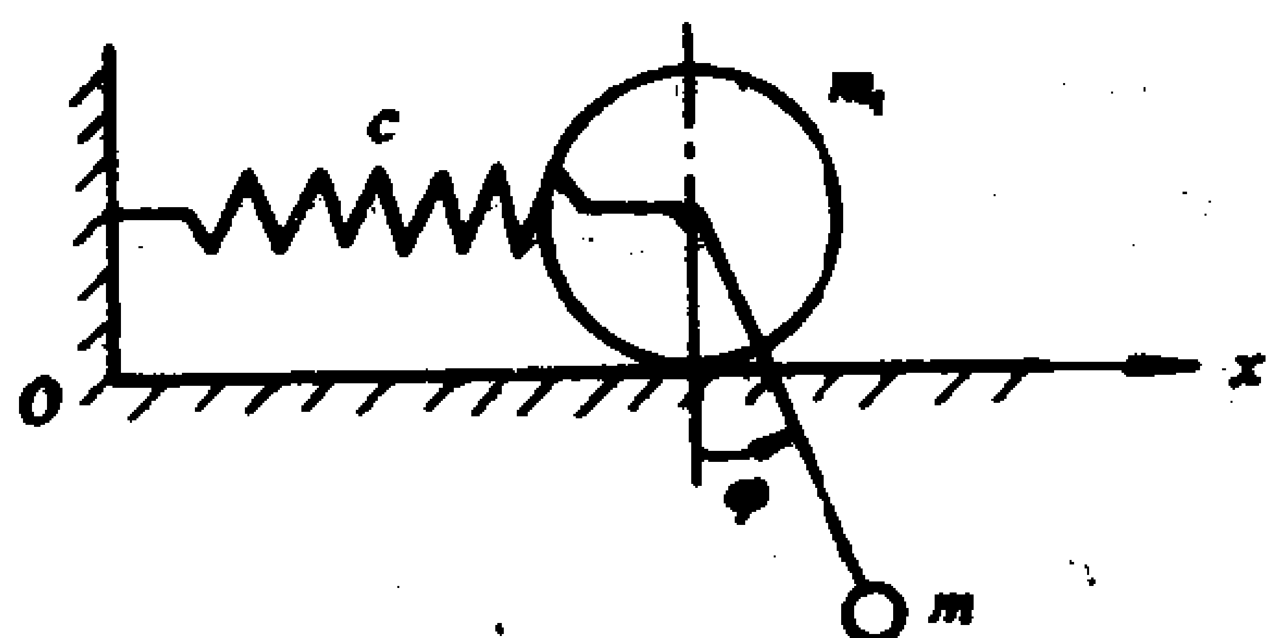
题4-149图

4-150 试建立质量为m，长度为l的摆的运动微分方程。该摆的悬挂点位于半径为r质量为m_1的圆盘中心。圆盘可无滑动地在水平直线OX上滚动，其中心用刚度为c的弹簧与固定墙联结。

答：$(3m_1+2m)\ddot{x}+2ml\ddot{\varphi}\cos\varphi$

$$-2ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi+2cx=0$$

$$l\ddot{\varphi}+\ddot{x}\cos\varphi+g\sin\varphi=0$$



题4-150图

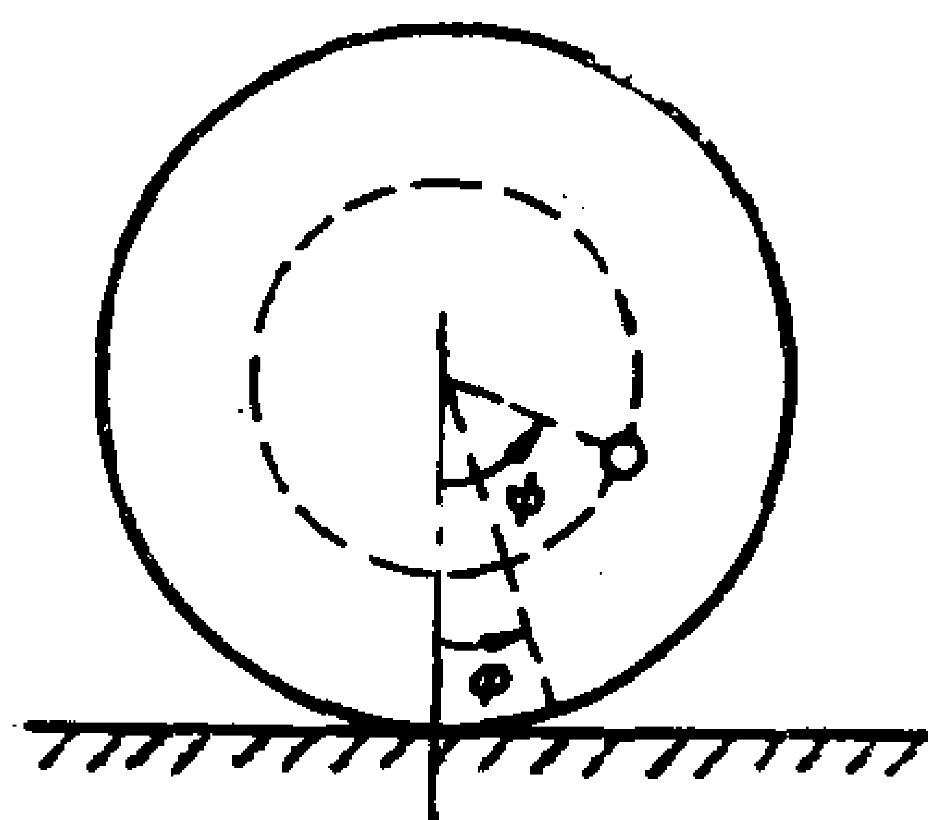
4-151 质量为M半径为R的均质圆盘无滑动地沿水平直线滚动。圆盘内有半径为r的光滑圆槽，其中心与圆盘中心重合。槽内有质量为m的球在运动。不计球的大小，建立系统的拉格朗日方程并求运动积分。

答：$\left(\frac{3}{2}M+m\right)R\ddot{\varphi}-mr\ddot{\psi}\cos\psi+m\dot{\psi}^2\sin\psi=0$

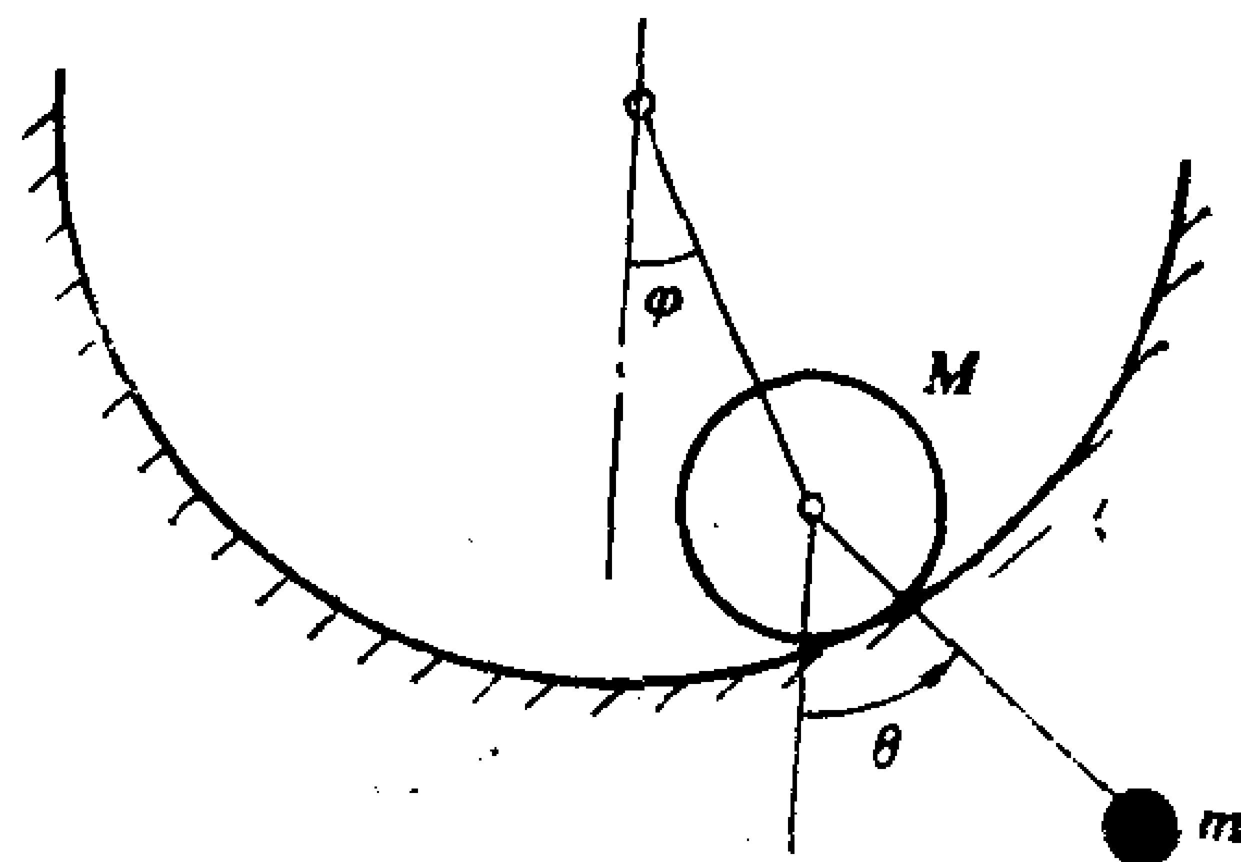
$$r\ddot{\psi}-r\ddot{\varphi}\cos\psi+g\sin\psi=0$$

4-152 质量为M半径为r的均质圆柱可无滑动地在半径为R的固定空心圆柱内滚动。在活动的圆柱中心上悬挂质量为m长度为l的数学摆。试以拉格朗日方程形式建立运动微分方程。

答：$(3M+2m)(R-r)\ddot{\varphi}+2ml\ddot{\theta}\cos(\theta-\varphi)$
$-2ml\dot{\theta}^2\sin(\theta-\varphi)+2(M+m)g\sin\varphi=0$



题4-151图



题4-152图

$$l\ddot{\theta}+(R-r)\ddot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)+(R-r)\dot{\varphi}^2$$
$$\sin(\theta-\varphi)+g\sin\theta=0$$

4-153 半径为R质量为m的均质圆盘，中心处成直角地插在无重量的光滑杆上，杆的一端O用球铰链固定。圆盘可沿着杆做平行移动。圆盘中心用刚度为c的弹簧与O点联结，弹簧长度在未变形状态下等于l_0。试以拉格朗日方程形式建立圆盘运动微分方程。

答：$L=\frac{m}{2}[\dot{x}^2+x^2(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta)]+$

$+\frac{mR^2}{4}\left[\frac{1}{2}(\dot{\psi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})^2\right]$

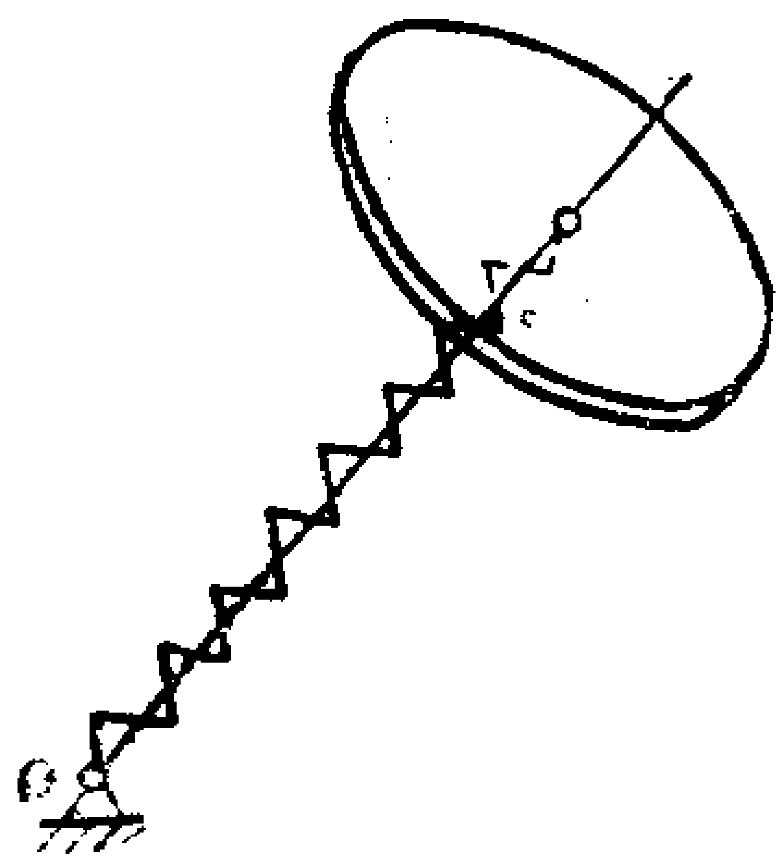
$$-mgx\cos\theta-\frac{C}{2}(x-l_0)^2,$$

式中x是圆盘中心距点O的距离

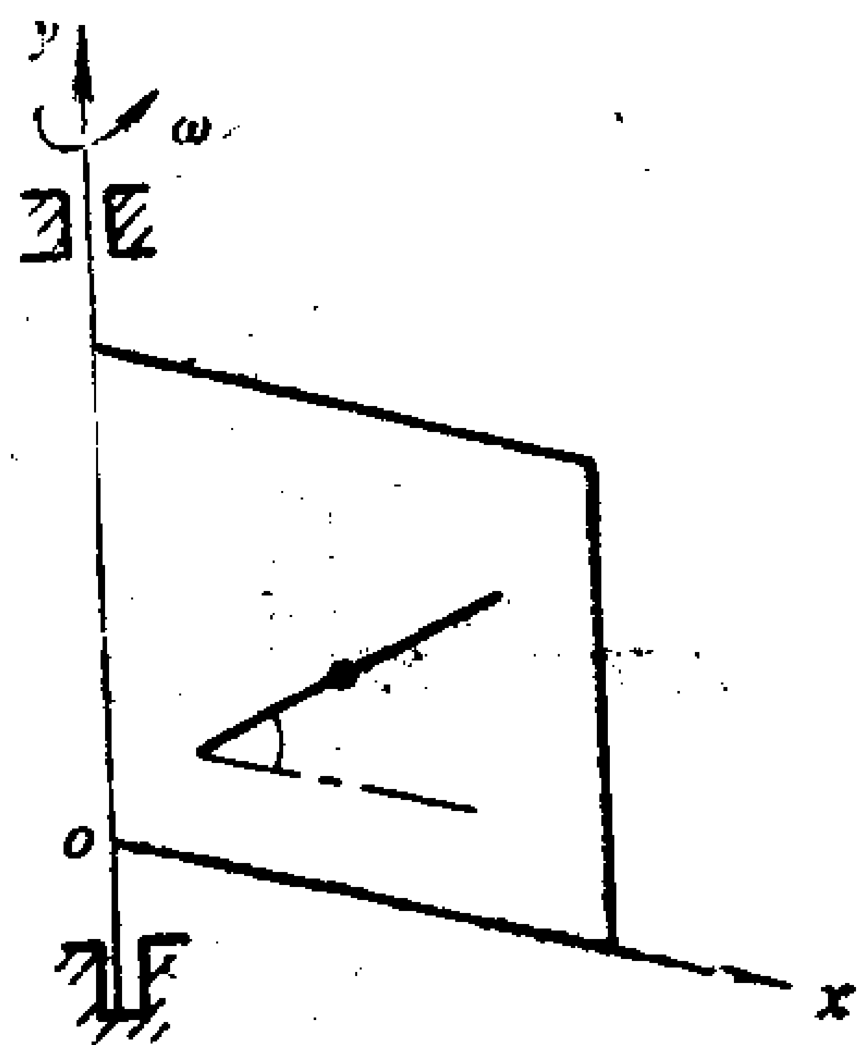
4-154 均质杆可在铅垂平面 oxy 内运动，平面以角速度 $\omega=\omega(t)$，绕铅垂轴 oy 转动。试以拉格朗日方程形式建立杆的相对运动微分方程。

答：$\ddot{x}-\omega^2(t)x=0$，　$\ddot{y}+g=0$，

$2\ddot{\varphi}+\omega^2(t)\sin2\varphi=0$



题4-153图



题4-154图

4-155 质量为m的小圆环可沿光滑杆$AB=2l$滑动，杆的两端点A和B与直角AOB的两边固结，而直角AOB以匀角速ω绕其铅垂边OA转动。圆环用两根刚度为c的同样的弹簧与A、B点联结。每根弹簧在未变形状态下的长度等于l，$\angle OAB=\alpha$。试利用拉格朗日方程求圆环的相对运动。

答：当$2c>m\omega^2\sin^2\alpha$时

$$x=a\sin(\sqrt{\lambda}t+\beta)+\frac{1}{\lambda}(g\cos\alpha+\omega^2l\sin^2\alpha)$$

当$2c<m\omega^2\sin^2\alpha$时

$$x = b\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}t + r) + \frac{1}{\lambda}(g\cos\alpha + \omega^2 l\sin^2\alpha),$$

当$2c = m\omega^2\sin^2\alpha$时，

$$x = (g\cos\alpha + \omega^2 l\sin^2\alpha)\frac{t^2}{2} + d_1 t + d_2$$

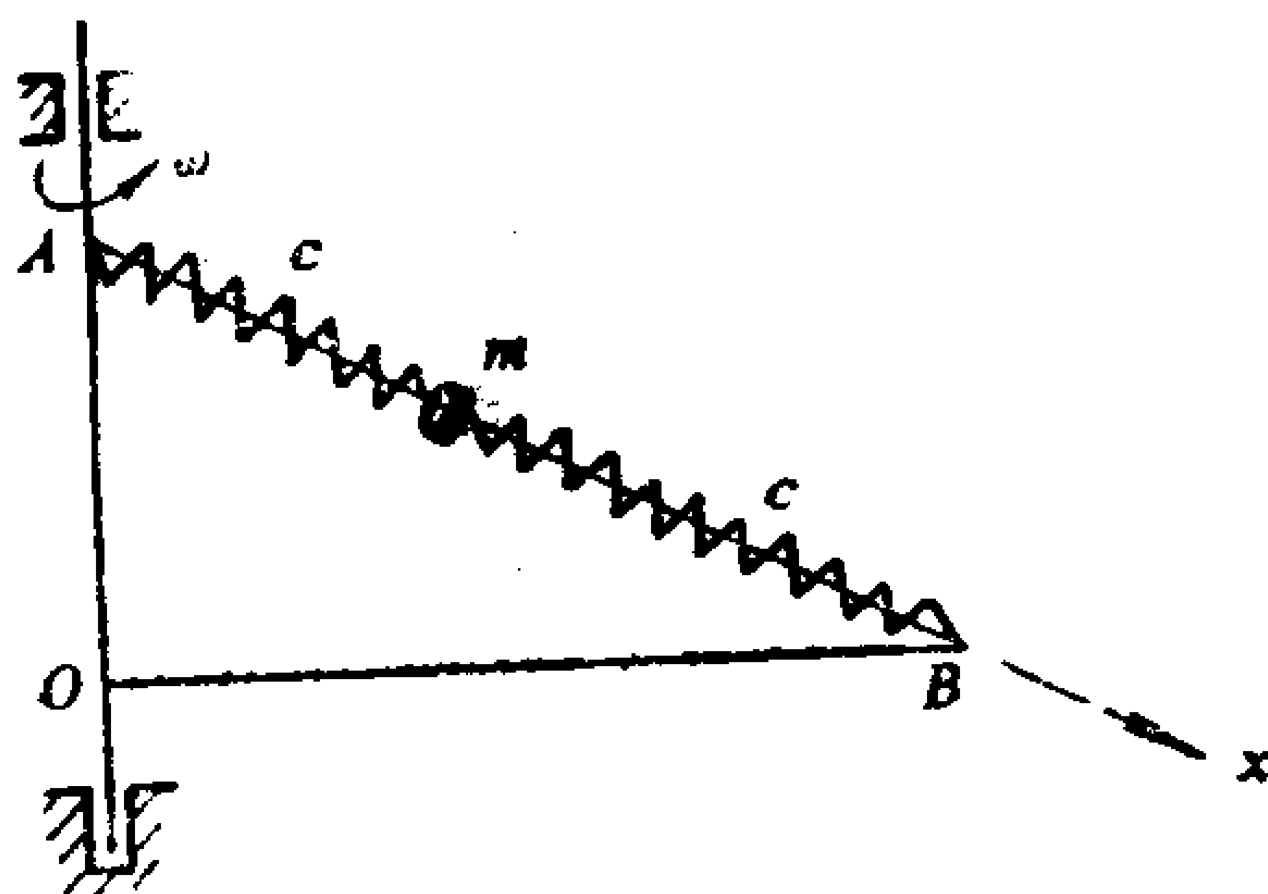
式中a，b，d_1，d_2，β，r是任意常数，而

$$\lambda = |2c/m - \omega^2\sin^2\alpha|$$

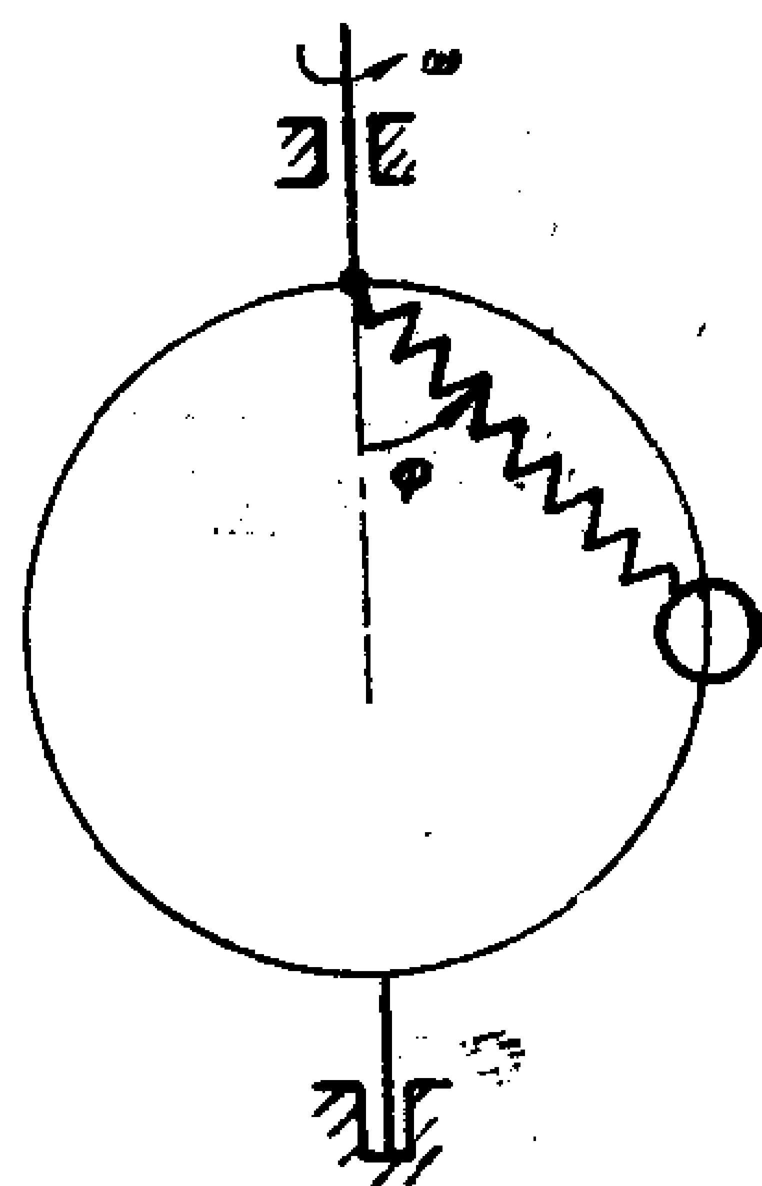
4-156 半径为R的光滑金属线圆环以匀角速度ω绕其铅垂直径转动。环上穿有质量为m的小珠，小珠用刚度为c的弹簧与圆环上的最高点联结，如图所示。假如弹簧在未拉紧状态下的长度为l，试建立小珠的相对运动微分方程。

答：$4mR\ddot{\varphi} - m\omega^2 R\sin 4\varphi + 2mg\sin 2\varphi$

$- 2c\sin\varphi(2R\cos\varphi - l_0) = 0$



题4-155图



题4-156图

4-157 质量为m的球和刚度为c的无重量弹簧在光滑水平管内，管以匀角速度ω绕铅垂轴oz转动，弹簧联结球与轴。开始时球相对于管静止在距oz轴距离为a的地方，弹簧

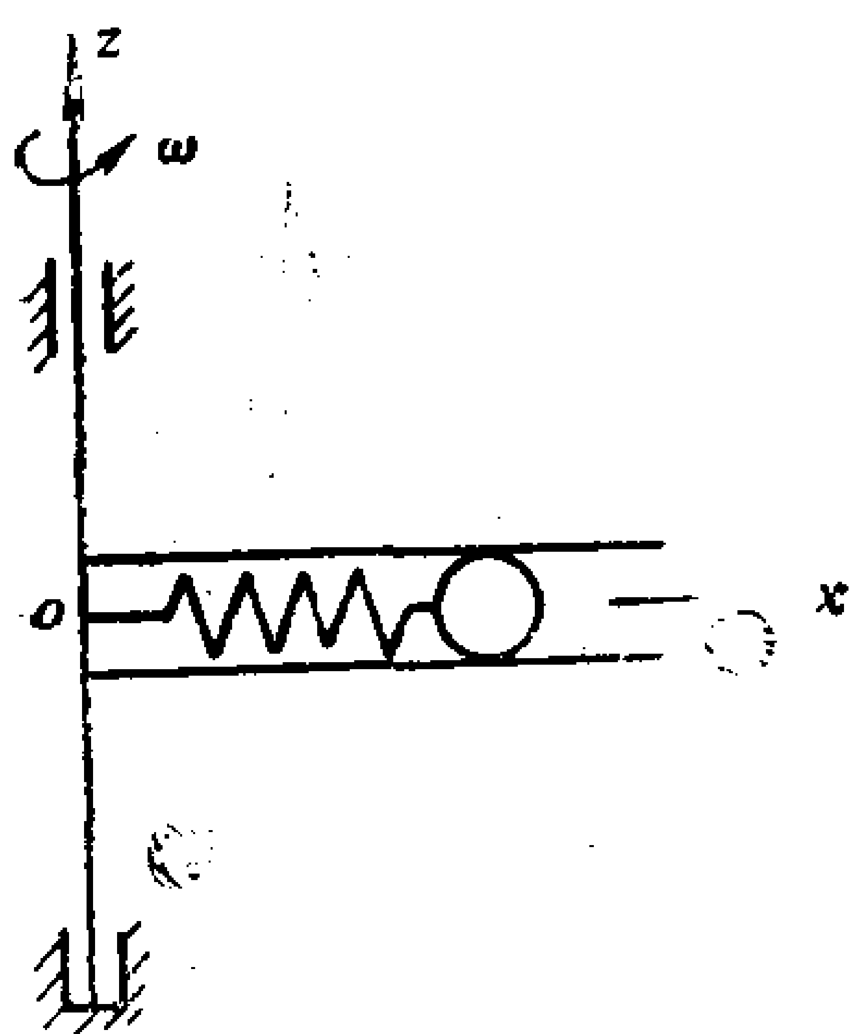
尚未变形。略去球的大小，求做有限运动的ω值，并在这些ω值条件下求球在转动参考系中的微振动。

答：$X=A\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}-\omega^2}\ t+\alpha\right)$，$\omega^2 m<c$

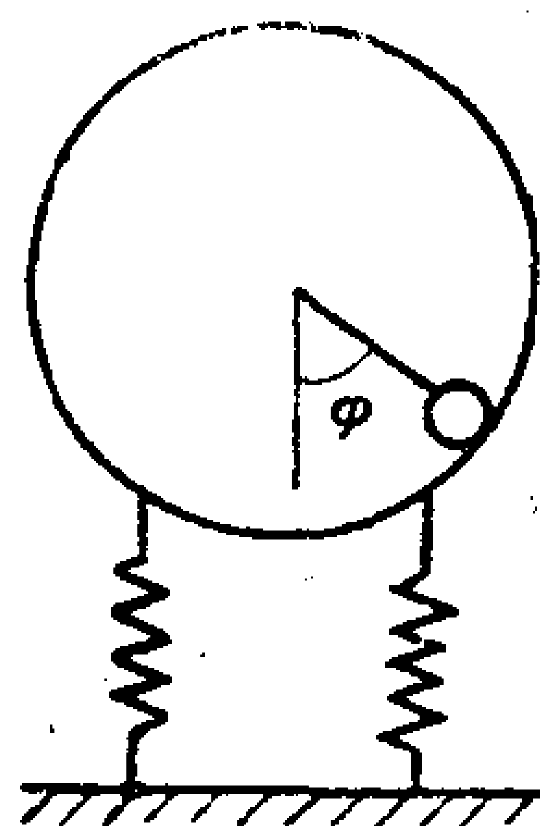
4-158　半径为R质量为M的光滑金属丝圆周，用每个刚度为c的两根同样弹簧与水平固定平面联结，圆周可以沿铅垂线平行移动。在圆周内壁上有质量为m的质点在运动。求系统在稳定平衡位置附近的微振动。

答：$Z=A\sin\left(\sqrt{\frac{2c}{M+m}}t+\alpha\right)$

$$\varphi=B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{r}}\,t+\beta\right)$$



题4-157图



题4-158图

4-159　用刚度为c的弹簧联结的两个质量$m_1=m_2=m$，可沿着半径为R的光滑固定水平圆环运动。未变形状态下的弹簧长度等于$R\sqrt{2}$，求系统的微振动(参看题图4-141)。

答：$\begin{Vmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{Vmatrix}=C_1\begin{Vmatrix}1\\ -1\end{Vmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t+\alpha_1\right)$

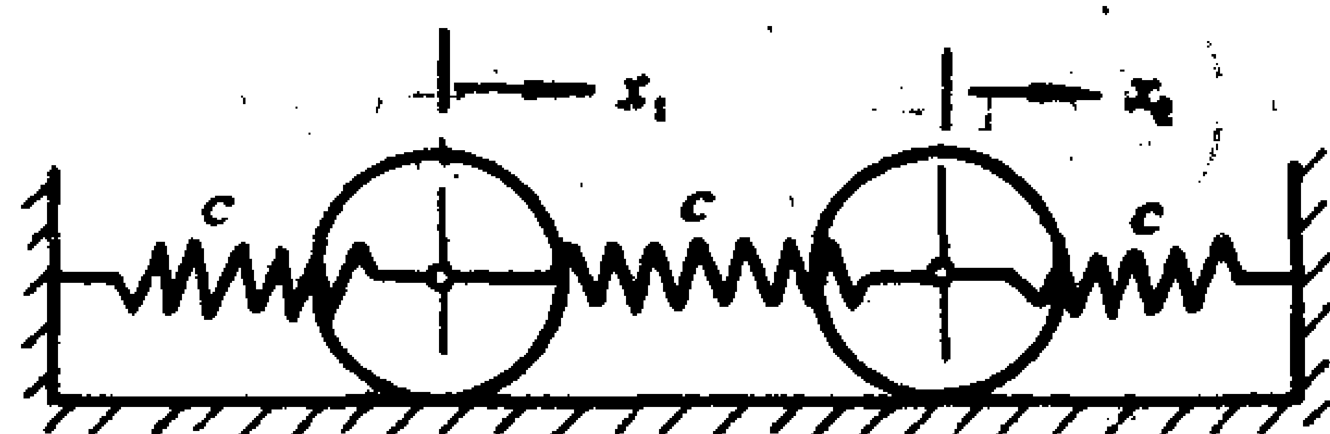
$$+\left\|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\|(C_2t+C_6)$$

4-160　质量各为m的两个相同的均质圆盘沿水平导轨无滑动地滚动。圆盘中心之间以及与固定墙之间均用同样刚度c的弹簧联结。求系统的微振动。

答：$$\left\|\begin{matrix}X_1\\X_2\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\|\left(A_1\cos\sqrt{\frac{2c}{3m}}t+B_1\sin\sqrt{\frac{2c}{3m}}t\right)+\left\|\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right\|\left(A_2\cos\sqrt{\frac{2c}{m}}t+B_2\sin\sqrt{\frac{2c}{m}}t\right),$$

$$A_1=\frac{1}{2}(x_1^0+x_2^0),\ B_1=\frac{1}{2}(\dot{x}_1^0+\dot{x}_2^0)\sqrt{\frac{3m}{2c}},$$

$$A_2=\frac{1}{2}(x_1^0-x_2^0),\ B_2=\frac{1}{2}(\dot{x}_1^0-\dot{x}_2^0)\sqrt{\frac{m}{2c}}.$$



题4-160图

4-161　半径为r质量为$m_1=m$的均质圆盘可以沿水平直线无滑动地滚动，其中心与两固定墙之间用刚度各为c的两根同样弹簧联结，在圆盘中心悬挂有长度为l质量为$m_2=m/2$

的数学摆。假设$cl=mg$，求系统的微振动。

答：$\begin{Vmatrix} X \\ l\varphi \end{Vmatrix} = C_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{2g}{3l}}t+\alpha_1\right)$

$+C_2 \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \end{Vmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{2g}{l}}t+\alpha_2\right)$。

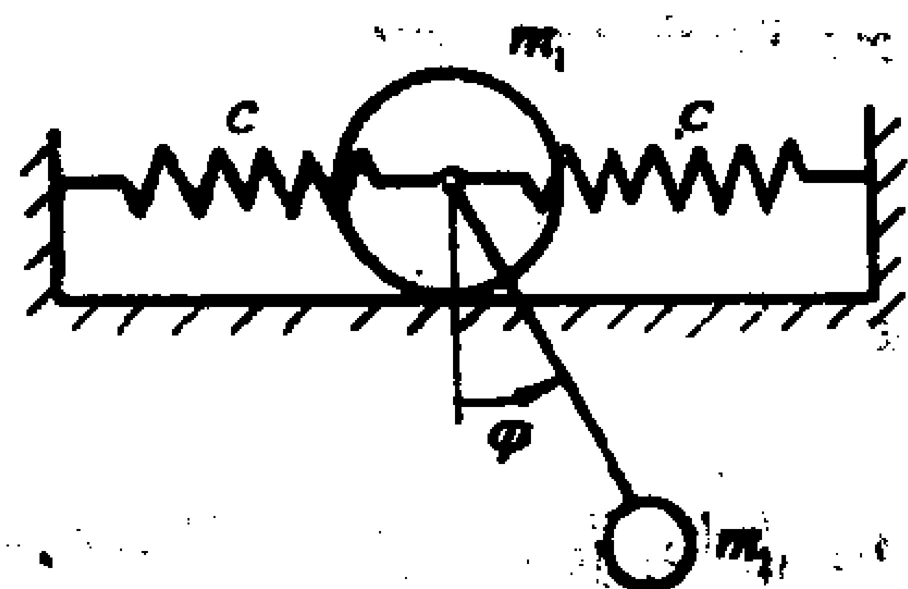
4-162　质量为M长度为$3a$的均质杆可在铅垂平面内绕固定点$O(AO=a)$转动，质量为$m=\frac{3}{4}M$的重物用长度为$l=a$的不可伸长的无重量的绳悬挂在杆的A端。求系统在稳定平衡位置附近的微振动。

答：$\begin{Vmatrix} \varphi \\ \psi \end{Vmatrix} = C_1 \begin{Vmatrix} 6-3\sqrt{3} \\ -12+7\sqrt{3} \end{Vmatrix}$

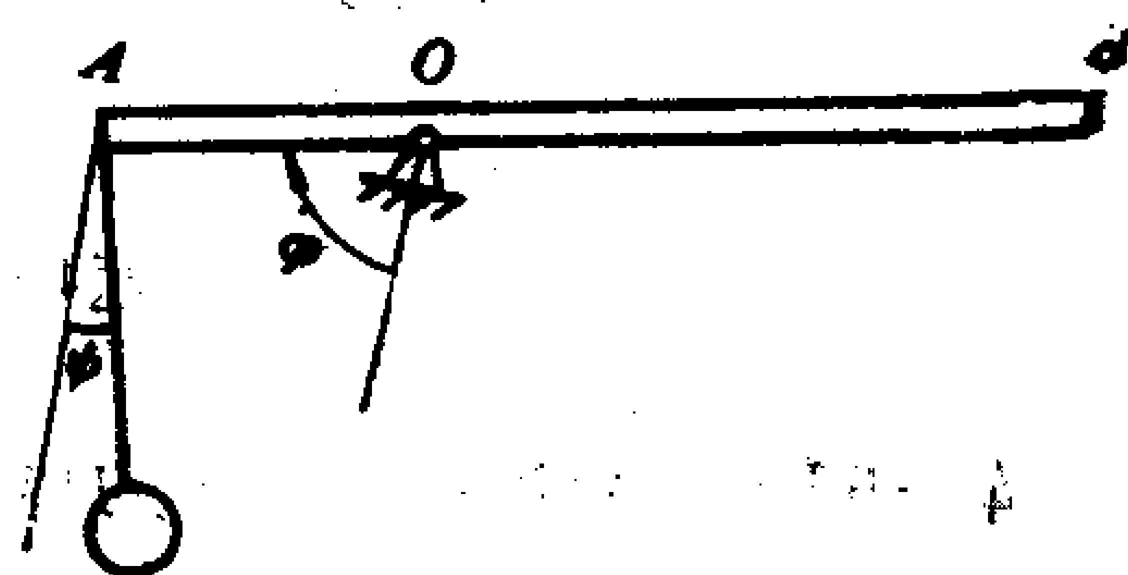
$\times \sin\left(\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{g}{a}}t+\alpha_1\right)+$

$+C_2 \begin{Vmatrix} 6+2\sqrt{3} \\ -12-7\sqrt{3} \end{Vmatrix}$

$\sin\left(\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{g}{a}}t+\alpha_2\right)$



题4-161图

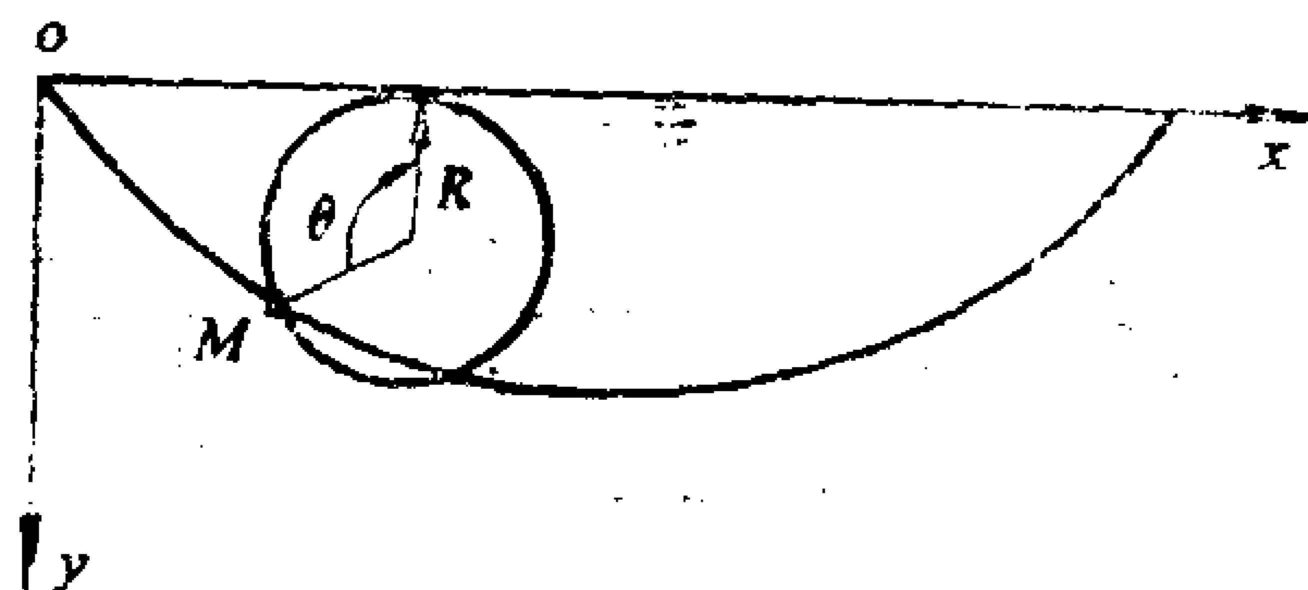


题4-162图

4-163 已知图示曲线为悬轮线，其方程为：

$$x=R(\theta-\sin\theta)$$
$$y=R(1-\cos\theta);$$

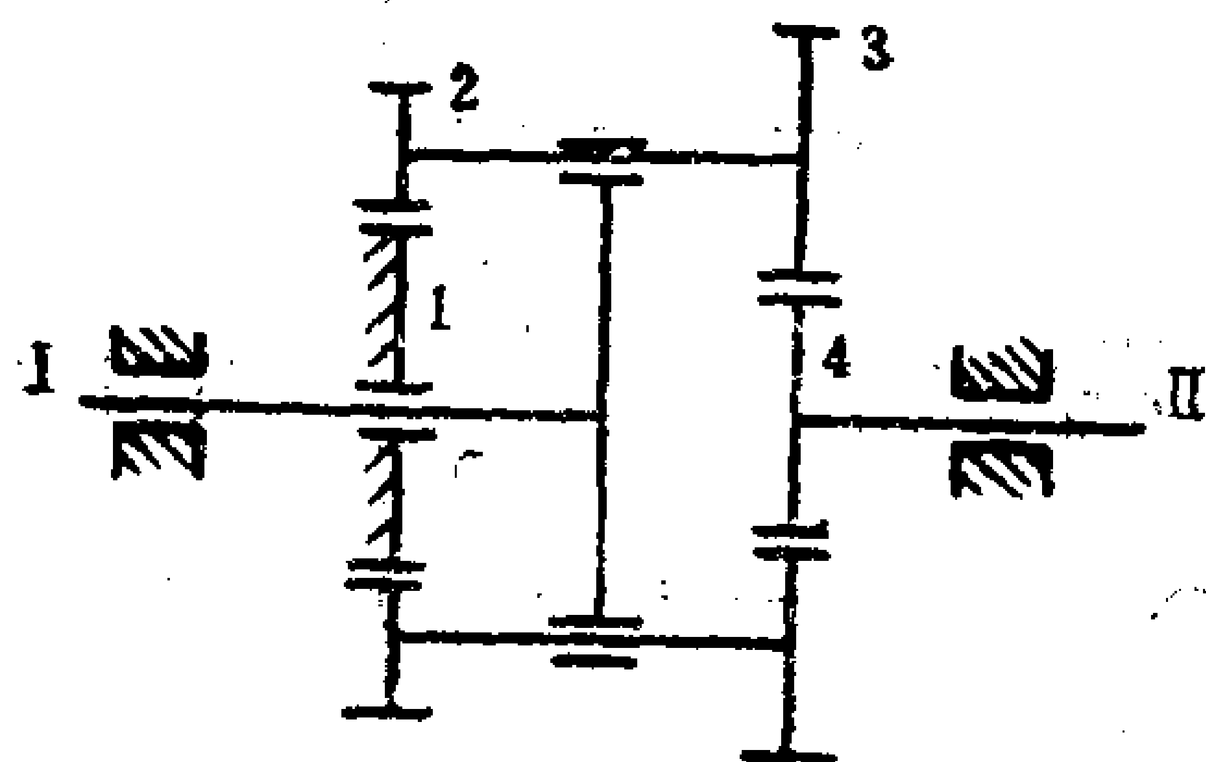
一小环M在重力作用下沿该光滑曲线运动，求小环的运动微分方程。



题4-163图

4-164 在主动轴I上加一力偶，其矩为常量$M_I=170^{N\cdot m}$，在从动轴Ⅱ上加一阻力偶，其矩为常量$M_{II}=90^{N\cdot m}$。试用第二类拉格朗日方程确定主动轴Ⅰ和从动轴Ⅱ的角加速度ε_I和ε_{II}。已知：$r_1=20\text{cm}$，$r_2=5\text{cm}$，$r_3=10\text{cm}$，$r_4=15\text{cm}$，$J_{2-3}=0.8\text{kg}\cdot\text{m}^2$，$J_I=12\text{kg}\cdot\text{m}^2$，$J_{II}=2\text{kg}\cdot\text{m}^2$，$m_{2-3}=45\text{kg}$。

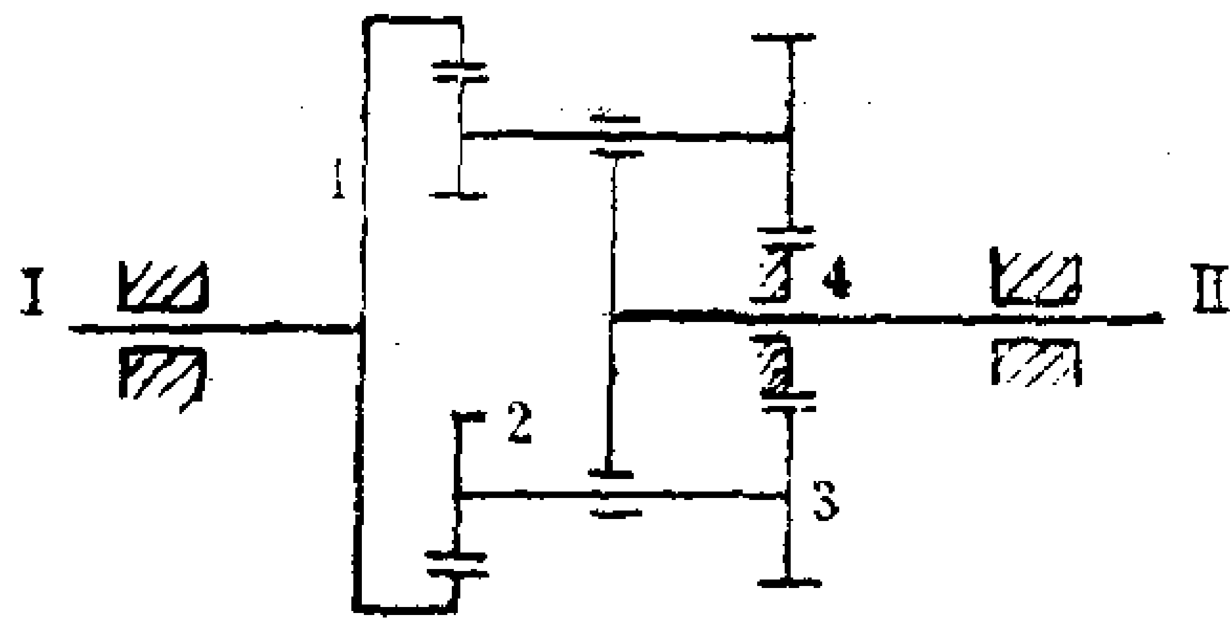
答：$\varepsilon_I=0.32\ 1/s^2$，$\varepsilon_{II}=-0.53\ 1/s^2$



题4-164图

4-165 已知：$r_1=40\text{cm}$，$r_2=10\text{cm}$，$r_3=18\text{cm}$，$r_4=12\text{cm}$，$m_{2-3}=80\text{kg}$，$J_{2-3}=1.2\text{kg}\cdot\text{m}^2$，$J_{\text{I}}=3.0\text{kg}\cdot\text{m}^2$，$J_{\text{II}}=15\text{kg}\cdot\text{m}^2$，$M_{\text{I}}=100\text{N}\cdot\text{m}$，$M_{\text{II}}=90\text{N}\cdot\text{m}$，求主动轴角加速度$\varepsilon_{\text{I}}$和从动轴角加速度$\varepsilon_{\text{II}}$。

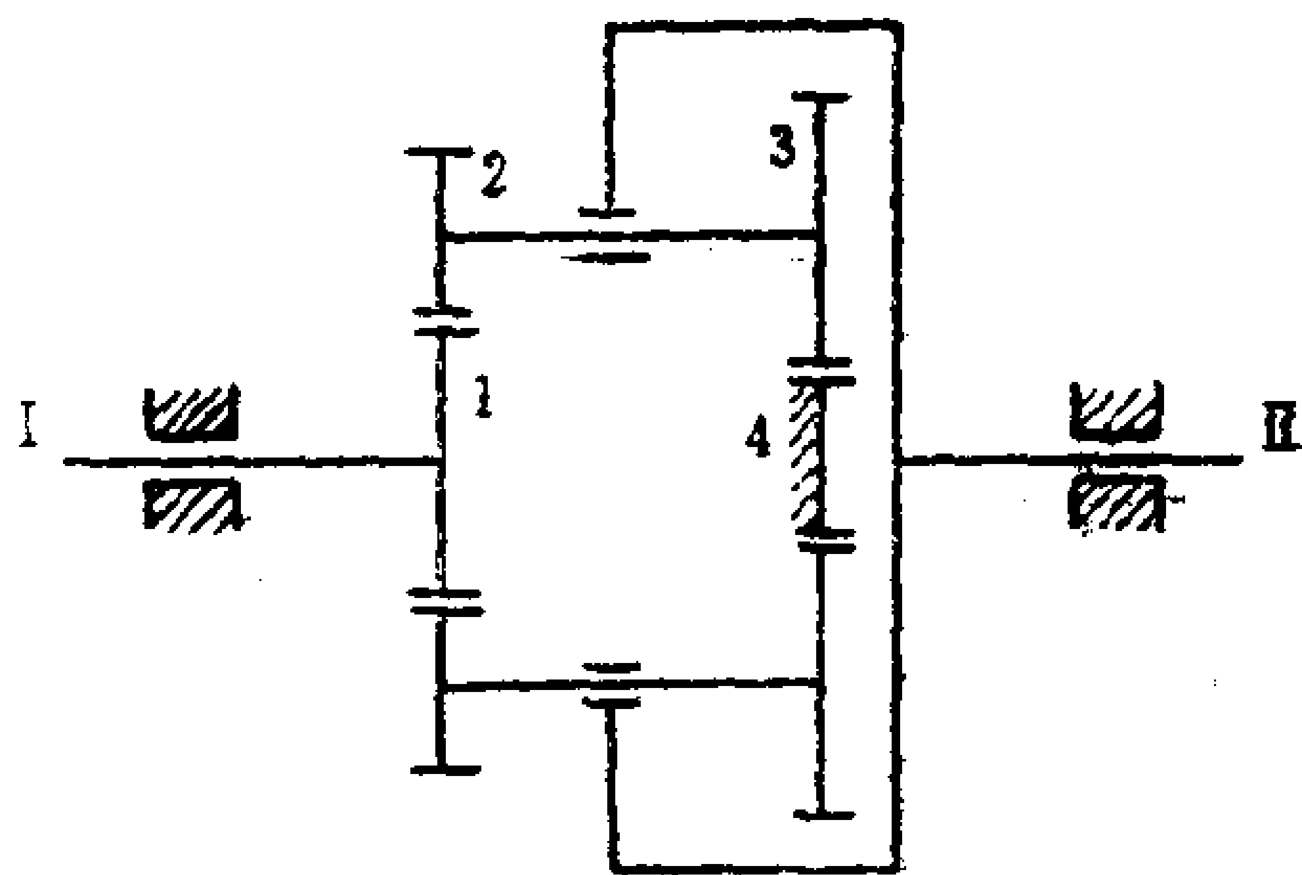
答：$\varepsilon_{\text{I}}=0.77\ 1/\text{s}^2$　　$\varepsilon_{\text{II}}=0.66\ 1/\text{s}^2$



题4-165图

4-166 已知：$r_1=15\text{cm}$，$r_2=10\text{cm}$，$r_3=15\text{cm}$，$r_4=10\text{cm}$，$m_{2-3}=70\text{kg}$，$J_{2-3}=1\text{kg}\cdot\text{m}^2$，$J_{\text{I}}=4.2\text{kg}\cdot\text{m}^2$，$J_{\text{II}}=21\text{kg}\cdot\text{m}^2$，$M_{\text{I}}=80\text{N}\cdot\text{m}$，$M_{\text{II}}=35\text{N}\cdot\text{m}$，求主动轴和从动轴角加速度$\varepsilon_{\text{I}}$和$\varepsilon_{\text{II}}$。

答：$\varepsilon_{\text{I}}=0.14\ 1/\text{s}^2$，　$\varepsilon_{\text{II}}=0.25\ 1/\text{s}^2$



题4-166图

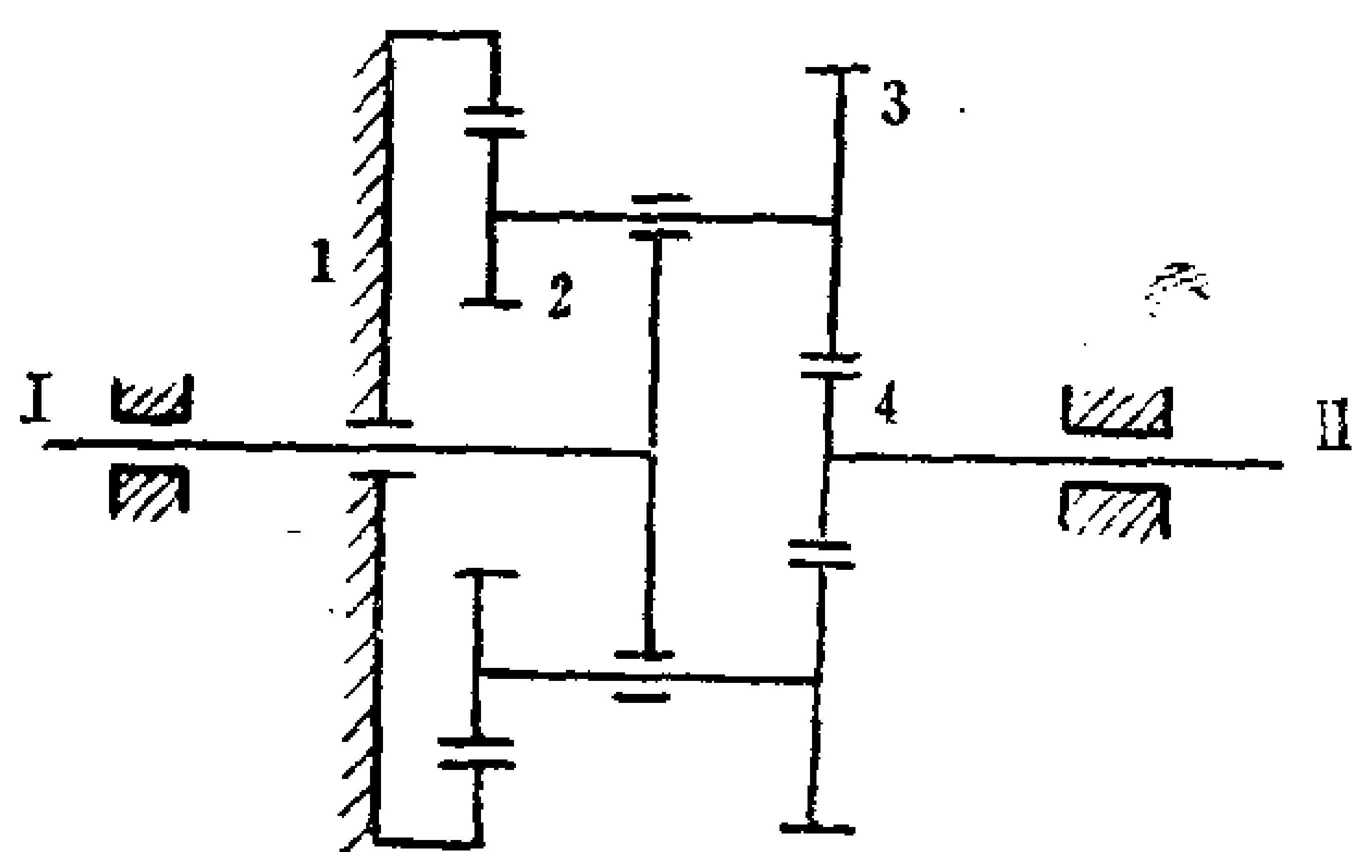
4-167 已知：$r_1=50\text{cm}$，$r_2=10\text{cm}$，$r_3=15\text{cm}$，$r_4=25\text{cm}$，$m_{2-3}=72\text{kg}$，$J_{2-3}=1.02\text{kg}\cdot\text{m}^2$，$J_I=1.5\text{kg}\cdot\text{m}^2$，$J_{II}=12\text{kg}\cdot\text{m}^2$，$M_I=120\text{N}\cdot\text{m}$，$M_{II}=30\text{N}\cdot\text{m}$，求主动轴和从动轴的角加速度$\varepsilon_I$和$\varepsilon_{II}$。

答：$\varepsilon_I=0.57\ 1/s^2$，$\varepsilon_{II}=-1.14\ 1/s^2$

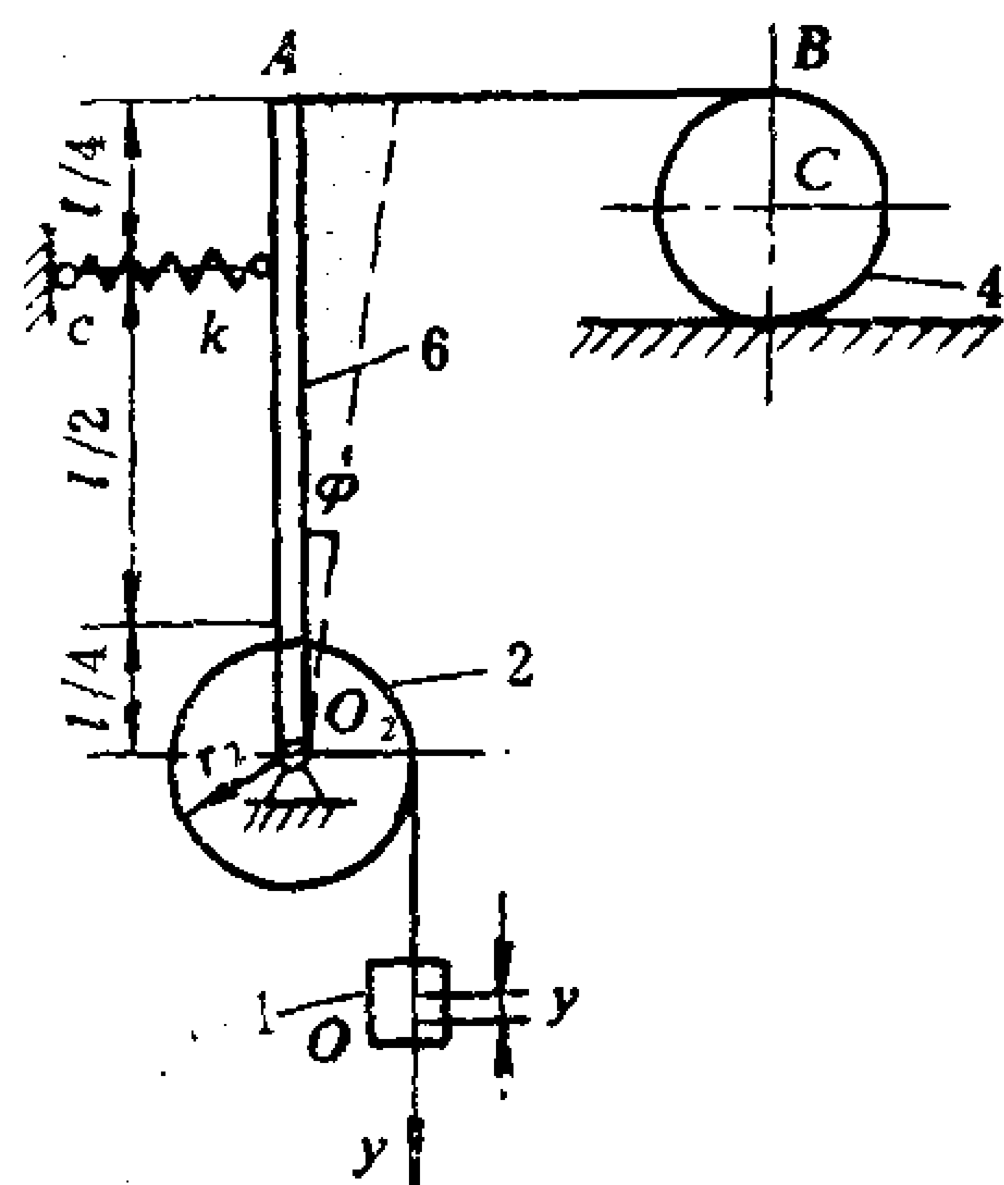
4-168 已知：如图，$m_1=1\text{kg}$，$m_2=2\text{kg}$，$m_4=1\text{kg}$，$m_6=3\text{kg}$，$l=0.6\text{m}$，$c=20\text{N/cm}$，$y_0=0.2\text{cm}$，$\dot{y}_0=8\text{cm/s}$。求系统小自由振动的圆频率k和周期T，以及重物1振动方程$y=y(t)$（坐标原点选在重物静平衡位置）。

答：$k\doteq27.1\ 1/s^2$，$T\doteq0.23\text{s}$

$y=0.36\sin(27.1t+0.595)\text{cm}$



题4-167图



题4-168图

4-169 二自由度振动系统如图，已知$l_1=20\text{cm}$，$l_2=60\text{cm}$，$l_3=30\text{cm}$，重物质量$m_1=0.5\text{kg}$，匀质杆ED质量$m_2=3\text{kg}$，弹簧刚性系数为$c_1=60\text{N/cm}$，$c_2=40\text{N/cm}$，$c_3=40\text{N/cm}$。试用第二类拉格朗日方程建立系统小振动方

程，并求其频率。

答：小振动方程为

$$a_{11}\ddot{z}+c_{11}z+c_{12}\varphi=0$$

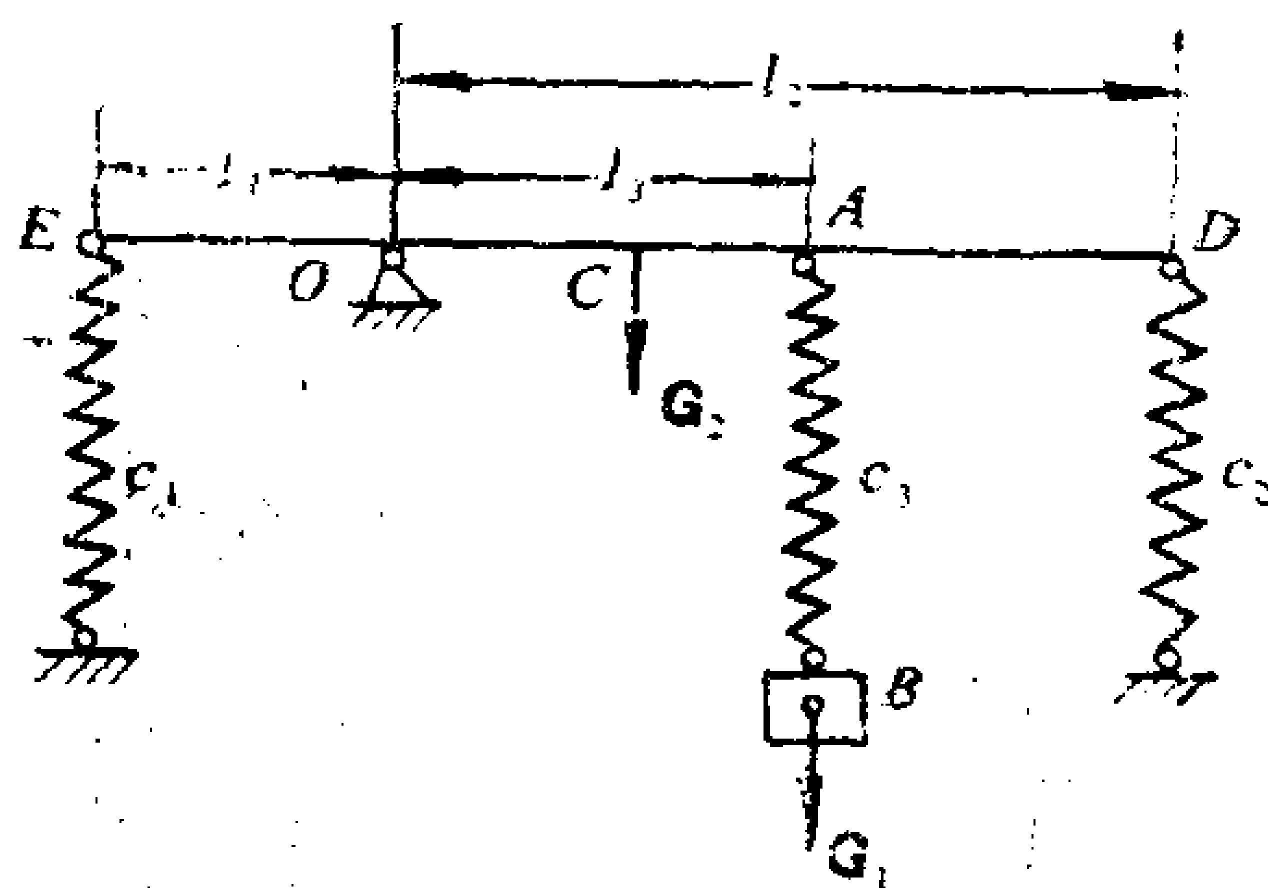
$$a_{22}\ddot{\varphi}+c_{21}z+c_{22}\varphi=0$$

其中Z为重物离开其平衡位置的铅垂位移，φ为ED对平衡位置的转角。$a_{11}=0.5\text{kg}$，$c_{11}=4000\text{N/m}$，$c_{12}=1200\text{N}$，$a_{22}=0.28\text{kg}\cdot\text{m}^2$，$c_{22}=2040\text{Nm}$。

频率方程为

$$0.07k^4-1070k^2+3360000=0$$

频率为 $k_1=66.4\ 1/s$，$k_2=104\ 1/s$。



题4-169图

4-170 质量为m的质点在力

$$F=-f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r},\ r=\sqrt{x^2+y^2}$$的作用下在平面OXY内运动。试按罗司方程形式建立质点的运动微分方程。

答：$R=\dfrac{P_\varphi^2}{2mr^2}-\dfrac{m}{2}\dot{r}^2+\int f(r)dr$ 。

4-171 具有质量m_1和m_2的两点按照万有引力定律在相互作用。试按罗司方程形式建立系统运动方程。取系统的质

量中心坐标X，Y，Z，两点之间距离r和决定连接两点的直线方向的角φ，ψ(纬度和经度)作为广义坐标。

答：

$$R=\frac{(p_x^2+p_y^2+p_z^2)}{2(m_1+m_2)}+\frac{p_4^2}{2\mu r^2\cos^2\varphi}-$$

$$-\frac{\mu}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-\frac{\gamma m_1 m_2}{r}$$

式中 $\mu=\dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$。

4-172　在球坐标中的引力场内相对论性的质点的拉格朗日函数具有形式

$$L=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)}$$

$$+\frac{\gamma}{r}$$

式中m_0是质点的静止质量，c是光速。试写出质点的罗司函数。

答：

$$R=m_0c^2\sqrt{\left(1-\frac{\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2}{c^2}\right)\left(1+\frac{p_\varphi^2}{m_0^2c^2r^2\sin^2\theta}\right)}$$

$$-\frac{\gamma}{r}。$$

4-173　求均匀重力场中质量为m的质点的惠特克函数K。

答：$K(x,\ y,\ z,\ p_y,\ p_z)=$

$$-\sqrt{2m(h+mgz)-p_y^2-p_z^2}$$

第五章　拉格朗日方程的应用

一、基本理论与公式

1.有多余坐标系统的拉格朗日方程

运动微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_u}-\frac{\partial T}{\partial q_u}=Q_u\pm\sum_{\gamma=1}^{m}\lambda_\gamma\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_u}$$

$$(u=1,\ \cdots,\ n+m) \tag{5-1}$$

约束方程

$$f_\gamma(q_1,\ \cdots,\ q_n,\ q_{n+1},\ \cdots,\ q_{n+m},\ t)=0$$

$$(\gamma=1,\ \cdots,\ m) \tag{5-2}$$

其中q_{n+1}，…，q_{n+m}为多余坐标。

2.准坐标下的拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}+\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\gamma_{mk}^{l}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_l}\omega_m-\frac{\partial T^*}{\partial \pi_k}=p_k^*$$

$$(k=1,\ \cdots,\ n) \tag{5-3}$$

其中

$$\gamma_{mk}^{l}=\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ls}}{\partial q_r}-\frac{\partial a_{lr}}{\partial q_s}\right)b_{sm}b_{rk} \tag{5-4}$$

为波兹曼三标记号，a_{ls}和b_{rm}为准速度和广义速度相互表示

的系数 $\omega_s=\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\dot{q}_k$，$\dot{q}_r=\sum_{m=1}^{n}b_{rm}\omega_m$，$T^*$为用准速度表示的动能

$$T^*(q_s,\omega_s,t)=T\left(q_s,\ \sum_{k=1}^{n}b_{sk}\omega_k,\ t\right) \tag{5-5}$$

$\dfrac{\partial}{\partial\pi_k}$为对准坐标的偏导数记号

$$\frac{\partial}{\partial\pi_k}\triangleq\sum_{r=1}^{n}b_{rk}\frac{\partial}{\partial q_r} \tag{5-6}$$

P_k^*为相应于准坐标的广义力

$$P_k^*=\sum_{s=1}^{n}Q_s b_{sk} \tag{5-7}$$

3.耗散函数的拉格朗日方程

(1) 在介质中缓慢运动时，瑞雷耗散函数(线性阻尼)为

$$F=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(k_{ix}\dot{x}_i^2+k_{iy}\dot{y}_i^2+k_{iz}\dot{z}_i^2) \tag{5-8}$$

拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s-\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_s}\quad(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{5-9}$$

(2) 路里叶耗散函数(非线性阻尼)为

$$\Phi=\sum_{i=1}^{N}k_i\int_0^{v_i}f_i(u)\mathrm{d}u \tag{5-10}$$

而拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s-\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s}\quad(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{5-11}$$

4.打击运动的拉格朗日方程

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right|_{t=\Delta t}-\left.\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right|_{t=0}=I_s\quad(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{5-12}$$

其中I_s为打击冲量

$$I_s=\int_0^{\Delta t}Q_s\mathrm{d}t \tag{5-13}$$

方程(5-12)是n个代数方程。

5.初始运动问题

为研究初始运动问题，可将所有广义坐标展开为时间t的幂级数

$$q_s=a_s+b_st+c_st^2+d_st^3+\cdots \tag{5-14}$$

$$(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

其中系数a_s，b_s，c_s，d_s，…可由(5-14)代入拉格朗日方程并令t的各同次幂的系数为零而得到，因为a_s就是q_s的初值，b_s就是$\dot{q}_s$的初值，c_s就是$\ddot{q}_s$的初值，等等。

6.相对运动动力学的拉格朗日方程

(1) 一般相对运动动力学的拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T_r}{\partial q_s}=Q_s-\frac{\partial}{\partial q_s}(V^0+V^\omega)+Q_s^{\dot{\omega}}+\Gamma_s \tag{5-15}$$

$$(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

其中T_r为系统相对运动的功能；V°为均匀场势能

$$V^{\circ}=M(\overset{*}{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_0)\cdot\boldsymbol{r}'_C \tag{5-16}$$

这里M是被载体的总质量，$\boldsymbol{r}'_C$为被载体质心在与载体相固联的坐标系中的矢径，$\boldsymbol{\omega}$为载体的角速度，$\boldsymbol{v}_0$为基点O的速度；V^{ω}为离心力势能

$$V^{\omega}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\overset{=}{\theta}{}^{0}\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{5-17}$$

这里$\overset{=}{\theta}{}^{\circ}$为系统在基点$O$的惯量张量；$Q_s^{\dot{\omega}}$为广义回转惯性力

$$Q_s^{\dot{\omega}}=-\sum_i^N(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times m_i\boldsymbol{r}'_i)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i'}{\partial q_s} \tag{5-18}$$

$\boldsymbol{\Gamma}_s$为广义陀螺力

$$\Gamma_s=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{sk}\dot{q}_k \tag{5-19}$$

这里

$$\gamma_{sk}=2\boldsymbol{\omega}\cdot\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i'}{\partial q_s}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}_i'}{\partial q_k}=-\gamma_{ks}$$

或者

$$\Gamma_s=-\sum_{i=1}^{N}m_i(2\boldsymbol{\omega}\times\overset{*}{\boldsymbol{r}}_i{}')\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i'}{\partial q_s} \tag{5-20}$$

（2）受匀速转动约束的拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_r}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T_r}{\partial q_s}=Q_s-\frac{\partial}{\partial q_s}\Bigg[-\frac{1}{2}\omega^2$$

$$\sum_{i=1}^{N}m_i(x'^2_i+y'^2_i)\Bigg]-2\omega$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\overset{*}{x}'_i \frac{\partial y'_i}{\partial q_s} - \overset{*}{y}' \frac{\partial x'_i}{\partial q_s} \right) \tag{5-21}$$

$$(s=1, 2, \cdots, n)$$

3）相对平衡

一般情形

$$Q_s - \frac{\partial}{\partial q_s}(V^\circ + V^\omega) = 0 \qquad (s=1, 2, \cdots, n) \tag{5-22}$$

受匀速转动约束情形

$$Q_s - \frac{\partial}{\partial q_s}\left[-\frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i'^2 + y_i'^2) \right] = 0 \tag{5-23}$$

$$(s=1, 2, \cdots, n)$$

7. 变质量力学系统的拉格朗日方程

（1）凝固导数表示的方程

$$\frac{D}{Dt}\frac{Д T}{Д \dot{q}_s} - \frac{Д T}{Д q_s} = Q_s + \Psi_s \qquad (s=1, 2, \cdots, n) \tag{5-24}$$

其中$\frac{Д}{Д \dot{q}_s}$，$\frac{Д}{Д q_s}$，$\frac{D}{Dt}$分别把质量当作常数时对广义速度、广义坐标的偏导数和对时间的导数，Ψ_s为广义反推力

$$\Psi_s = \sum_{i=1}^{N} \dot{m}_i \boldsymbol{u}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \tag{5-25}$$

这里$\boldsymbol{u}_i$为由第i个质点分离(或并入)的微粒相对该质点的速度。

(2) 半凝固导数表示的方程

$$\frac{\mathrm{d}\prod T}{\mathrm{d}t\prod \dot{q}_s} - \frac{\prod T}{\prod q_s} = Q_s + \Phi_s \quad (s=1, 2, \cdots, n) \tag{5-26}$$

其中

$$\Phi_s = \sum_{i=1}^{N} \dot{m}_i (\boldsymbol{u}_i + \dot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \tag{5-27}$$

(3) 普通导数表示的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + P_s \qquad (s=1, 2, \cdots, n) \tag{5-28}$$

其中

$$P_s = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \dot{m}_i (\boldsymbol{u}_i + \dot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} - \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial m_i}{\partial q_s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_s} \right) \right\} \tag{5-29}$$

这里假设质点的质量可为广义坐标、广义速度和时间的函数，即

$$m_i = m_i(q_s, \dot{q}_s, t) \tag{5-30}$$

8.带参数约束系统的拉格朗日方程

带参数约束系统的拉格朗日方程具有通常第二类拉格朗

日方程的形式，但在这些方程中除广义坐标外还包含一些控制参数。

9. 包含伺服约束系统的拉格朗日方程

（1）一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\nu=1}^{j}\lambda_\nu A_{\nu s}\quad (s=1,\ 2,\cdots n,)\tag{5-31}$$

第二类约束(包含伺服的约束)加在虚位移上的条件为

$$\sum_{s=1}^{n}A_{\nu s}\delta q_s=0\qquad (\nu=1,\ 2,\cdots;\ j)\tag{5-32}$$

第二类约束为

$$\Psi\rho_2(x_1,\ y_1,\ z_1,\ \cdots,\ x_N,\ y_N,z_N,\ t)=0$$
$$(\rho_2=1,\ 2,\ \cdots l_2=l-l_1)\tag{5-33}$$

一般说来，(5-32)与(5-33)没有联系。当$l_2=j$时，运动可确定。

（2）几种特殊情形

1°设由(5-32)可解出j个δq:

$$\delta q_{n-j+k}=\sum_{\xi=1}^{n-j}B_{n-j+k,\,\xi}\,\delta q_\xi\quad (k=1,\ \cdots,\ j)\tag{5-34}$$

则方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\xi}-\frac{\partial T}{\partial q_\xi}-Q_\xi+\sum_{k=1}^{j}B_{n-j+k,\xi}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n-j+k}}$$

$$-\frac{\partial T}{\partial q_{n-j+k}}-Q_{n-j+k}\Bigg)=0$$

$$(\xi=1,\ 2,\ \cdots,\ n-j) \tag{5-35}$$

2°如果(5.34)归结为

$$\delta q_{n-j+k}=0 \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ j) \tag{5-36}$$

则方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\xi}-\frac{\partial T}{\partial q_\xi}=Q_\xi \quad (\xi=1,\ 2,\ \cdots,\ n-j) \tag{5-37}$$

3°如果第二类约束反力仅仅是障碍运动的辅助系统的接触作用，其坐标依赖于q_1，q_2，…，q_n中的q_{n-m+1}，…，q_n，则关系(5-32)成为

$$\delta q_{n-m+1}=0,\ \cdots,\ \delta q_n=0 \tag{5-38}$$

而方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\eta}-\frac{\partial T}{\partial q_\eta}=Q_\eta \qquad (\eta=1,\cdots,n-m) \tag{5-39}$$

10.拉格朗日力学的逆问题

对于给定的二阶常微分方程组

$$\sum_{k=1}^{n}A_{sk}(q_m,\ \dot{q}_m,\ t)\ddot{q}_k+B_s(q_m,\ \dot{q}_m,\ t)=0$$

$$(s,\ m=1,\ \cdots,\ n) \tag{5-40}$$

可构造函数L使之成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \qquad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \quad (5\text{-}41)$$

其中

$$L(q_m,\ \dot{q}_m,\ t)=K(q_m,\ \dot{q}_m,\ t)+\sum_{k=1}^{n}D_k(q_m,\ t)\dot{q}_k+C(q_m,\ t) \quad (5\text{-}42)$$

而K，D_k，C的构造如下：

$$K=\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\dot{q}_{k_1}\int_0^1 d\tau'\left\{\left[\int_0^1 d\tau A_{k_1k_2}(q,\ \tau\dot{q},\ t)\right]\dot{q}_k\right\}(q,\ \tau\dot{q},\ t) \quad (5\text{-}43)$$

$$D_{k_1}=\sum_{k_2=1}^{n}\left[\int_0^1 d\tau\tau Z_{k_1k_2}(\tau q,\ t)\right]q_{k_2} \quad (5\text{-}44)$$

$$C=\sum_{k=1}^{n}\left[\int_0^1 d\tau W_k(\tau q,t)\right]q_k \quad (5\text{-}45)$$

这里

$$Z_{k_1k_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_{k_1}}{\partial \dot{q}_{k_2}}-\frac{\partial B_{k_2}}{\partial \dot{q}_{k_1}}\right)+\left(\frac{\partial^2 K}{\partial q_{k_1}\partial \dot{q}_{k_2}}-\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_{k_1}\partial q_{k_2}}\right) \quad (5\text{-}46)$$

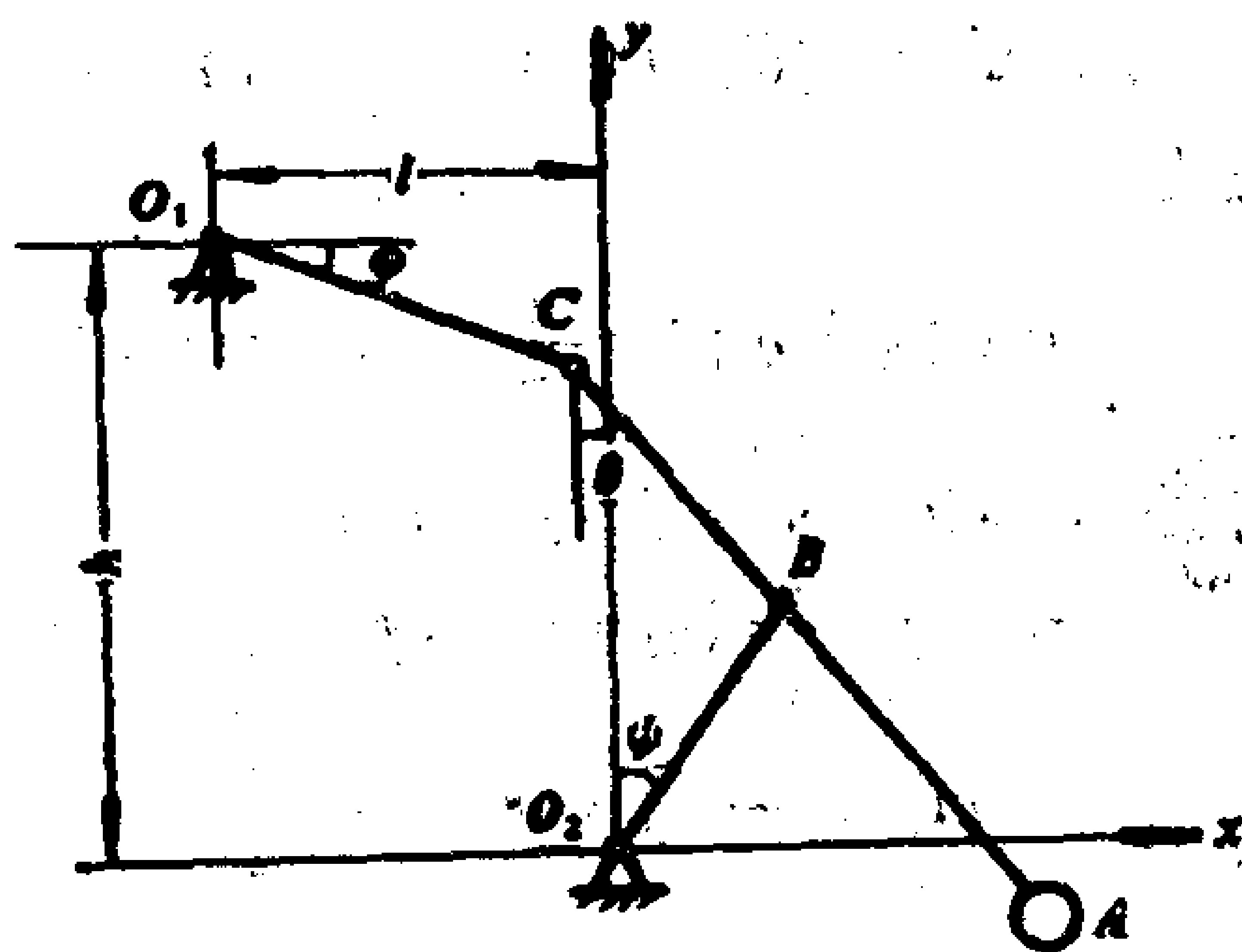
$$W_{k_1}=\frac{\partial D_{k_1}}{\partial t}-B_{k_1}-\frac{\partial K}{\partial q_{k_1}}+\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_{k_1}\partial t}+\sum_{k_2=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 K}{\partial q_{k_1}\partial \dot{q}_{k_2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_{k_1}}{\partial \dot{q}_{k_2}}-\frac{\partial B_{k_2}}{\partial \dot{q}_{k_1}}\right)\dot{q}_{k_2}\right]$$

以上构造 L 的方法称为 *Santilli* 方法。此方法的顺序是：

首先按(5-43)求出K；然后由(5-46)求出$Z_{k_1k_2}$，代入(5-44)计算D_{k_1}；最后由(5-47)计算出W_{k_1}，代入(5-45)而计算得C。

二、范例

例5-1 图示一振动系统。小球 A 的质量为m，与 ABC 杆以光滑铰链连接。各杆的质量可以忽略不计。平衡时，O_1C 杆在水平位置，ABC 杆以及 O_2B 杆在铅垂位置。设 $O_1C=l$，$O_2B=BC=b$，$AB=a$，$a>b$，求系统作微振动的周期



例5-1图

［解］ 系统有一个自由度，可取ψ为广义坐标。为计算方便，再取θ为多余坐标。ψ，θ之间有一约束条件

$$[h-b(\cos\psi+\cos\theta)]^2+[l+b(\sin\psi-\sin\theta)]^2=l^2$$

或者表为

$$f=h^2+2b^2+2b^2\cos(\psi+\theta)-2hb(\cos\psi+\cos\theta)$$
$$+2lb(\sin\psi-\sin\theta)=0 \quad (1)$$

有多余坐标系统的拉格朗日方程(5-1)给出

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot\psi}=\frac{\partial T}{\partial\psi}-Q_\psi+\lambda\frac{\partial f}{\partial\psi}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}-\frac{\partial T}{\partial\theta}=Q_\theta+\lambda\frac{\partial f}{\partial\theta}\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

现在列写系统的动能。因

$$x_A=b\sin\psi+a\sin\theta,\quad y_A=b\cos\psi-a\cos\theta$$

故

$$\dot x_A^2+\dot y_A^2=b^2\dot\psi^2+a^2\dot\theta^2+2ba\dot\theta\dot\psi\cos(\psi+\theta)$$

研究微振动情形，有

$$\sin\psi\approx\psi,\ \sin\theta\approx\theta,\ \cos\psi\approx1,\ \sin\psi\approx1$$

于是，动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot x_A^2+\dot y_A^2)\approx\frac{1}{2}m(b\dot\psi^2+a\dot\theta^2) \quad (2)$$

系统的势能(取o_2为势能零点)为

$$V=mgy_A=mg(b\cos\psi-a\cos\theta)$$
$$\approx mg(b-a)+mg\left(-\frac{1}{2}b\psi^2+\frac{1}{2}a\theta^2\right) \quad (3)$$

注意，这里ψ，φ需取到二阶小量。广义力为

$$Q_\psi=-\frac{\partial v}{\partial\psi}=mgb\psi,\ Q_\theta=-\frac{\partial v}{\partial\theta}=-mga\theta \quad (4)$$

现在计算带乘子λ的项。我们有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \psi}&=-2b^2\sin(\psi+\theta)+2hb\sin\psi+2lb\cos\psi\approx 2lb\\ \frac{\partial f}{\partial \theta}&=-2b^2\sin(\psi+\theta)+2hb\sin\theta-2lb\cos\theta\approx -2lb\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

将(2)、(4)和(5)代入方程(2)，得到

$$\left.\begin{aligned}m(b\ddot{\psi}+a\ddot{\theta})b&=-mgb\psi+2\lambda lb\\ m(b\ddot{\psi}+a\ddot{\theta})a&=-mga\theta-2\lambda lb\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

下面建立微振动下，ψ与θ的关系。关系(1)近似地写成

$$f=h^2+4b^2-4hb-2lb(\psi-\theta)=0 \quad (7)$$

注意到$h=2b$，则(7)给出

$$\psi=\theta \quad (8)$$

最后，将(8)代入方程(6)，并消去λ，便得

$$m(a+b)^2\ddot{\theta}=mg(b-a)\theta$$

或者

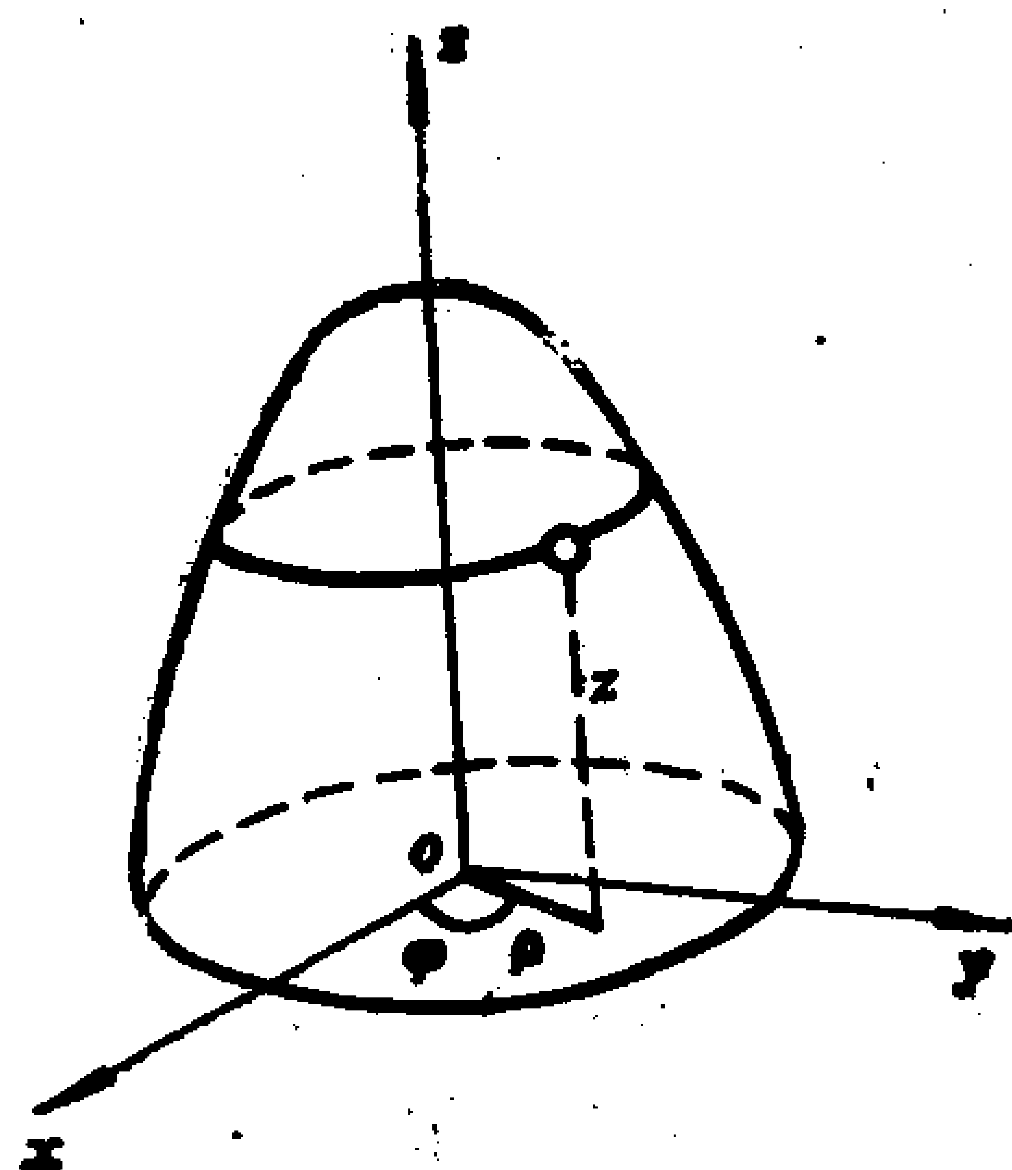
$$\ddot{\theta}+\frac{g(a-b)}{(a+b)^2}\theta=0 \quad (9)$$

因此，得微振动周期

$$\tau=2\pi\frac{a+b}{\sqrt{(a-b)g}} \quad (10)$$

例5-2 一质量为m的质点停在一光滑抛面的顶点。抛物面方程为$x^2+y^2=a(a-z)$，其中a为常数，z轴铅垂向上。质点受微扰离开其平衡位置并沿曲面向下滑动。取柱坐标ρ，φ，z为广义坐标，试列写点的运动微分方程，并确定约束反力，说明质点在什么高度离开抛物面？

[解] 系统有两个自由度，若取柱坐标ρ，φ，z为广义坐标，则有多余坐标出现。约束方程



例图5-2

$$x^2+y^2=a(a-z)$$

在柱坐标中表为

$$\rho^2=a(a-z)\text{或}f=\rho^2-a(a-z)=0 \tag{1}$$

有多余坐标系统的拉格朗日方程(5-1)给出为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}}-\frac{\partial T}{\partial \rho}=Q_\rho+\lambda\frac{\partial f}{\partial \rho}\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_\varphi+\lambda\frac{\partial f}{\partial \varphi}\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}-\frac{\partial T}{\partial z}=Q_z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

系统的功能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2) \tag{3}$$

势能为

$$v=mgz \tag{4}$$

于是得广义力为

$$Q_\rho=-\frac{\partial V}{\partial \rho}=0,\ Q_\varphi=-\frac{\partial V}{\partial \varphi}=0,$$

$$Q_z=-\frac{\partial V}{\partial z}=-mg \tag{5}$$

又由(1)知

$$\frac{\partial f}{\partial \rho}=2\rho,\quad \frac{\partial f}{\partial \varphi}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=a \tag{6}$$

将(3)、(5)和(6)代入(2)，得到运动方程

$$\left.\begin{aligned}
&m\ddot{\rho}-m\rho\dot{\varphi}^2=2\lambda\rho\\
&m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^2\dot{\varphi})=0\\
&m\ddot{z}=-mg+\lambda a
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

下面求约束反力 $N_\rho=2\lambda\rho$，$N_z=\lambda a$ $(N_\varphi=0)$。为此，只要求出不定乘子λ。现将约束方程(1)对时间求两次导数，得

$$2\rho\ddot{\rho}+2\dot{\rho}^2+a\ddot{z}=0 \tag{8}$$

将由(7)中解得的$\ddot{\rho}$和$\ddot{z}$代入(8)，得到

$$2\rho\left(\rho\dot{\varphi}^2+\frac{2\lambda}{m}\rho\right)+2\dot{\rho}^2+a\left(-g+\frac{\lambda}{m}a\right)=0$$

由此解得

$$\lambda=\frac{m(ag-2\dot{\rho}^2-2\rho^2\dot{\varphi}^2)}{a^2+4\rho^2} \tag{9}$$

现在求方程(7)的积分，以确定$\dot{\rho}$和$\dot{\varphi}$。由(7)的第二个方程，积分得

$$\rho^2\dot{\varphi}=c$$

其中c为积分常数。因$t=0$时，$\rho=0$，故$c=0$。于是

$$\dot{\varphi}=0$$

为求出$\dot{\rho}$，可将(7)的第一个方程乘以$\dot{\rho}$，第二个乘以$\dot{\varphi}$，第三个乘以$\dot{z}$，然后相加并注意到

$$2\lambda\rho\dot{\rho}+2\lambda a\dot{z}=0$$

将所得表达式积分，得

$$\frac{1}{2}m[\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2]+mgz=h \tag{11}$$

关系(11)就是能量积分。考虑到$t=0$时，$z=a$，$\dot{\rho}=\dot{\varphi}=\dot{z}=0$，则

$$h=mga \tag{12}$$

将(12)和(10)代入(11)得

$$\dot{\rho}^2+\dot{z}^2=2g(a-z) \tag{13}$$

将(1)对t求导数，得

$$2\rho\dot{\rho}=-a\dot{z}$$

将其代入(13)，解得

$$\dot{\rho}^2=\frac{2g(a-z)a^2}{4\rho^2+a^2}=\frac{2g\rho^2a}{4\rho^2+a^2} \tag{14}$$

将(14)和(10)代入(9)，得

$$\lambda=\frac{ma^3g}{(4\rho^2+a^2)^2} \tag{15}$$

因此约束反力为

$$\left.\begin{aligned}N_\rho&=2\lambda\rho=\frac{2ma^3g\rho}{(4\rho^2+a^2)}\\N_z&=\lambda a=\frac{ma^4g}{(4\rho^2+a^2)}\\N_\varphi&=0\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

最后，研究质点脱离抛物面问题。由(16)知，约束反力不可能为零，故质点永不脱离抛物面。

例5-3 试由方程(5-3)导出下述关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\omega_k - T^*\right] = \sum_{k=1}^{n} p_k^*\omega_k - \frac{\partial T^*}{\partial t}$$

由此证明，如果T^*中不显含t，且

$$P_k^* = -\frac{\partial V^*}{\partial \pi_k}$$

则存在积分

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\omega_k - T^* + V^* = \text{const}$$

［解］ 将(5-3)两端乘以ω_k并对k求和，得到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\omega_k + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\gamma_{mk}^{l}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_l}\omega_m\omega_k$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \pi_k}\omega_k = \sum_{k=1}^{n} p_k^*\omega_k \qquad (1)$$

利用(5-6)，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\omega_k - T^*\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\omega_k$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\dot{\omega}_k - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\dot{\omega}_k - \frac{\partial T^*}{\partial t}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} \omega_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} \omega_k - \frac{\partial T^*}{\partial t} \tag{2}$$

由(5-4)知

$$\gamma_{mk}^{l} = -\gamma_{km}^{l}$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \gamma_{mk}^{l} \omega_m \omega_k = 0 \tag{3}$$

将(2)和(3)代入(1)，便得

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} \omega_k - T^* \right] = \sum_{k=1}^{n} p_k^* \omega_k - \frac{\partial T^*}{\partial t} \tag{4}$$

如果T^*中不显含t，则有

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} = 0 \tag{5}$$

而当

$$p_k^* = -\frac{\partial V^*}{\partial \pi_k}$$

时，有

$$\sum_{k=1}^{n} p_k^* \omega_k = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V^*}{\partial \pi_k} \omega_k = -\frac{dV^*}{dt} \tag{6}$$

将(5)和(6)代入(4)，便得

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} - T^* + V^* \right] = 0$$

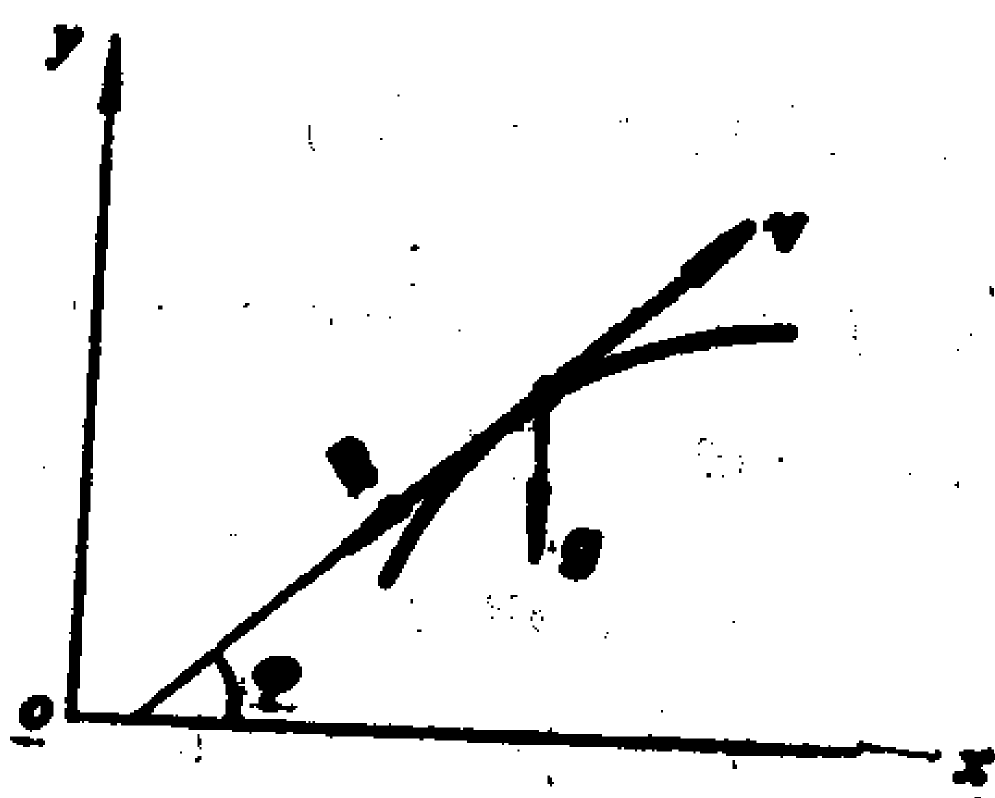
积分得

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} - T^* + V^* = \text{const} \tag{7}$$

例5-4 试证单位质量的质点在重力作用下在阻力为$\boldsymbol{R}$的介质中运动时其水平和铅垂坐标(x, y)满足方程

$$\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{2gR}{v^4\cos^3\varphi}=0$$

其中v是速度而φ为切线与水平线的夹角。



例图5-4

[证明]：首先列写运动微分方程。质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) \tag{1}$$

由阻力$\boldsymbol{R}$引起的广义力为

$$\left.\begin{aligned} Q'_x&=-\boldsymbol{R}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}=-\frac{\dot{x}R}{v}\\ Q'_y&=-\boldsymbol{R}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}=-\frac{\dot{y}R}{v}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

与重力相应的广义力为

$$Q_x=0,\ Q_y=-g \tag{3}$$

质点的运动微分方程为

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial T}{\partial x}&=Q_x+Q'_x\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}-\frac{\partial T}{\partial y}&=Q_y+Q'_y\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

将(1)、(2)和(3)代入(4)，得

$$\ddot{x}=-R\frac{\dot{x}}{v},\quad \ddot{y}=-R\frac{\dot{y}}{v}-g \tag{5}$$

其次，将方程(5)变换到v，φ变量。我们有

$$\dot{x}=v\cos\varphi,\ \dot{y}=v\sin\varphi \tag{6}$$

将(6)代入(5)，得

$$\left.\begin{aligned}&\dot{v}\cos\varphi-v\dot{\varphi}\sin\varphi=-R\cos\varphi\\&\dot{v}\sin\varphi+v\dot{\varphi}\cos\varphi=-R\sin\varphi-g\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

将(7)的第一个乘以$\cos\varphi$，第二个乘以 $\sin\varphi$，然后相加，得

$$\dot{v}=-R-g\sin\varphi \tag{8}$$

将(7)的第一个乘以$\sin\varphi$，第二个乘以$\cos\varphi$，然后相减，得

$$-v\dot{\varphi}=g\cos\varphi \tag{9}$$

最后，我们来证明$(x,\ y)$所满足的方程。我们有

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{tg}\varphi \tag{10}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{dx} \tag{11}$$

由(9)知

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\dot{\varphi}}{\dot{x}}=\frac{-g\cos\varphi/v}{v\cos\varphi}=-\frac{g}{v^2} \tag{12}$$

将(12)代入(11)，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{g}{v^2\cos^2\varphi} \tag{13}$$

将(13)两端再对x求导数，得

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-g\frac{-2v\dfrac{dv}{dx}\cos^2\varphi+2v^2\cos\varphi\sin\varphi\dfrac{d\varphi}{dx}}{v^4\cos^4\varphi}$$

$$=2g\frac{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cos\varphi-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}v\sin\varphi}{v^3\cos^3\varphi} \tag{14}$$

由(8)知

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{\dot{v}}{\dot{x}}=-\frac{R+g\sin\varphi}{v\cos\varphi} \tag{15}$$

将(15)和(12)代入(14)，便得

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=-\frac{2gR}{v^4\cos^3\varphi} \tag{16}$$

证毕。

例5-5 长为 $2l$、质量为 M 的均质直杆可绕铰链O于铅垂面内自由运动。在此杆的下端从铰链 O'联一与之相同的第二杆。当二杆处于静止时，在第二杆中点 A处加一与杆垂直的冲量 S，求冲击后二杆的角速度及点A的速度。



例5-5图

［解］ 列写系统在一般位置时的动能

$$T=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}Ml^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}Ml^2\dot{\theta}_2^2$$

$$+\frac{1}{2}M[(2l\dot{\theta}_1)^2+(l\dot{\theta}_2)^2+2\cdot 2l\dot{\theta}_1 l\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1)]$$

于是

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_1}=\frac{16}{3}Ml^2\dot{\theta}_1+2Ml^2\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_2}=\frac{4}{3}Ml^2\dot{\theta}_2+2Ml^2\dot{\theta}_1\cos(\theta_2-\theta_1)$$

两杆在铅垂位置时，有$\theta_2=\theta_1=0$，而

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial\dot\theta_1}&=\frac{16}{3}Ml^2\dot\theta_1+2Ml^2\dot\theta_2\\ \frac{\partial T}{\partial\dot\theta_2}&=\frac{4}{3}M^{2}\dot\theta_2+2Ml^2\dot\theta_1\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

方程(5.12)给出

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial T}{\partial\dot\theta_1}\right|_{t=\Delta t}-\left.\frac{\partial T}{\partial\dot\theta_1}\right|_{t=0}&=I_1\\ \left.\frac{\partial T}{\partial\dot\theta_2}\right|_{t=\Delta t}-\left.\frac{\partial T}{\partial\dot\theta_2}\right|_{t=0}&=I_2\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

现在计算广义打击冲量I_1和I_2。打击冲量的元功为$S(2l\delta\theta_1+l\delta\theta_2)$，于是

$$I_1=2Sl,\ I_2=Sl\qquad(3)$$

将(1)和(3)代入(2)，并注意到$\left.\frac{\partial T}{\partial\dot\theta_1}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial T}{\partial\dot\theta_2}\right|_{t=0}=0$，得到

$$\frac{16}{3}Ml^2(\dot\theta_1)_{\Delta t}+2Ml^2(\dot\theta_2)_{\Delta t}=2Sl$$

$$\frac{4}{3}Ml^2(\dot\theta_2)_{\Delta t}+2Ml^2(\dot\theta_1)_{\Delta t}=Sl$$

由此解得

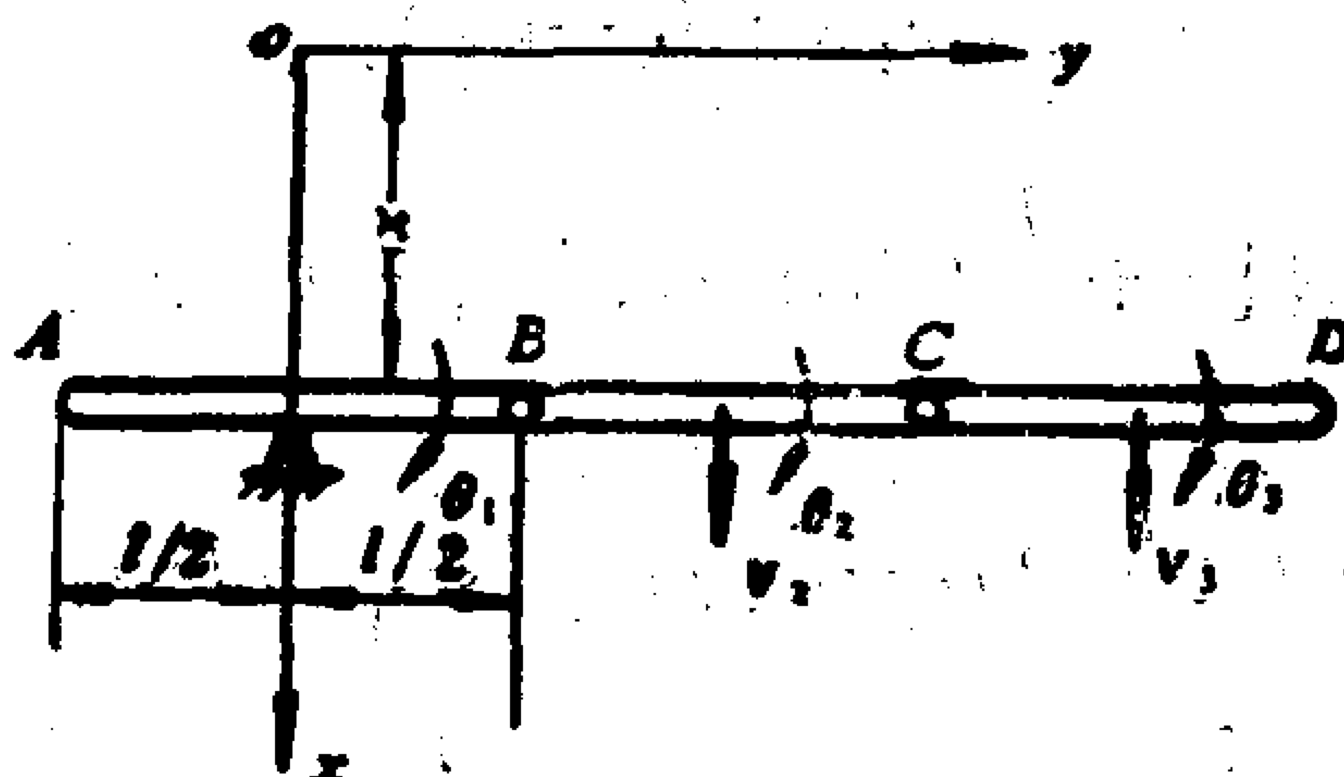
$$(\dot\theta_1)_{\Delta t}=\frac{3}{14}\frac{S}{Ml},\ (\dot\theta_2)_{\Delta t}=\frac{3}{7}\frac{S}{Ml}\qquad(4)$$

而

$$(v_A)_{\Delta t}=2l(\dot\theta_1)_{\Delta t}+l(\dot\theta_2)_{\Delta t}=\frac{6}{7}\frac{S}{M}\qquad(5)$$

例5-6 相同的三直杆AB、BC、CD由铰链连接成一直

线，并从水平位置下落到一支座上如图示。设到达支座时的速度为v，并假定碰撞是塑性的(即碰后不离开)。求碰后各杆的角速度，支座的反冲量以及动能的损失。



例5-6图

[解] 系统作平面运动，有五个自由度。问题所求的是三个杆的角速度，取AB杆质心坐标x，y，三杆转角$\theta_1, \theta_2, \theta_3$为广义坐标。注意到打击后不产生$y$方向的速度变化。设每杆质量为$m$，系统动能为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}_2^2+\frac{1}{2}mv_3^2+\frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}_3^2 \tag{1}$$

因 $v_2=\dot{x}+\frac{l}{2}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)$,

$$v_3=\dot{x}+\frac{l}{2}(\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)$$

故

$$T=\frac{1}{2}m\{\dot{x}^2+[\dot{x}+\frac{l}{2}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)]^2+[\dot{x}+\frac{l}{2}(\dot{\theta}_1$$
$$+2\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)]^2\}+\frac{1}{24}ml^2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3) \tag{2}$$

于是

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= m[\dot{x}+\dot{x}+\frac{l}{2}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)+\dot{x} \\
&\quad +\frac{l}{2}(\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)] \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} &= m\{[\dot{x}+\frac{l}{2}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)]\frac{l}{2}+[\dot{x}+\frac{l}{2} \\
&\quad \cdot(\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)]\frac{l}{2}\}+\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}_1 \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} &= m\left\{\left[\dot{x}+\frac{l}{2}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_1)\right]\frac{l}{2}+[\dot{x}+\frac{l}{2}\right. \\
&\quad \cdot(\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)]l\}+\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}_2 \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_3} &= m[\dot{x}+\frac{l}{2}(\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)]\frac{l}{2}+\frac{1}{12} \\
&\quad \cdot ml^2\dot{\theta}_3
\end{aligned}\right\} \quad (3)
$$

设支座的反冲量为I，它的元功为$-I\delta x$，因此广义反冲量为

$$I_x=-I,\ I_{\theta_1}=I_{\theta_2}=I_{\theta_3}=0 \quad (4)$$

打击运动方程(5.12)给出

$$
\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)_{t=\Delta t}-\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)_{t=0} &= I_x \\
\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_i}\right)_{t=\Delta t}-\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_i}\right)_{t=0} &= I_{\theta_i} \quad (i=1,2,3)
\end{aligned}\right\} \quad (5)
$$

注意到，碰撞前，有

$$(\dot{x})_{t=0}=v,\ (\dot{\theta}_1)_{t=0}=(\dot{\theta}_2)_{t=0}=(\dot{\theta}_3)_{t=0}=0 \quad (6)$$

而碰撞后，有

$$(\dot{x})_{t=\Delta t}=0 \tag{7}$$

将(3)、(4)、(6)和(7)代入方程(5)，得到

$$ml\left(\dot{\theta}_1+\frac{3}{2}\dot{\theta}_2+\frac{1}{2}\dot{\theta}_3\right)_{t=\Delta t}-3mv=-I \tag{8}$$

$$ml^2\left(\frac{7}{12}\dot{\theta}_1+\frac{3}{4}\dot{\theta}_2+\frac{1}{4}\dot{\theta}_3\right)_{t=\Delta t}-mlv=0 \tag{9}$$

$$ml^2\left(\frac{3}{4}\dot{\theta}_1+\frac{4}{3}\dot{\theta}_2+\frac{1}{2}\dot{\theta}_3\right)_{t=\Delta t}-\frac{3}{2}mlv=0 \tag{10}$$

$$ml^2\left(\frac{1}{4}\dot{\theta}_1+\frac{1}{2}\dot{\theta}_2+\frac{1}{3}\dot{\theta}_3\right)_{t=\Delta t}-\frac{1}{2}mlv=0 \tag{11}$$

由方程(9)—(11)，可解出$(\dot{\theta}_1)_{t=\Delta t}$，$(\dot{\theta}_2)_{t=\Delta t}$，$(\dot{\theta}_3)_{t=\Delta t}$：

$$\left.\begin{aligned}(\dot{\theta}_1)_{t=\Delta t}&=\frac{12}{13}\frac{v}{l}\\(\dot{\theta}_2)_{t=\Delta t}&=\frac{9}{13}\frac{v}{l}\\(\dot{\theta}_3)_{t=\Delta t}&=-\frac{3}{13}\frac{v}{l}\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

而将(12)代入(8)，可确定支座的反冲量I：

$$I=\frac{15}{13}mv \tag{13}$$

下面求碰撞后的动能损失。将(7)和(12)代入(2)，得碰撞后动能

$$(T)_{t=\Delta t}=\frac{12}{13}mv^2 \tag{14}$$

因此，动能的损失为

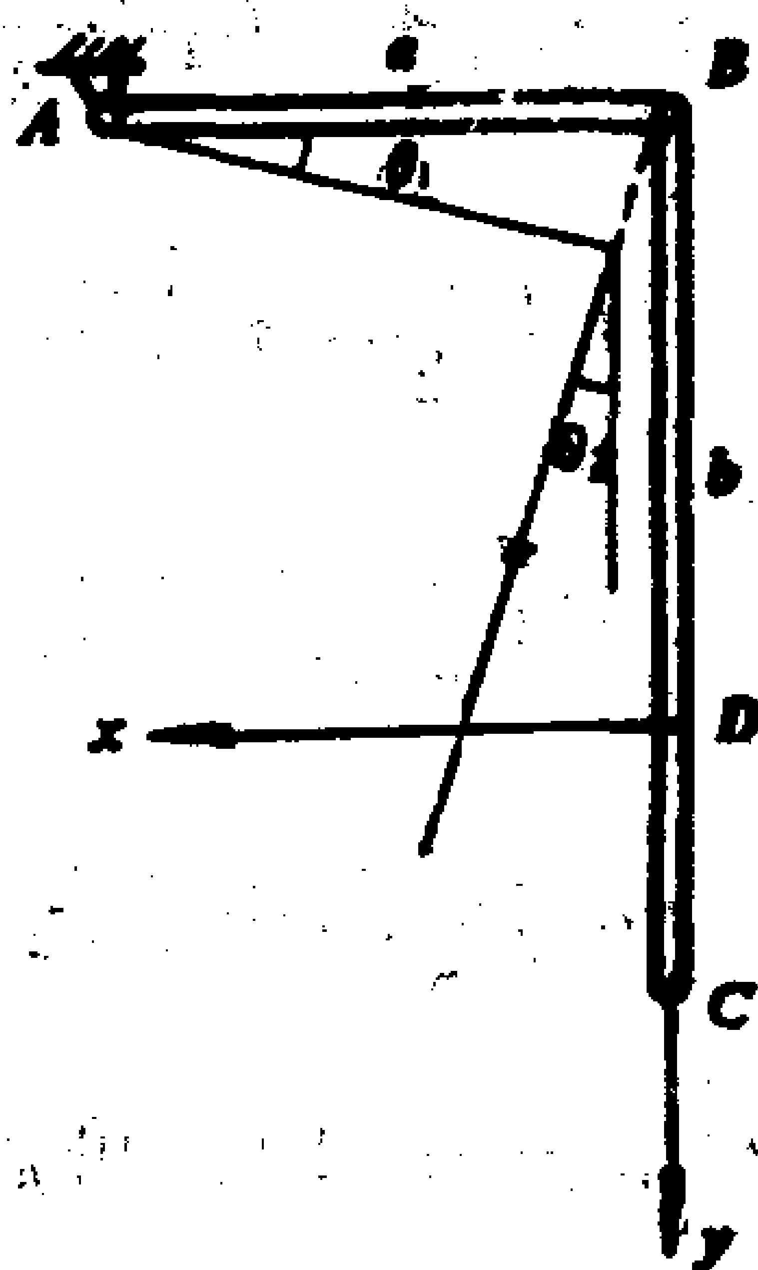
$$\Delta T=(T)_{t=0}-(T)_{t=\Delta t}=\frac{3}{2}mv^2-\frac{12}{13}mv^2$$

$$=\frac{15}{26}mv^2 \tag{15}$$

例5-7 两匀质杆AB、BC，质量为m_1和m_2，长为a和b，自由地铰接于B，并可绕固定点A转动。开始时，AB是水平而BC是铅垂的。试证，如果C被释放，则离杆BC的端点为$\frac{1}{3}b$处的点D和初始路径可由方程

$$y^3=-60\left(1+\frac{2m_2}{m_1}\right)abx$$

来表示。



例图5-7

[证明] 取θ_1，θ_2为广义坐标如图。系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m_1a^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}m_2b^2\dot{\theta}_2^2$$

$$+\frac{1}{2}m_2[a^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{4}b^2\dot{\theta}_2^2+ab\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

势能为

$$V=-\frac{1}{2}m_1ga\sin\theta_1-m_2g(a\sin\theta_1+\frac{1}{2}b\cos\theta_2)$$

拉格朗日方程给出

$$\left(\frac{1}{3}m_1+m_2\right)a^2\ddot{\theta}_1+\frac{1}{2}m_2ab\ddot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)-$$

$$-\frac{1}{2}m_2ab\dot{\theta}_2^2\cos(\theta_1-\theta_2)=\left(\frac{1}{2}m_1+m_2\right)ga\cos\theta_1 \tag{1}$$

$$\frac{1}{3}m_2b^2\ddot{\theta}_2+\frac{1}{2}m_2ab\ddot{\theta}_1\sin(\theta_1-\theta_2)$$

$$+\frac{1}{2}m_2ab\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_1-\theta_2)$$

$$=-\frac{1}{2}m_2gb\sin\theta_2 \tag{2}$$

因$t=0$，$\theta_1=\theta_2=\dot{\theta}_1=\dot{\theta}_2=0$，故令

$$\theta_1=\frac{1}{2}\ddot{\theta}_{10}t^2+A_1t^3+B_1t^4+C_1t^5+D_1t^6+\cdots \tag{3}$$

$$\theta_2=\frac{1}{2}\ddot{\theta}_{20}t^2+A_2t^3+B_2t^4+C_2t^5+D_2t^6+\cdots \tag{4}$$

于是

$$\sin\theta_2\approx\theta_2,\ \cos\theta_1\approx1-\frac{1}{2}\theta_1^2,\ \sin(\theta_1-\theta_2)\approx\theta_1-\theta_2,$$

$$\cos(\theta_1-\theta_2)\approx1-\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)^2 \tag{5}$$

将(3)、(4)和(5)代入方程(1)和(2)，得

$$\left(\frac{1}{3}m_1+m_2\right)a^2(\ddot{\theta}_{10}+6A_1t+12B_1t^2+20C_1t^3$$

$$+30D_1t^4+\cdots)$$

$$+\frac{1}{2}m_2ab(\ddot{\theta}_{20}+6A_2t+12B_2t^2+\cdots)$$

$$\cdot\left[\frac{1}{2}(\ddot{\theta}_{10}-\ddot{\theta}_{20})t^2+(A_1-A_2)t^3\right.$$

$$\left.+(B_1-B_2)t^4+\cdots\right]$$

$$-\frac{1}{2}m_2ab(\ddot{\theta}_{20}t+3A_2t^2+4B_2t^3+\cdots)^2$$

$$\cdot\left\{1-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\ddot{\theta}_{10}-\ddot{\theta}_{20})t^2+\cdots\right]^2\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}m_1+m_2\right)ga\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ddot{\theta}_{10}t^2+A_1t^3+\cdots\right)^2\right] \tag{6}$$

$$\frac{1}{3}m_2b^2(\ddot{\theta}_{20}+6A_2t+12B_2t^2+20C_2t^3+30D_2t^4+\cdots)$$

$$+\frac{1}{2}m_2ab(\ddot{\theta}_{10}+6A_1t+12B_1t^2+20C_1t^3+30D_1t^4+\cdots)$$

$$\cdot\left[\frac{1}{2}(\ddot{\theta}_{10}-\ddot{\theta}_{20})t^2+(A_1-A_2)t^3+\cdots\right]$$

$$+\frac{1}{2}m_2ab(\ddot{\theta}_{10}t+3A_1t^2+4B_1t^3+\cdots)^2\left\{1-\frac{1}{2}\right.$$

$$\left.\cdot\left[\frac{1}{2}(\ddot{\theta}_{10}-\ddot{\theta}_{20})t^2+\cdots\right]^2\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}m_2gb\left(\frac{1}{2}\ddot{\theta}_{20}t^2+A_2t^3+B_2t^4+C_2t^5+\cdots\right) \tag{7}$$

分别对(6)和(7)比较t的同次幂，得

t^0:

$$\left(\frac{1}{3}m_1+m_2\right)a^2\ddot{\theta}_{10}=\left(\frac{1}{2}m_1+m_2\right)ag$$

$$\frac{1}{3}m_2b^2\ddot{\theta}_{20}=0$$

t^1:

$$\left(\frac{1}{3}m_1+m_2\right)6A_1a^2=0$$

$$2m_2b^2A_2=0$$

t^2:

$$\left(\frac{1}{3}m_1+m_2\right)\cdot 12B_1a^2+\frac{1}{4}m_2ab\ddot{\theta}_{20}(\ddot{\theta}_{10}-\ddot{\theta}_{20})$$

$$-\frac{1}{2}m_2ab\ddot{\theta}_{20}^2=0$$

$$4m_2b^2B_2+\frac{1}{4}m^2ab(\ddot{\theta}_{10}-\ddot{\theta}_{20})\ddot{\theta}_{10}$$

$$+\frac{1}{2}m_2ab\ddot{\theta}_{10}^2=-\frac{1}{4}m_2gb\ddot{\theta}_{20}$$

t^3:

$$\left(\frac{1}{3}m_1+m_2\right)\cdot 20a^2C_1+\frac{1}{2}m_2ab[3A_2(\ddot{\theta}_{10}$$

$$-\ddot{\theta}_{20})+\ddot{\theta}_{20}(A_1-A_2)]-3m_2abA_2\ddot{\theta}_{20}=0$$

$$\frac{30}{3}m_2b^2c_2+\frac{1}{2}m_2ab[\ddot{\theta}_{10}(A_1-A_2)+3A_1$$

$$\cdot(\ddot{\theta}_{10}-\ddot{\theta}_{20})]+3m_2abA_1\ddot{\theta}_{10}=-\frac{1}{2}m_2gbA_2$$

t^4:

$$\left(\frac{1}{3}m_1+m_2\right)a^2\cdot 30D_1+\frac{1}{2}m_2ab[\ddot{\theta}_{20}(B_1-B_2)$$

$$+bA_2(A_1-A_2)+6B_2(\ddot{\theta}_{10}-\ddot{\theta}_{20})]$$

$$-\frac{1}{2}m_2ab(9A_2^2+8\ddot{\theta}_{20}B_2)=-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}m_1+m_2\right)ga\ddot{\theta}_{10}^2$$

$$10m_2b^2D_2+\frac{1}{2}m_2ab[\ddot{\theta}_{10}(B_1-B_2)+6A_1(A_1-A_2)$$

$$+6B_1(\ddot{\theta}_{10}-\ddot{\theta}_{20})]$$

$$+\frac{1}{2}m_2ab(9A_1^2+8\ddot{\theta}_{10}B_1)=-\frac{1}{2}m_2gbB_2$$

由此解得

$$\ddot{\theta}_{10}=\frac{3g(m_1+2m_2)}{2a(m_1+3m_2)},\quad \ddot{\theta}_{20}=0,\quad A_1=B_1=A_2$$

$$=C_1=C_2=0,$$

$$B_2=-\frac{3a}{16b}\left[\frac{3g(m_1+3m_2)}{2a(m_1+3m_2)}\right]^2,$$

$$D_2=-\frac{3am_1g}{640b^2(m_1+3m_2)}\left[\frac{3g(m_1+2m_2)}{2a(m_1+3m_2)}\right]^2$$

于是

$$\theta_1=\frac{3g(m_1+2m_2)}{4a(m_1+3m_2)}t^2+O(t^6) \qquad (8)$$

$$\theta_2=-\frac{3a}{16b}\left[\frac{3g(m_1+2m_2)}{2a(m_1+3m_2)}\right]^2 t^4$$

$$-\frac{3m_1ag}{640b^2(m_1+3m_2)}\left[\frac{3g(m_1+2m_2)}{2a(m_1+3m_2)}\right]^2 t^6$$

$$+O(t^8) \qquad (9)$$

现在求D处的初始路径。令D的坐标为x，y，考虑到(8)和(9)，则

$$x=a-a\cos\theta_1+\frac{2}{3}b\sin\theta_2\approx\frac{2}{3}b\theta_2+\frac{1}{2}a\theta_1^2$$

$$=-\frac{9g^2m_1(m_1+2m_2)^2}{1280ab(m_1+3m_2)^3}t^6+O(t^8) \qquad (10)$$

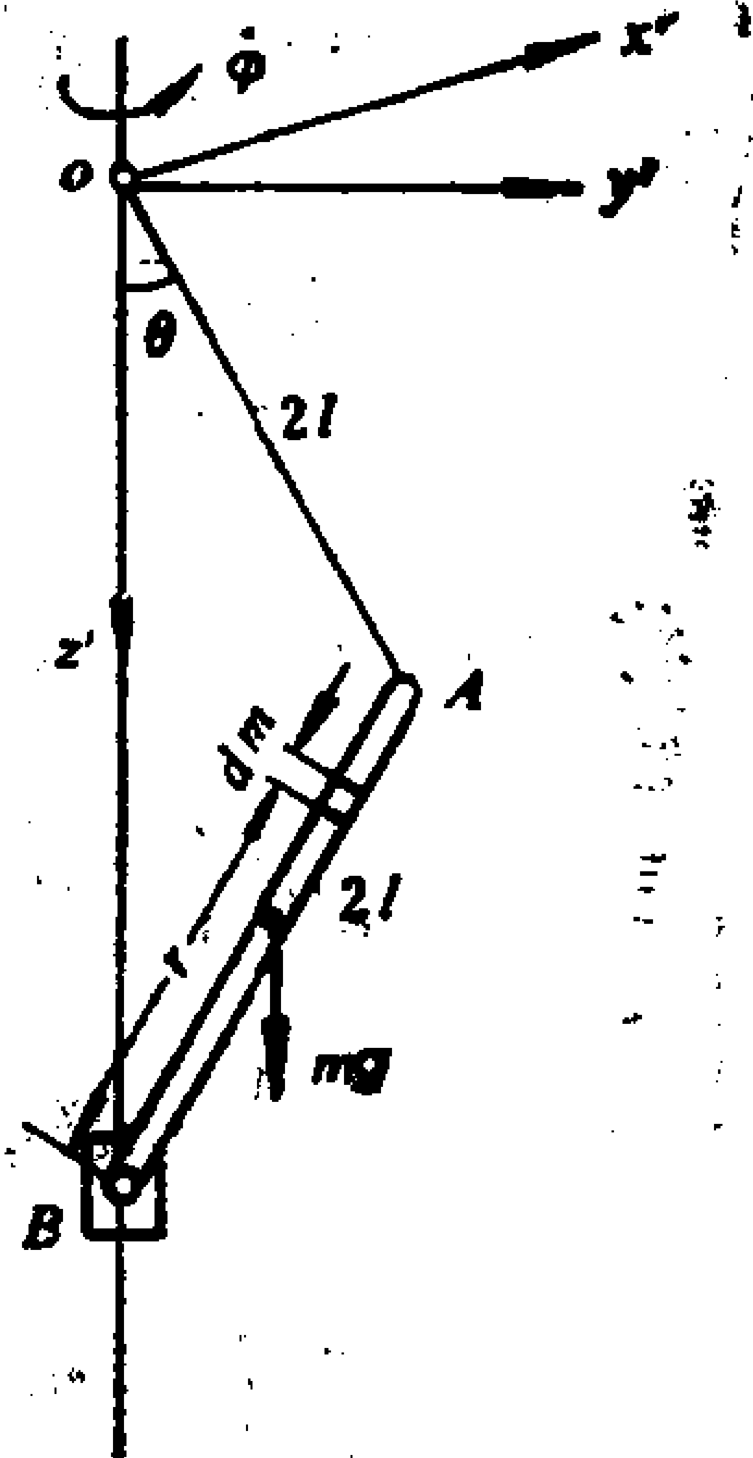
$$y=a\sin\theta_1+\frac{2}{3}b\cos\theta_2-\frac{2}{3}b\approx a\theta_1-\frac{1}{3}b\theta_2^2$$

$$=\frac{3g(m_1+2m_2)}{4(m_1+3m_2)}t^2+O(t^6) \qquad (11)$$

由(10)和(11)去掉高次项，近似地有

$$y=-60\left(1+\frac{2m_2}{m}\right)abx \qquad (12)$$

例5-8 长$2l$的匀质杆AB的一端B可以沿铅垂的转动轴上下运动，另一端A以长$2l$的软绳与轴上o点相连如图示。



例5-8图

(1) 以θ与φ为广义坐标，列写AB杆的运动微分方程。

(2) 用方程(5.15)列写AB杆的相对运动微分方程。

[解] (1) 首先列写AB杆的动能(绝对运动)。任取微元dm，离B为r。微元的坐标为

$$y'=r\sin\theta,\ z'=(4l-r)\cos\theta$$

于是

$$\dot{y}'=r\dot{\theta}\cos\theta,\ \dot{z}'=-(4l-r)\dot{\theta}\sin\theta$$

微元的速度平方为

$$v^2=\dot{y}^{2\prime}+\dot{z}^{2\prime}+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta=r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta$$
$$+(4l-r)^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta$$

于是，杆的动能为

$$T=\frac{1}{2}\int v^2dm=\frac{1}{2}\int_0^{2l}[r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta+(4l-r)^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta$$
$$+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta]\frac{m}{2l}dr$$
$$=\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{4}{3}\dot{\theta}^2+8\dot{\theta}^2\sin^2\theta+\frac{4}{3}\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\qquad(1)$$

其次，计算广义力。重力mg的元功为

$$mg\delta[3l\cos\theta]=-3mgl\sin\theta\delta\theta$$

相应的广义力为

$$Q_\theta = -3mgl\sin\theta,\ Q_\varphi = 0 \qquad (2)$$

最后，列写杆的绝对运动微分方程。系统的拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial T}{\partial\theta} = Q_\theta,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = Q_\varphi \qquad (3)$$

将(1)和(2)代入(3)，得到

$$\left.\begin{aligned} & ml^2\left(\frac{4}{3}\ddot\theta + 8\ddot\theta\sin^2\theta\right) + 8ml^2\dot\theta^2\sin\theta\cos\theta \\ & -\frac{4}{3}ml^2\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta = -3mgl\sin\theta \\ & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{4}{3}ml^2\dot\varphi\sin^2\theta\right) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

(2) 为列写相对运动方程，我们按(5.15)计算Tr, Q_θ，T_θ，Q_θ^*，V^0以及V^ω。

系统相对运动动能

$$Tr = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m(9l^2\dot\theta^2\sin^2\theta + l^2\dot\theta^2\cos^2\theta) \qquad (5)$$

因$\bar{V}_0 = 0$，故

$$V^0 - m(\overset{*}{v}_0 + \omega x v_0)\cdot r_c' = 0 \qquad (6)$$

又

$$V^\omega = -\frac{1}{2}\omega\cdot\bar{\theta}^0\cdot\omega \qquad (7)$$

而

$$\omega = -\dot\varphi k' \qquad (8)$$

对o的惯量张量写成并矢形式

$$\theta_{o}=J_{11}\boldsymbol{i}'\boldsymbol{i}'-J_{12}\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'-J_{13}\boldsymbol{i}'\boldsymbol{k}'-J_{21}\boldsymbol{j}'\boldsymbol{i}'$$
$$+J_{22}\boldsymbol{j}'\boldsymbol{j}'-J_{23}\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}'-J_{31}\boldsymbol{k}'\boldsymbol{i}'-J_{32}\boldsymbol{k}'\boldsymbol{j}'$$
$$+J_{33}\boldsymbol{k}'\boldsymbol{k}'$$

容易计算得

$$J_{33}=J_{z'}=\frac{4}{3}ml^2\sin^2\theta,\qquad J_{22}=\frac{16}{3}ml^2\cos^2\theta$$

$$J_{11}=J_{12}=J_{13}=0,\qquad J_{23}=\frac{4}{3}ml^2\sin\theta\cos\theta$$

于是

$$V^{\omega}=-\frac{1}{2}(-\dot{\varphi}\boldsymbol{k}')\cdot\Big(\frac{16}{3}ml^2\cos^2\theta\boldsymbol{j}'\boldsymbol{j}'$$
$$-\frac{4}{3}ml^2\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}'-\frac{4}{3}ml^2\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{k}'\boldsymbol{j}'$$
$$+\frac{4}{3}ml^2\sin^2\theta\boldsymbol{k}'\boldsymbol{k}'\Big)\cdot(-\dot{\varphi}\boldsymbol{k}')$$
$$=-\frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \tag{9}$$

下面计算Γ_θ和$Q_\theta^{\dot{\omega}}$。我们有

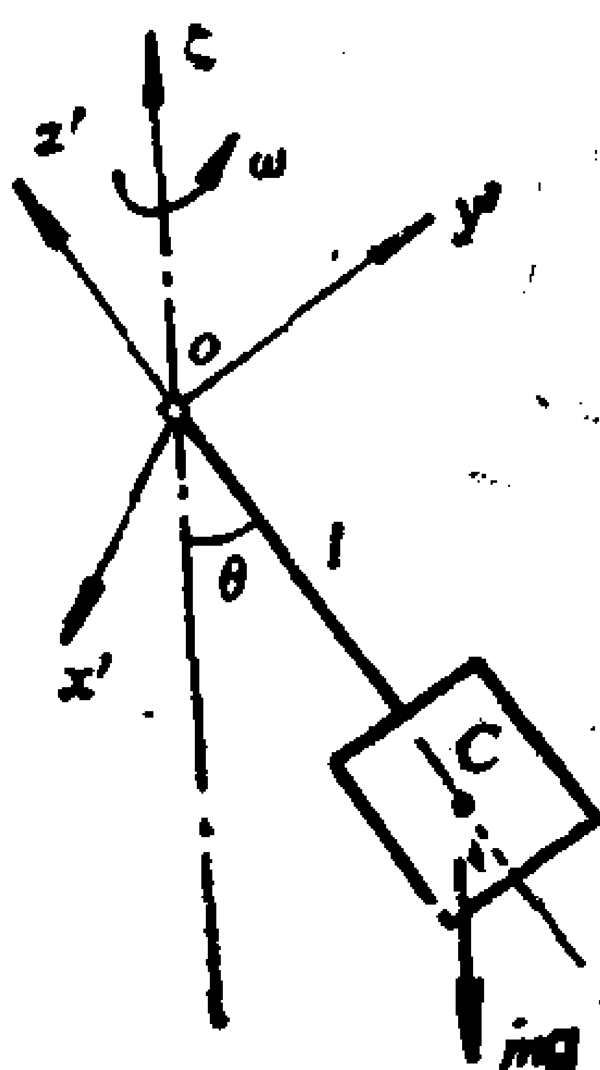
$$\Gamma_\theta=-\sum_{i=1}^{N}m_i(2\omega\times\overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}'_i}{\partial\theta}$$
$$=-\int(-2\dot{\varphi}\boldsymbol{k}')\times[r\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{j}'-(4l-r)\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{k}']$$
$$\cdot[r\cos\theta\boldsymbol{j}'-(4l-r)\sin\theta\boldsymbol{k}']\mathrm{d}m=0 \tag{10}$$

$$Q_\theta^{\dot{\omega}}=-\sum_{i=1}^{N}(\dot{\omega}\times m_i\boldsymbol{r}'_i)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}'_i}{\partial\theta}=0 \tag{11}$$

现将(5)、(6)、(7)、(9)、(10)和(11)代入方程(5.15)，得到

$$\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta}+8ml^2\ddot{\theta}\sin^2\theta+8ml^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta$$

$$=\frac{4}{3}ml^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta-3mgl\sin\theta \tag{12}$$



例5-9图

例5-9 一重物可绕过o点的水平轴转动，同时此水平轴又以匀角速度ω绕铅垂轴ζ转动，如图示。设重物对于过o的三个主轴ox'，oy'，oz'的转动惯量为A、B、C，重物的质心C与o的距离为l。试确定重物的相对平衡位置并讨论其稳定性。

[解] 取θ为广义坐标，方程(5.22)给出

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(V+V^0+V^*)=0 \tag{1}$$

设重物质量为m，我们有

$$V=-mgl\cos\theta \tag{2}$$

因点o固定，故

$$V^0=0 \tag{3}$$

现在求V^*。我们有

$$V^*=-\frac{1}{2}\omega\cdot\overset{=}{\theta}{}^0\cdot\omega$$

$$=-\frac{1}{2}(\omega\sin\theta\boldsymbol{j}'+\omega\cos\theta\boldsymbol{k}')\cdot(A\boldsymbol{i}'\boldsymbol{i}'+B\boldsymbol{j}'\boldsymbol{j}'$$

$$+C\boldsymbol{k}'\boldsymbol{k}')\cdot(\omega\sin\theta\boldsymbol{j}'+\omega\cos\theta\boldsymbol{k}')$$

$$=-\frac{1}{2}\omega^2(B\sin^2\theta+C\cos^2\theta) \tag{4}$$

将(2)、(3)和(4)代入(1)，得到

$$\sin\theta[mgl+(C-B)\omega^2\cos\theta]=0 \tag{5}$$

由此可确定相对平衡位置。

当$\sin\theta=0$时，有

$$\theta=0\ ,\ \theta=\pi \tag{6}$$

当$mgl+(C-B)\omega^2\cos\theta=0$时，有

$$\cos\theta=\frac{mgl}{(B-C)\omega^2}$$

即

$$\theta=\arccos\frac{mgl}{(B-C)\omega^2} \tag{7}$$

此平衡位置仅当

$$(B-C)\omega^2>mgl\text{或}(B-C)\omega^2<-mgl$$

时才成立。

下面研究相对平衡位置(6)和(7)的稳定性。我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(V+V^0+V^\omega)&=\sin\theta[(B-C)\omega^2\sin\theta]\\&\quad+\cos\theta[mgl+(C-B)\omega^2\cos\theta]\\&=(B-C)\omega^2\sin^2\theta+\cos\theta[mgl+(C-B)\omega^2\cos\theta]\end{aligned} \tag{8}$$

(1) 平衡位置$\theta=0$的稳定性

此时，重物在最低位置，有

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(V+V^0+V^\omega)\bigg|_{\theta=0}=mgl+(C-B)\omega^2$$

1° 当$C\geqslant B$时，不论ω为何值，$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(V+V^0+V^\omega)\Big|_{\theta=0}>0$，即$\theta=0$这一相对平衡位置是稳定的。

2° 当$C<B$时，如果$\omega^2<mgl/(B-C)$，则二次导数值为正，$\theta=0$是稳定的；如果$\omega^2>mgl/(B-C)$，则二次导数值为负，$\theta=0$是不稳定的；如果$\omega^2=mgl/(B-C)$，则需考察高阶导数。当$\omega^2=mgl/(B-C)$时，(9)式可写成

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(V+V^0+V^\omega)=(B-C)\omega^2(\cos\theta-\cos2\theta)$$

于是，有

$$\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}(V+V^0+V^\omega)=(B-C)\omega^2(-\sin\theta+2\sin2\theta)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}(V+V^0+V^\omega)\Big|_{\theta=0}=0$$

$$\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}(V+V^0+V^\omega)=(B-C)\omega^2(-\cos\theta+4\cos2\theta)$$

$$\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}(V+V^0+V^\omega)\Big|_{\theta=0}=3(B-C)\omega^2>0$$

因此，在此临界状态下，$\theta=0$这一位置也是稳定的。

(2) 平衡位置$\theta=\pi$的稳定性。此时，有

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(V+V^0+V^\omega)\Big|_{\theta=\pi}=(C-B)\omega^2-mgl$$

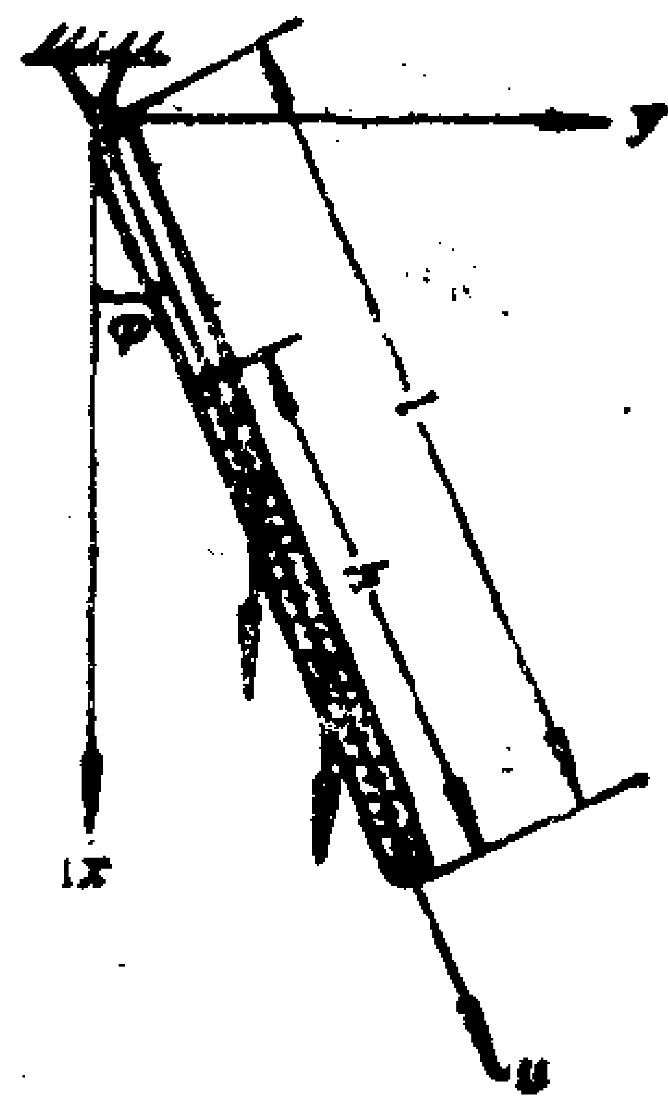
仅当$C>B$，且$\omega^2>mgl/(C-B)$时，这一相对平衡位置才是稳定的。

(3) 平衡位置$\theta=\arccos\dfrac{mgl}{(B-C)\omega^2}$的稳定性。当$B>C$时，$(B-C)\omega^2>mgl$，此时$0<\theta_1<\pi/2$；而当$B<C$时，$(C-B)\omega^2>mgl$，此时$\pi/2<\theta_1<\pi$。而由(9)，知

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(V+V^0+V^\omega)\Big|_{\theta}=(B-C)\omega^2\sin^2\theta$$

当$B>C$时，二次导数为正；当$B<C$时，二次导数为负。因此，如果在o与π之间存在一个相对平衡位置，那么，$\theta>\pi/2$时是不稳定的；$\theta<\pi/2$时是稳定的。

例5-10 物理摆是个质量为M长为l的、装满从中流出液体的细管。管中液体质量按规律$m(t)=\rho h(t)$变化，式中$h(t)$是液柱高度。假设流动部分液体无阻力地在均匀重力场中运动，试列写管的运动微分方程。



例5-10图

［解］：取φ为广义坐标，利用普通导数表示的方程(5-28)。因质量仅依赖于时间，而不依赖于坐标和速度，故(5-28)给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_{\varphi}+\sum_{i=1}^{N}m_i(\boldsymbol{u}_i+\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial\varphi} \tag{1}$$

今计算方程(1)中各项。

管的动能为

$$T_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}Ml^2\dot{\varphi}^2 \tag{2}$$

液体的动能为

$$T_2=\frac{1}{2}\int_{l-h}^{l}r^2\dot{\varphi}^2\rho\,\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\rho h\left(l^2-lh^2+\frac{h^2}{3}\right)\dot{\varphi}^2 \tag{2}$$

系统动能为

$$T=T_1+T_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}Ml^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}\rho h\left(l^2-lh^2\right.$$

$$\left.+\frac{h^2}{3}\right)\dot{\varphi}^2 \tag{3}$$

再求广义力Q_φ。它的虚功等于管的重力Mg及液体重力的虚功之和，即

$$Q_\varphi\delta\varphi=Mg\delta\left(\frac{l}{2}\cos\varphi\right)+mg\,\delta\left[\left(l-\frac{h}{2}\right)\cos\varphi\right]$$

于是

$$Q_\varphi=-Mg\frac{l}{2}\sin\varphi-mg\left(l-\frac{h}{2}\right)\sin\varphi \tag{4}$$

最后计算广义反推力。我们有

$$P_\varphi=\sum m_i(u_i+\dot{r}_i)\cdot\frac{\partial r_i}{\partial\varphi}=m\,\dot{r}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial\varphi}$$

其中r为管端矢径

$$\bar{r}=l\cos\varphi\boldsymbol{i}+l\sin\varphi\boldsymbol{j}$$

而

$$\dot{\bar{r}}=-l\dot{\varphi}\sin\varphi\boldsymbol{i}+l\,\dot{\varphi}\cos\varphi\boldsymbol{j}$$

于是

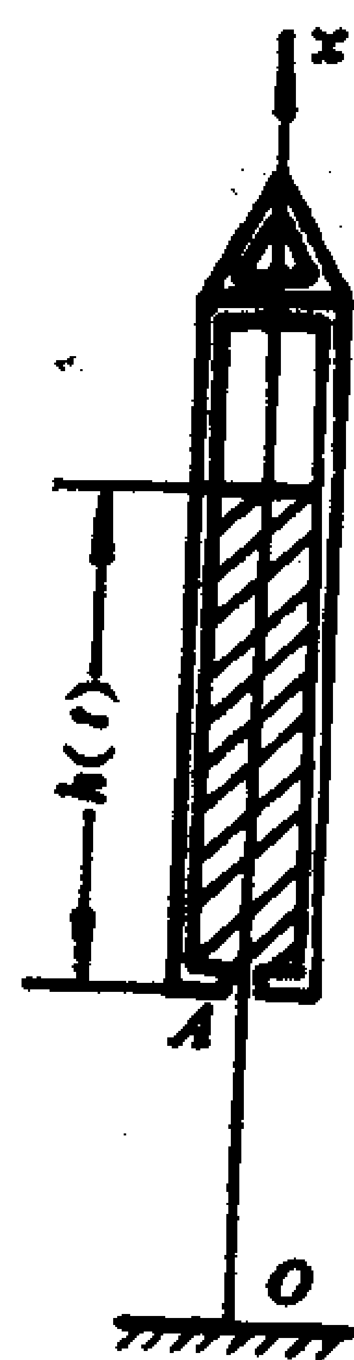
$$P_\varphi=ml^2\,\dot{\varphi}=\rho hl^2\dot{\varphi} \tag{5}$$

将(3)、(4)和(5)代入方程(1)，得到

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{3}Ml^2\,\dot{\varphi}+\rho h\left(l^2-lh+\frac{h^2}{3}\right)\dot{\varphi}\right\}$$

$$=\rho hl^2\dot{\varphi}-Mg\frac{l}{2}\sin\varphi-mg\left(l-\frac{h}{2}\right)\sin\varphi \tag{6}$$

例5-11 火箭燃烧室是一半径为R、高为h_0的圆柱，装满了密度为ρ的均质固体燃料。燃料燃烧时所形成的气体经过圆柱端面上半径为r的孔A喷出。随着燃料不断烧掉，专门装置将药柱推向出口，使燃烧直接在A孔处进行，火箭壳体质量等于M；通过A孔的气体密度可认为是常量，等于ρ_0。不计空气阻力，如果药柱高度在其燃烧时按规律$h=h(t)$变化，试列写火箭铅垂运动的微分方程。



例5-11图

［解］ 设火箭向上速度为$\dot{x}$，则燃料速度为$\dot{x}+\dot{h}$。系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m(t)(\dot{x}+\dot{h})^2 \tag{1}$$

其中M为壳体质量，$m(t)$为燃料质量。设气体喷出时相对壳体的速度为u，方向向下，则

$$\rho_0\pi r^2u=-\rho\pi R^2\dot{h} \tag{2}$$

相对分离速度为$u+\dot{h}$，反推力为

$$\Psi_x=-\dot{m}(u+\dot{h}) \tag{3}$$

而广义力为

$$Q_x=-Mg-m(t)g \tag{4}$$

变质量系统的运动方程(5-24)给出

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{\text{Д}T}{\text{Д}\dot{x}}-\frac{\text{Д}T}{\text{Д}x}=Qx+\Psi x \tag{5}$$

将(1)，(3)和(4)代入方程(5)，得到

$$M\ddot{x}+m(t)(\ddot{x}+\ddot{h})=-\dot{m}(u+\dot{h})-Mg-m(t)g \tag{6}$$

其中

$$u=-\frac{\rho R^2}{\rho_0 r^2}h,\ m(t)=\rho\pi R^2 h \tag{7}$$

如果利用半凝固导数表示的方程(5.26)，亦可得到同样的结果。实际上，方程(5.26)给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\text{Д}T}{\text{Д}\dot{x}}-\frac{\text{Д}T}{\text{Д}x}=Qx+\Phi x \tag{8}$$

这里

$$\Phi_x=\dot{m}(\dot{x}-u) \tag{9}$$

将(1)、(4)和(9)代入(8)，便得方程(6)。

例5-12 试计算二自由度系统

$$q_2^2\ddot{q}_1+\frac{1}{2}q_1q_2\ddot{q}_2+2q_2\dot{q}_1\dot{q}_2-\frac{1}{2}q_1\dot{q}_2^2$$

$$-2q_1^3-q_1q_2^2=0$$

$$q_1^2\ddot{q}_2+\frac{1}{2}q_1q_2\ddot{q}_1+2q_1\dot{q}_1\dot{q}_2-\frac{1}{2}q_2\dot{q}_1^2$$

$$-2q_2^3-q_2q_1^2=0$$

的拉格朗日函数。

[解] 用 *Santilli* 方法。对此问题，有

$$\left.\begin{aligned}&A_{11}=q_2^2,\ A_{12}=\frac{1}{2}q_1q_2,\ B_1=2q_2\dot{q}_1\dot{q}_2\\&\qquad\qquad-\frac{1}{2}q_1\dot{q}_2^2-2q_1^3-q_1q_2^2\\&A_{21}=\frac{1}{2}q_1q_2,\ A_{22}=q_1^2,\ B_2=2q_1\dot{q}_1\dot{q}_2\\&\qquad\qquad-\frac{1}{2}q_2\dot{q}_1^2-2q_2^3-q_2q_1^2\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

首先构造K，由(5-48)给出

$$K=\dot{q}_1\int_0^1\left\{\int_0^1 q_2^2\mathrm{d}\tau\right\}\mathrm{d}\tau'\dot{q}_1+\dot{q}_1\int_0^1\left\{\int_0^1\frac{1}{2}q_1q_2\mathrm{d}\tau\right\}$$

$$\mathrm{d}\tau'\dot{q}_2+\dot{q}_2\int_0^1\left\{\int_0^1\frac{1}{2}q_1q_2\mathrm{d}\tau\right\}\mathrm{d}\tau\dot{q}_1$$

$$+\dot{q}_2\int_0^1\left\{\int_0^1 q_1^2\mathrm{d}\tau\right\}\mathrm{d}\tau'\dot{q}_2=\frac{1}{2}\Big(\dot{q}_1^2q_2^2$$

$$+q_1q_2\dot{q}_1\dot{q}_2+\dot{q}_2^2q_1^2\Big) \qquad (2)$$

其次，按(5-46)计算Z_{ij}。我们有

$$Z_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_1}{\partial\dot{q}_2}-\frac{\partial B_2}{\partial\dot{q}_1}\right)+\left(\frac{\partial^2K}{\partial q_1\partial\dot{q}_2}-\frac{\partial^2K}{\partial\dot{q}_1\partial q_2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}[(2q_2\dot{q}_1-q_1\dot{q}_2)-(2q_1\dot{q}_2-q_2\dot{q}_1)]+$$

$$+\left(\frac{1}{2}q_2\dot{q}_1+2q_1\dot{q}_2-\frac{1}{2}q_1\dot{q}_2-2\dot{q}_1q_2\right)$$

$$=0$$

$$Z_{11}=Z_{22}=Z_{21}=0$$

于是，由(5-44)得

$$D_1=D_2=0 \qquad (3)$$

最后，按(5-47)计算W_i，我们有

$$W_1=\frac{\partial D_1}{\partial t}-B_1-\frac{\partial K}{\partial q_1}+\frac{\partial^2K}{\partial\dot{q}_1\partial t}+\left[\frac{\partial^2K}{\partial q_1\partial\dot{q}_2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_1}{\partial\dot{q}_2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial B_2}{\partial\dot{q}_1}\right)\right]\dot{q}_2=-2q_2\dot{q}_1\dot{q}_2+\frac{1}{2}q_1\dot{q}_2^2+2q_1^3+q_1q_2^2$$

$$-\frac{1}{2}q_2\dot{q}_1\dot{q}_2-q_1\dot{q}_2^2+\left[\frac{1}{2}q_2\dot{q}_1+2q_1\dot{q}_2\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(3\dot{q}_1 q_2-3q_1\dot{q}_2\right)\Big]\dot{q}_2$$

$$=-\frac{1}{2}q_2\dot{q}_1\dot{q}_2+2q_1^3+q_1q_2^2 \qquad (4)$$

$$W_2=\frac{\partial D_2}{\partial t}-B_2-\frac{\partial K}{\partial q_2}+\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_2\partial t}+\Big[\frac{\partial^2 K}{\partial q_2\partial \dot{q}_1}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_2}{\partial \dot{q}_1}-\frac{\partial B_1}{\partial \dot{q}_2}\right)\Big]\dot{q}_1$$

$$=-2q_1\dot{q}_1\dot{q}_2+\frac{1}{2}q_2\dot{q}_1^2+2q_2^3+q_2\dot{q}_1^2$$

$$-\dot{q}_1^2q_2-\frac{1}{2}q_1\dot{q}_1\dot{q}_2+\Big[\frac{1}{2}q_1\dot{q}_2+2\dot{q}_1q_2$$

$$+\frac{1}{2}\left(3q_1\dot{q}_2-3q_2\dot{q}_1\right)\Big]\dot{q}_1$$

$$=-\frac{1}{2}q_1\dot{q}_1\dot{q}_2+2q_2^3+q_2q_1^2 \qquad (5)$$

将(4)和(5)代入(5-45)，得

$$C=\int_0^1\left(-\frac{1}{2}\tau q_2\dot{q}_1\dot{q}_2+2\tau^3q_1^3+\tau^3q_1q_2^2\right)q_1\mathrm{d}\tau$$

$$+\int_0^1\left(-\frac{1}{2}\tau q_1\dot{q}_1\dot{q}_2+2\tau^3q_2^3+\tau^3q_2q_1^2\right)q_2\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2}\left(q_1^4+q_2^4+q_1^2q_2^2\right) \qquad (6)$$

将(2)、(3)和(6)代入(5-42)，得问题的拉格朗日函数

$$L=K+D_1\dot{q}_1+D_2\dot{q}_2+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2q_2^2+q_1q_2\dot{q}_1\dot{q}_2+\dot{q}_2^2q_1^2\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(q_1^4+q_2^4+q_1^2q_2^2\right) \qquad (7)$$

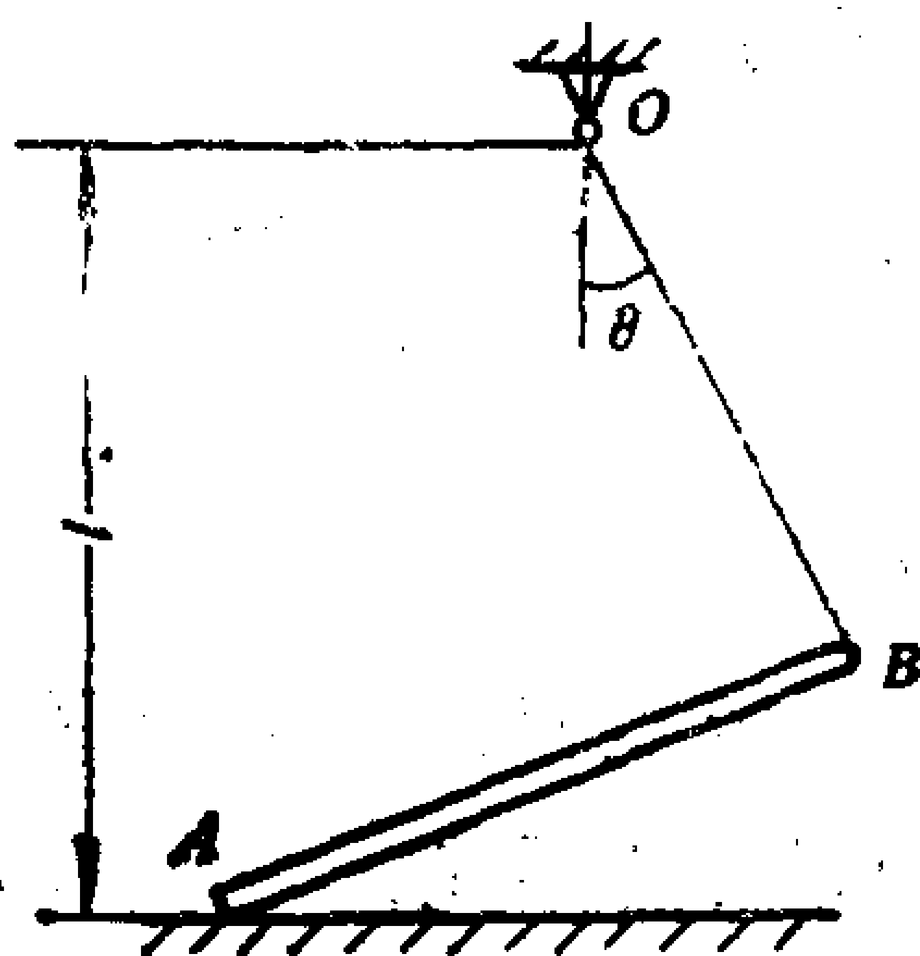
三、习题

5-1　质量为m、长为l的匀质杆AB，一端B以长l的软绳OB拉住，另一端A沿光滑水平轨道运动。当其平衡时，OB在铅垂位置，而AB在水平位置。试用多余坐标法求其作微振动的周期。

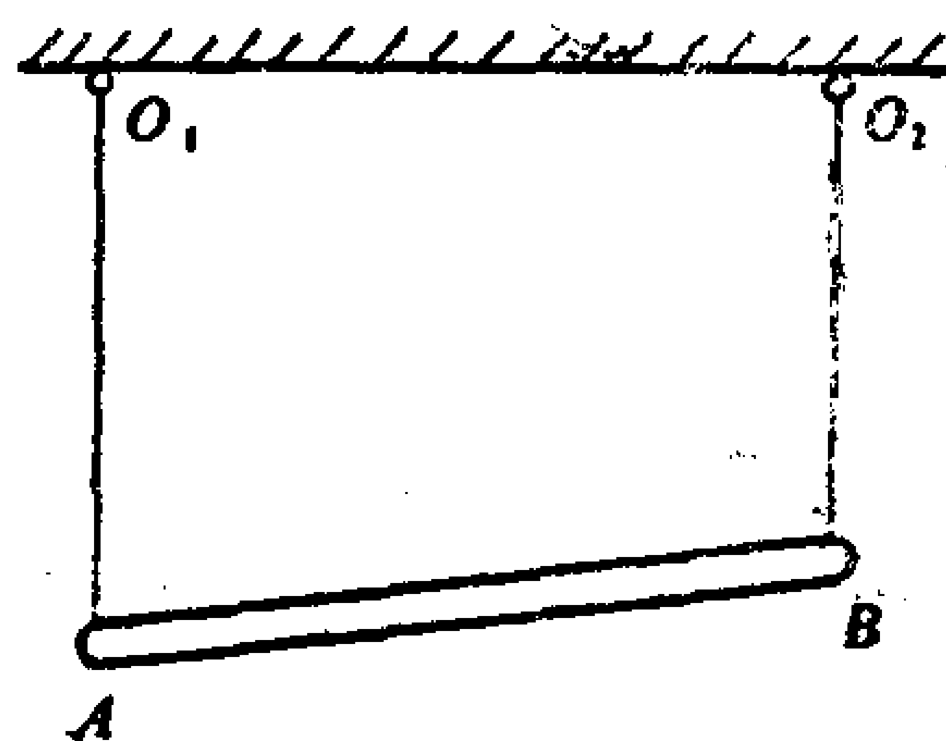
答：$2\pi\sqrt{\frac{2l}{g}}$

5-2　匀质杆AB用长l_1和l_2的软绳O_1A，O_2B挂起如图示。平衡时，软绳都在铅垂位置。试用多余坐标法求其微振动的周期。

答：$2\pi\sqrt{\frac{2l_1l_2}{(l_1+l_2)g}}$



题5-1图



题5-2图

5-3　一光滑曲线呈螺线，其方程在柱坐标中表为 $z=a\varphi$，$\rho=b$，其中a，b是常数。一质量为m的小珠沿螺线自由滑动，受到原点的引力作用，引力大小与距离成比例，比例系数为 k。试用多余坐标法确定小珠的运动以及线的反力的分量。

答：运动规律为$z=A\sin(\omega t+\beta)$，其中A，B为常数，$\omega^2=\dfrac{k}{m}\dfrac{a^2}{a^2+b^2}$。约束反力分量为$N_\rho=kb-\dfrac{mb\dot{z}^2}{a^2}$，

$$N_\varphi=\frac{mb}{a}\ddot{z}，N_z=kz+m\ddot{z}。$$

5-4　一质点在重力作用下由光滑球面顶点静止地开始向下运动。试用多余坐标法证明，当 $\cos\theta=2/3$ 时，质点离开球面，其中 θ 为铅垂直径和通过质点的球面法线间的夹角。

5-5　半径为a、质量为m的实圆柱A停在半径为b的圆柱B的顶点。两圆柱的轴彼此平行并是水平的。圆柱 A 由平衡位置扰动并沿圆柱 B无滑动地滚动。利用多余坐标法确定约束反力N_r，N_θ，并求两圆柱分离时的位置θ_f，其中 r 为两柱心距离，θ为柱心联线与铅垂线间的夹角。

答：$N_r=\dfrac{7}{3}mg\cos\theta-\dfrac{4}{3}mg$，$N_\theta=-\dfrac{1}{3}mg\sin\theta$，

$$\theta_f=\cos^{-1}\left(\frac{4}{7}\right)$$

5-6　一质量为m的质点P在指向定点O，大小为$f(r)$的力作用下沿平面运动，其中r为O和P间的距离。取极坐标为广义坐标：$q_1=r$，$q_2=\theta$，取准速度为$\omega_1=\dot{r}$，$\omega_2=\dot{A}$，其中$\dot{A}=r^2\dot{\theta}/2$为线$OP$单位时间扫过的面积。试按公式(5-4)计

算$\gamma^l_{mk}(m,k=1,2)$，并建立准坐标下的方程(5-3)。

答：$\gamma^2_{12}=\dfrac{2}{r}$，$\gamma^2_{21}=-\dfrac{2}{r}$，其余$\gamma^l_{mk}=0$；准坐标下的方程为$m\omega_1-\dfrac{4\omega_2^2}{r^3}=f(r)$，$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{4m\omega_2}{r^2}\right)+\dfrac{8m\omega_2\omega_1}{r^3}=0$，返回到极坐标表示为$m\ddot{r}-\dfrac{4m\dot{A}^2}{r^3}=f(r)$，$\ddot{A}=0$。

5-7　设某力学系统的位置由八个广义坐标$q_1=x$，$q_2=y$，$q_3=\theta$，$q_4=\chi$，$q_5=\varphi_1$，$q_6=\varphi_2$，$q_7=\varphi_3$，$q_8=\varphi_4$来确定，取准速度如下：

$$\omega_1=\dot{x}\cos(\theta+\chi)+\dot{y}\sin(\theta+\chi)$$
$$\omega_2=\dot{\chi}$$
$$\omega_3=-\dot{x}\sin(\theta+\chi)+\dot{y}\cos(\theta+\chi)$$
$$\omega_4=-\dot{x}\sin\theta+\dot{y}\cos\theta-l\dot{\theta}$$
$$\omega_5=\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta-a\dot{\theta}-r_1\dot{\varphi}_1$$
$$\omega_6=\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta+a\dot{\theta}-r_1\dot{\varphi}_2$$
$$\omega_7=\dot{x}\cos(\theta+\chi)+\dot{y}\sin(\theta+\chi)-c(\dot{\theta}+\dot{\chi})-r_2\dot{\varphi}_3$$
$$\omega_8=\dot{x}\cos(\theta+\chi)+\dot{y}\sin(\theta+\chi)+c(\dot{\theta}+\dot{\chi})-r^2\dot{\varphi}_4$$

试计算波兹曼三标记号γ^l_{mk}。

答：

$$\gamma^3_{31}=-\gamma^3_{13}=-\frac{\cos\chi}{l},\gamma^3_{41}=-\gamma^3_{14}=\frac{1}{l},\gamma^3_{12}=-\gamma^3_{21}=1,$$

$$\gamma^4_{13}=-\gamma^4_{31}=\frac{1}{l},\quad \gamma^4_{34}=-\gamma^4_{43}=\frac{\sin\chi}{l},$$

$$\gamma^4_{41}=-\gamma^4_{14}=\frac{\cos\chi}{l},\quad \gamma^r_{34}=-\gamma^r_{43}=\frac{\cos\chi}{l},$$

$$\gamma_{14}^{r}=-\gamma_{41}^{r}=\frac{\sin\chi}{l}(r=5,6)$$

$$\gamma_{34}^{r}=-\gamma_{43}^{r}=\frac{1}{l},\ \gamma_{31}^{r}=-\gamma_{13}^{r}=\frac{\sin\chi}{l},$$

$$\gamma_{23}^{r}=-\gamma_{32}^{r}=1(r=7,8,1,2)$$

5-8 如果准速度与广义速度相互表示为非线性关系 $\dot{q}_r=\varphi_r(q_k,\omega_k,t)$，$\omega_k=\dot{\psi}_k(q_r,\dot{q}_r,t)$，试用达朗伯——拉格朗日原理导出一般形式准坐标下的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial\omega_k}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial\omega_s}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\psi_s}{\partial\dot{q}_r}-\frac{\partial\psi_s}{\partial q_r}\right)\frac{\partial\varphi_r}{\partial\omega_k}-\frac{\partial T^*}{\partial\pi_k}=P_k^*$$

其中

$$T^*(q_r,\omega_k,t)=T(q_r,\varphi_r(q_k,\omega_k,t),t)$$

$$P_k^*=\sum_{s=1}^{n}Q_s\frac{\partial\varphi_s}{\partial\omega_k},\quad \frac{\partial}{\partial\pi_k}=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial\varphi_r}{\partial\omega_k}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_r}$$

5-9 半径为R，质量为m的匀质圆盘中心用刚度为 c 的弹簧固定到墙上，圆盘可沿固定导轨无滑动地滚动，而且滚动摩擦力偶臂等于 k。开始时圆盘处于静止，并且弹簧变形等于x_0。问过了时间 $t=n\pi\sqrt{bm/c}$弹簧变形将会怎样？

答：$x_0-4n\dfrac{kmg}{ck}\qquad\left(n\leqslant\dfrac{Rcx_0-kmg}{4kmg}\right)$

5-10 放在粘性液体中的振子运动用方程

$$m\ddot{x}+\beta\dot{x}+cx=0$$

来描述。在振子运动时，求使等式

$$\frac{dV(x,\dot{x})}{dt}=-\frac{1}{2}(m\dot{x}^2+cx^2)=-E$$

成立的正定函数$V(x,\dot{x})$。

答：求待定系数的x，$\dot{x}$二次型的一类函数V。

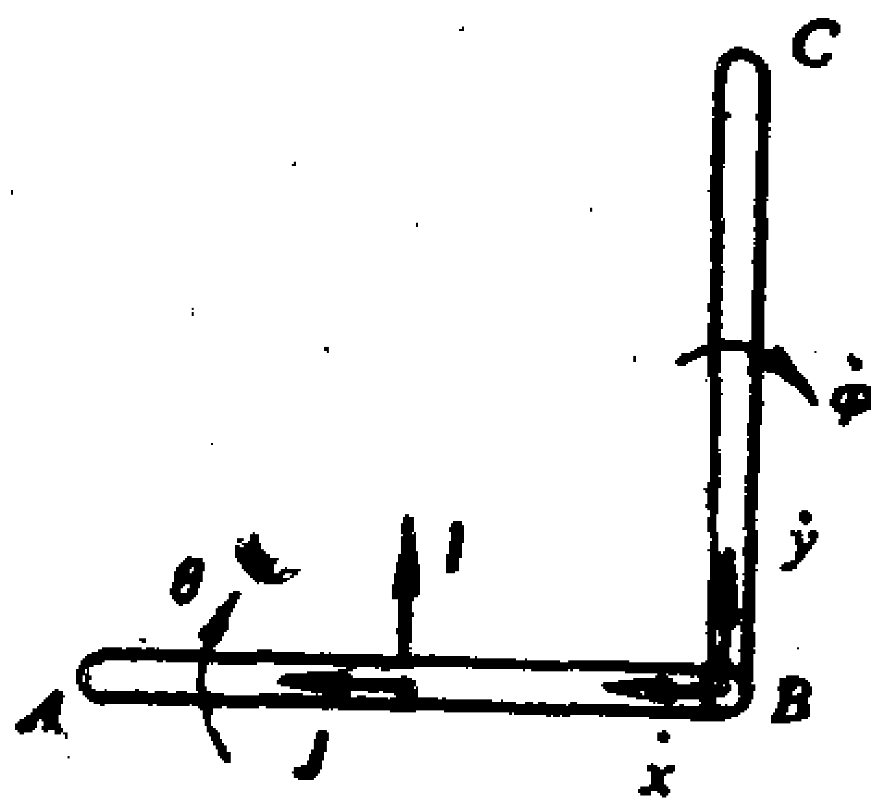
$$V=\frac{m^2}{2\beta}\dot{x}^2+\frac{m}{2}x\dot{x}+\frac{2mc+\beta^2}{4\beta}x^2$$

5-11 两个均质杆AB和BC，每杆长$2a$，光滑地在B铰接并成直角地放在水平桌面上。一冲量作用在AB的中点并且两杆象刚体一样地开始运动。试确定冲量的方向，并证明A,C的速度之比为$\sqrt{13}:1$。

提示：令B的速度为$(\dot{x},\dot{y})$，杆的角速度为$\dot{\theta}$，$\dot{\varphi}$，列写打击方程，并令$\dot{\theta}=\dot{\varphi}$。

5-12 长$2l$的均质棒以垂直于其自身的速度v在图示平面内移动。此棒与支点A相碰于距棒端$l/2$处。设碰撞为非弹性的(即碰后不离开)，求碰后棒的角速度及质心的速度。

答：$\dot{\theta}=\frac{6v}{7l}$，$\dot{y}=\frac{3}{7}v$



题5-11图



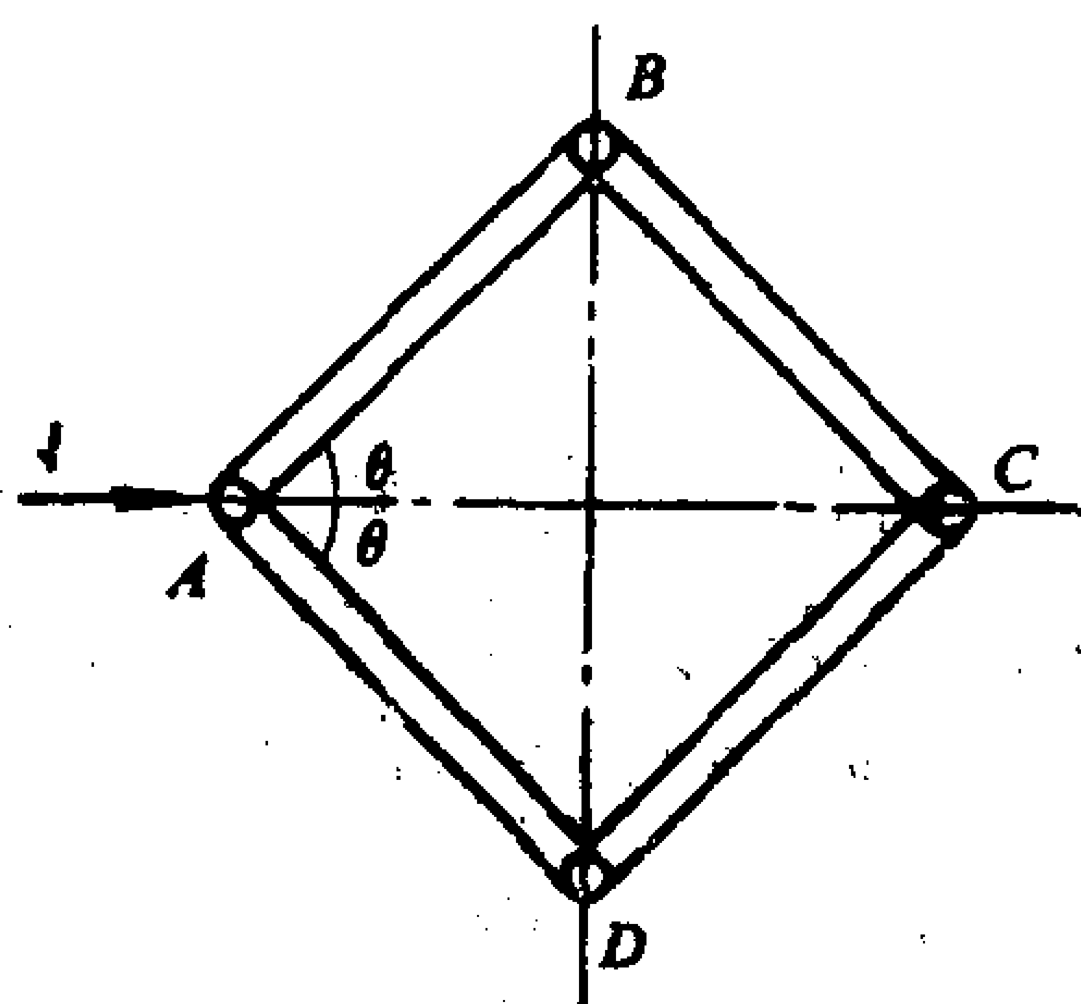
题5-12图

5-13 由四根相同的直杆铰接成一菱形放在水平面上，并在顶点A作用一沿着对角线AC的水平冲量I如图示。设冲击后C点保持不动，求角θ。

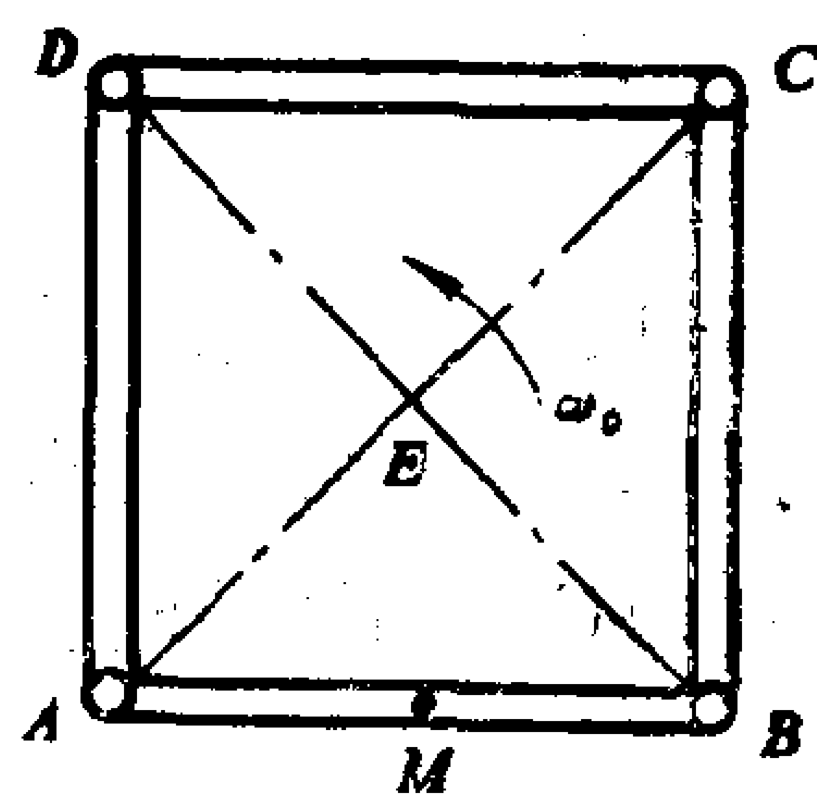
答：$\theta=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\doteq 35°16$,

5-14 由相同的四根直杆铰成的正方形在光滑的水平面上绕通过其对角线交点E的铅垂轴以匀角速度ω_0转动如图示。求将其中一杆AB的中点M固定时各杆的角速度。

答：$\omega_{AB}=\omega_{CD}=\omega_0$，$\omega_{BC}=\omega_{AD}=\frac{2}{5}\omega_0$



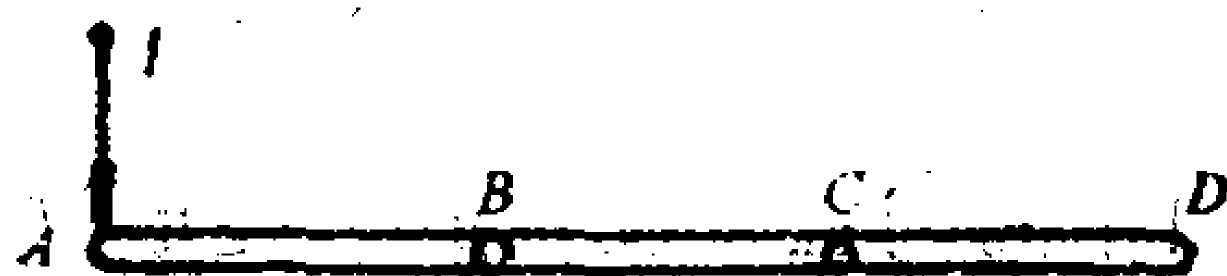
题5-13图



题5-14图

5-15 三根相同的直杆AB, BC和CD铰接后放在桌面上，并在其一端A作用一与杆垂直的水平冲量I如图示。求A,B,C和D四点的速度。

答：$v_A=\frac{52}{15}\frac{I}{m}$，$v_B=\frac{-14}{15}\frac{I}{m}$



题5-15图

$$v_O=\frac{4}{15}\frac{I}{m},\ v_D=-\frac{2}{15}\frac{I}{m}$$

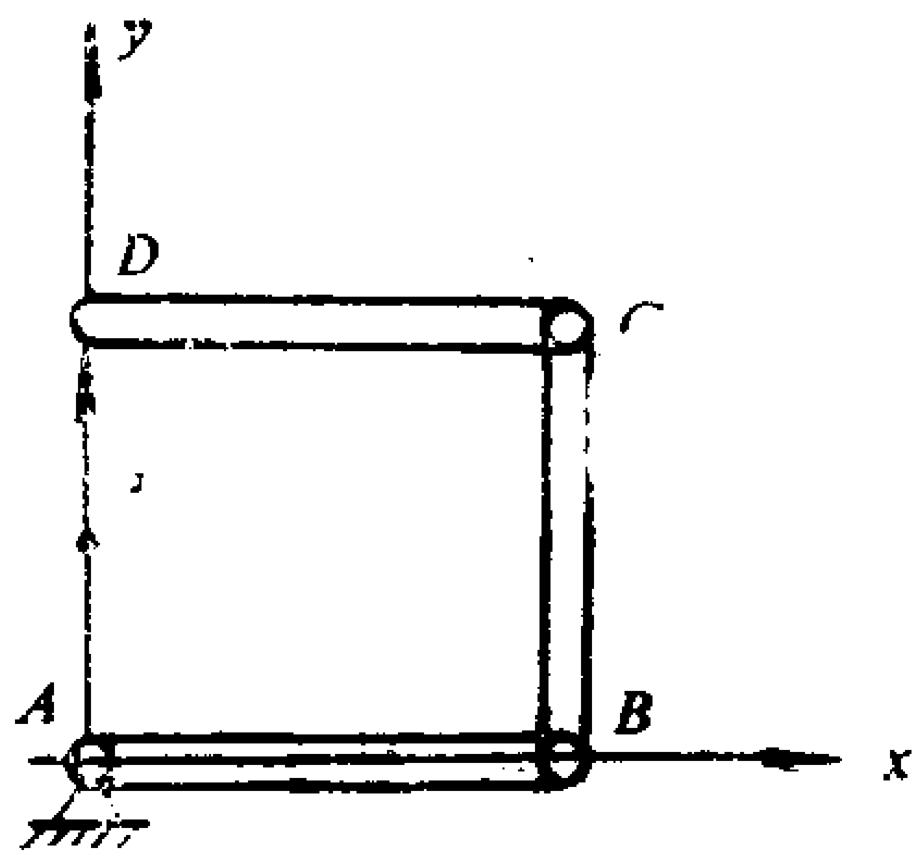
（速度向下为正）

5-16 质量都是m的三根均质刚性杆OA，AB，BC，A点和B点为铰接点，挂在固定点O，它们在重力作用下处于平衡状态。今在杆AB上作用一冲击力偶，其冲量矩为L，方向垂直于AB。证明打击后系统的初始动能为$57L^2/(26ml^2)$，其中l为杆AB的长度。

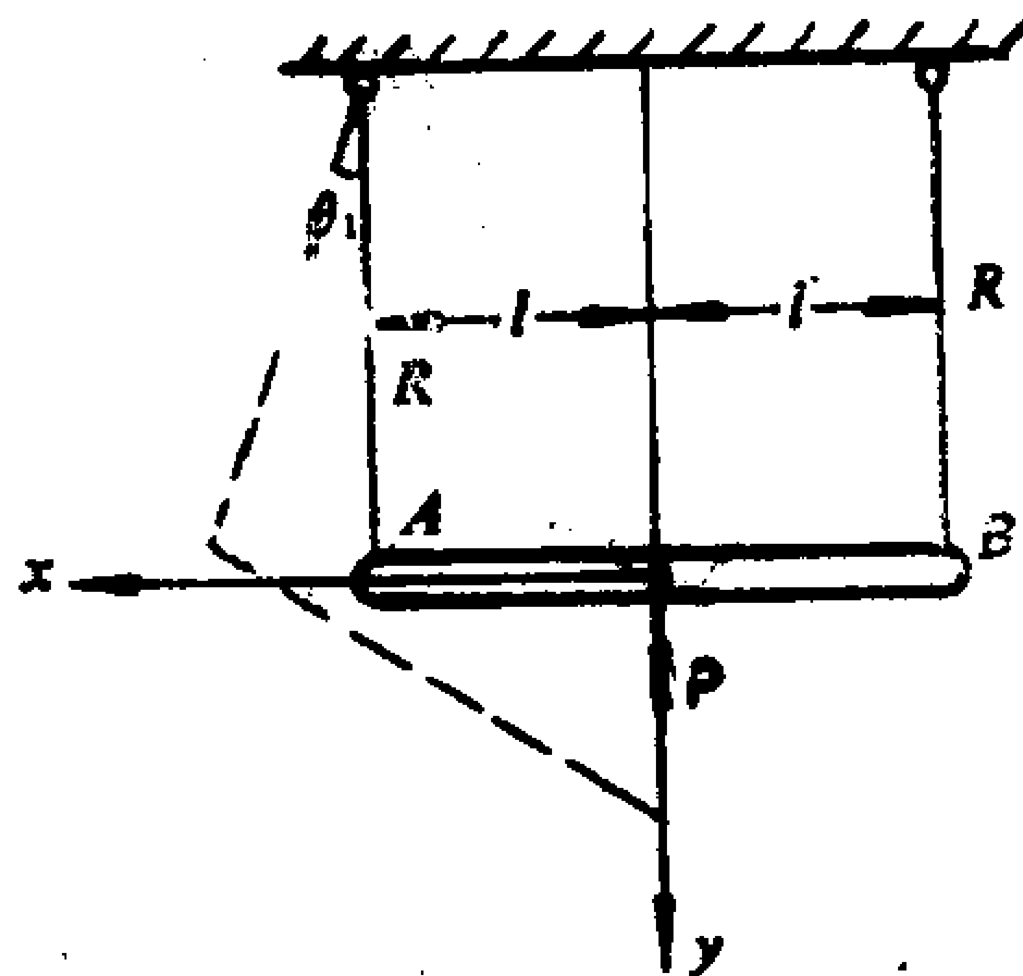
5-17 三根等长度的均质杆AB，BC，CD，铰接成正方形的三边，放在光滑水平面上，A端固定。今在D点作用一AD方向的冲量，试证三杆的初始角速度大小之比为1：0：11。

5-18 均质杆重P，长$2l$，其两端悬于长为R的二平行绳上，此时棒处于水平位置。如其中一根绳子断了，求在此瞬时杆的初始角加速度及杆心C的初始加速度。

答：$\ddot{\theta}_1^0=0,\ddot{\theta}_2^0=\frac{3}{4}\cdot\frac{g}{l}$，$\ddot{x}_C^0=0,\ddot{y}_C^0=\frac{3}{4}g$



题5-17图



题5-18图

5-19 一质量为m_1长为$2a$的杆子可自由地绕其固定上

端转动，开始时与铅垂线成$\pi/6$角。另一杆质量为m_2长为$2a$，光滑地铰接于前一杆的下端，开始时在水平位置并与前一杆成$2\pi/3$角。试证，如果低杆中心开始在与铅垂线成$\pi/6$角运动时，那么$3m_1=14m_2$。

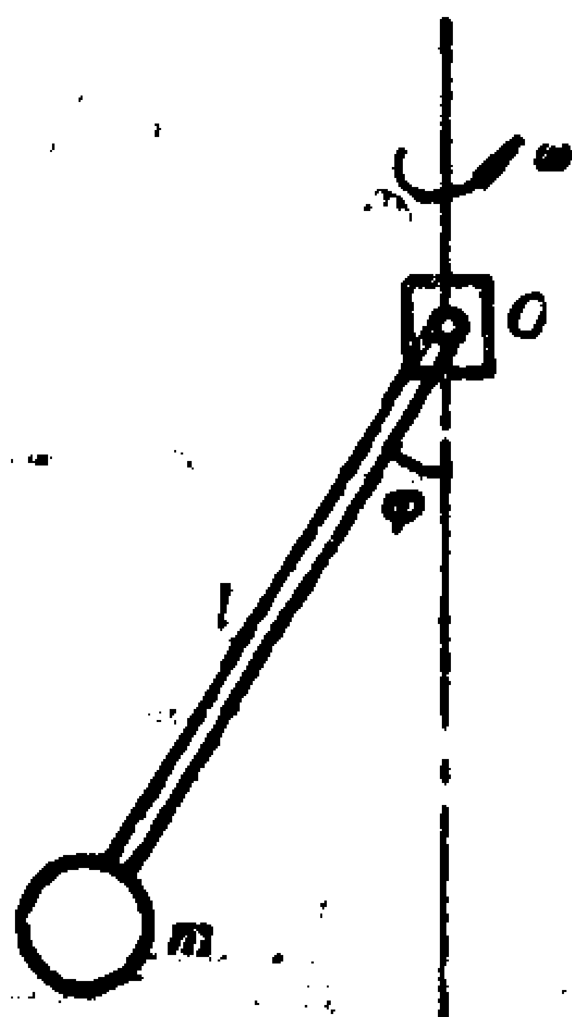
5-20 长为l的无重杆的O端与以匀角速度ω转动的轴铰接。点质量m在杆的另一端。试证，对此问题，方程(5-21)右端带ω的项为零，并建立相对运动的微分方程。

5-21 杆AB与铅垂线成α角，以匀角速度ω绕铅垂轴O_1O_2转动。质量为m的小重圆环s用刚度为c的弹簧与杆的固定端A联结，可在杆上无摩擦地运动，而弹簧的长度在未变形状态下等于l。求小环的相对平衡位置并研究其稳定性。

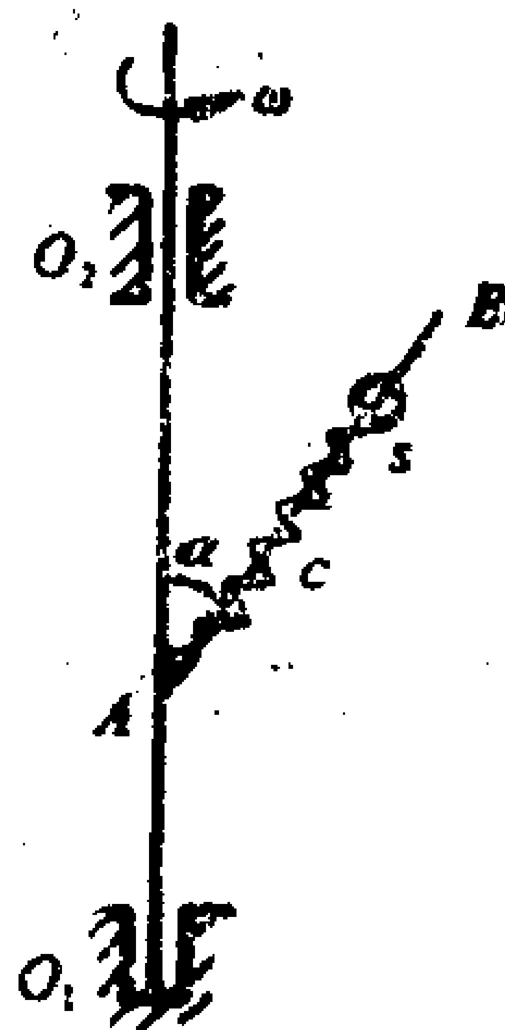
答：$AS=l+\dfrac{mg\cos\alpha+m\omega^2 l\sin^2\alpha}{c-m\omega^2\sin^2\alpha}$，

$c\neq m\omega^2\sin^2\alpha$.

当$c>m\omega^2\sin^2\alpha$时稳定，当$c<m\omega^2\sin^2\alpha$时不稳定。



题5-20图



题5-21图

5-22 直角架ABC以匀角速度$\omega=\sqrt{g/l}/(4\sqrt{3})$绕铅垂轴$AD$转动。在点$C$上有无重杆$CM$与直角架铰链连结，杆的另一端带有质量为$m$的重物，杆$CM$的长度比直角边$BC$的长

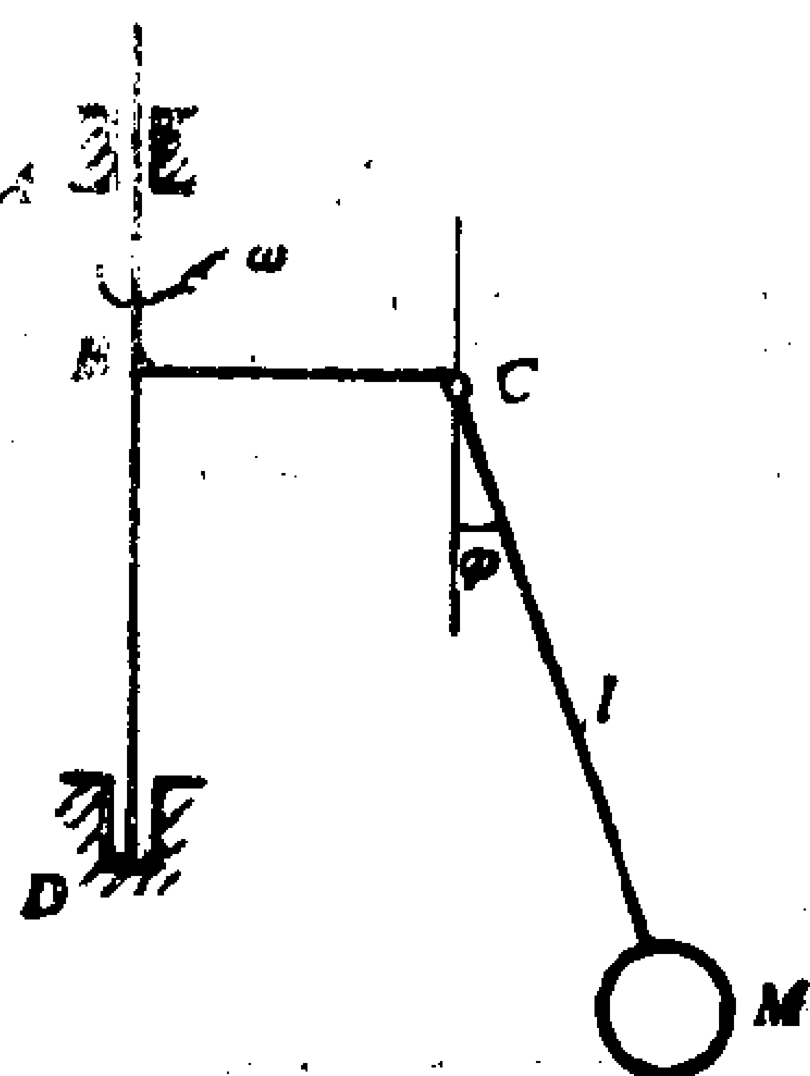
度大一倍。试证，$\varphi=\pi/6$是稳定的相对平衡位置。

5-23 质点位于按椭圆$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$弯成的，并以匀角速度$\omega$绕轴$oz$转动的光滑管腔里。求点的相对平衡位置并研究其稳定性。

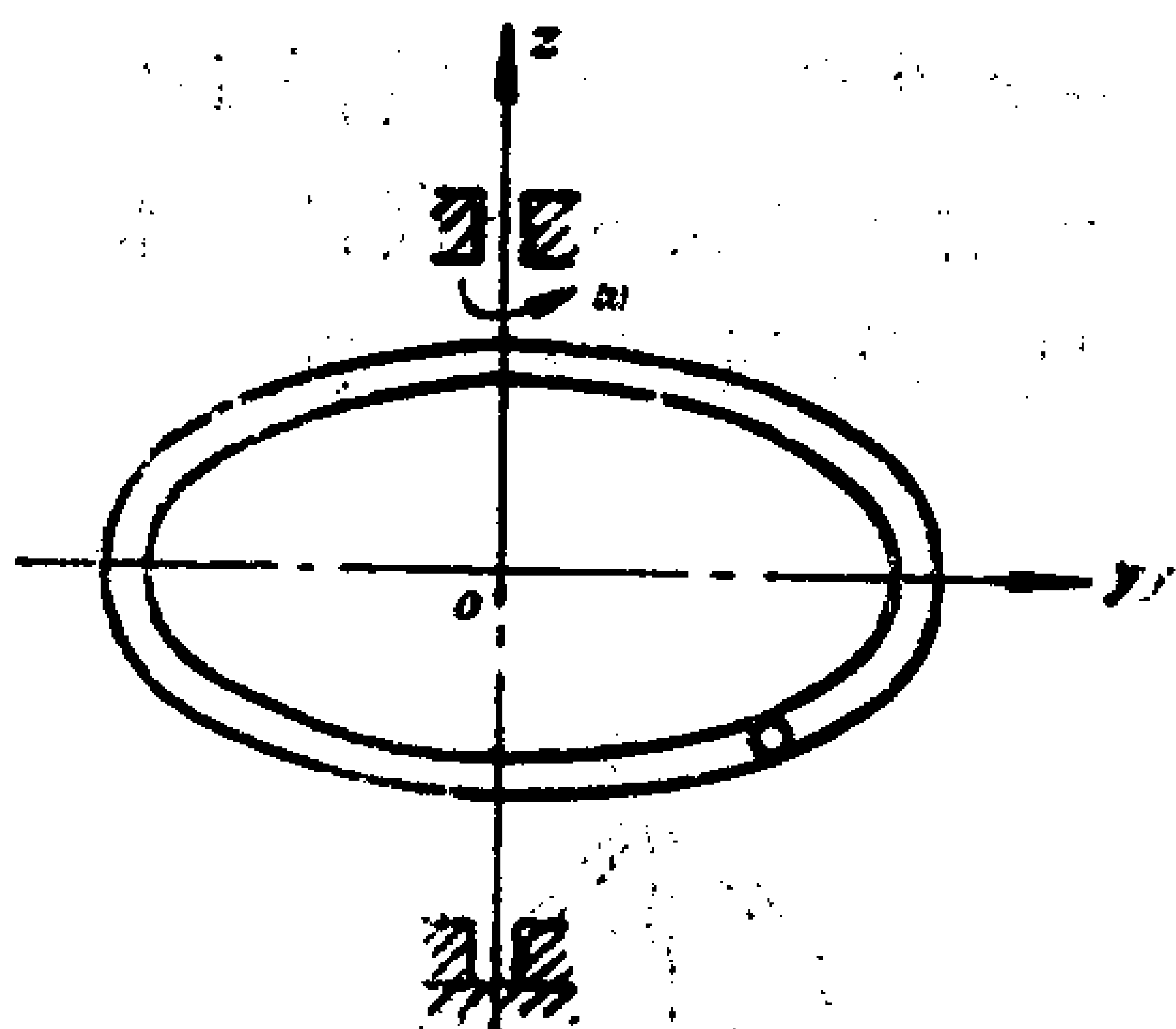
答：当$\omega^2a^2\leqslant gb$时，稳定的平衡位置是$(0,-b)$，不稳定的平衡位置是$(0,b)$；

当$\omega^2a^2>gb$时，稳定的平衡位置是

$\left(\pm\left(a^2-\frac{g^2b^2}{\omega^4a^2}\right)^{\frac{1}{2}},\ -\frac{gb^2}{\omega^2a^2}\right)$，不稳定的平衡位置是$(0,\pm b)$。



题5-22图



题5-23图

5-24 质量为m的小珠可在弯曲抛物线$x^2=2py$形状的光滑金属丝上滑动，后者以匀角速度ω绕铅垂轴oy转动。试求小珠的相对平衡位置并研究其稳定性。

答：平衡位置$x=0$在$\omega^2p<g$时是稳定的，而在$\omega^2p>g$时是不稳定的。当$\omega^2p=g$时，小珠的任何位置都是不稳定

平衡位置。

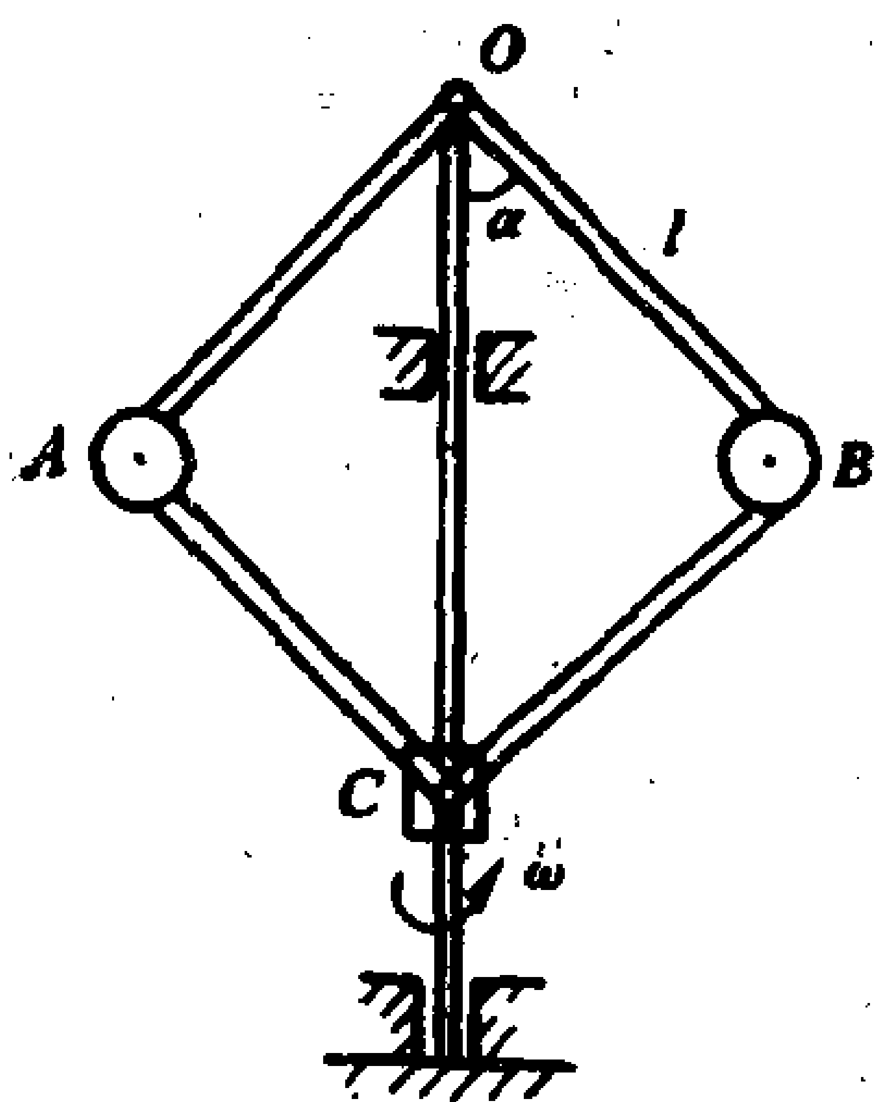
5-25 离心调速器由一个质量为$2m$的套筒C，两个质量同为m的小球A和B，以及四根长度为l的彼此铰接的轻直杆组成。设调速器的角速度ω为常量，不计摩擦。求相对平衡时杆与转动轴之间的夹角α，并求在稳定平衡位置附近微振动的周期。

答：当$\omega \leqslant \sqrt{\frac{3g}{l}}$时，平衡位置为$\alpha=0$，不振；当$\omega >$

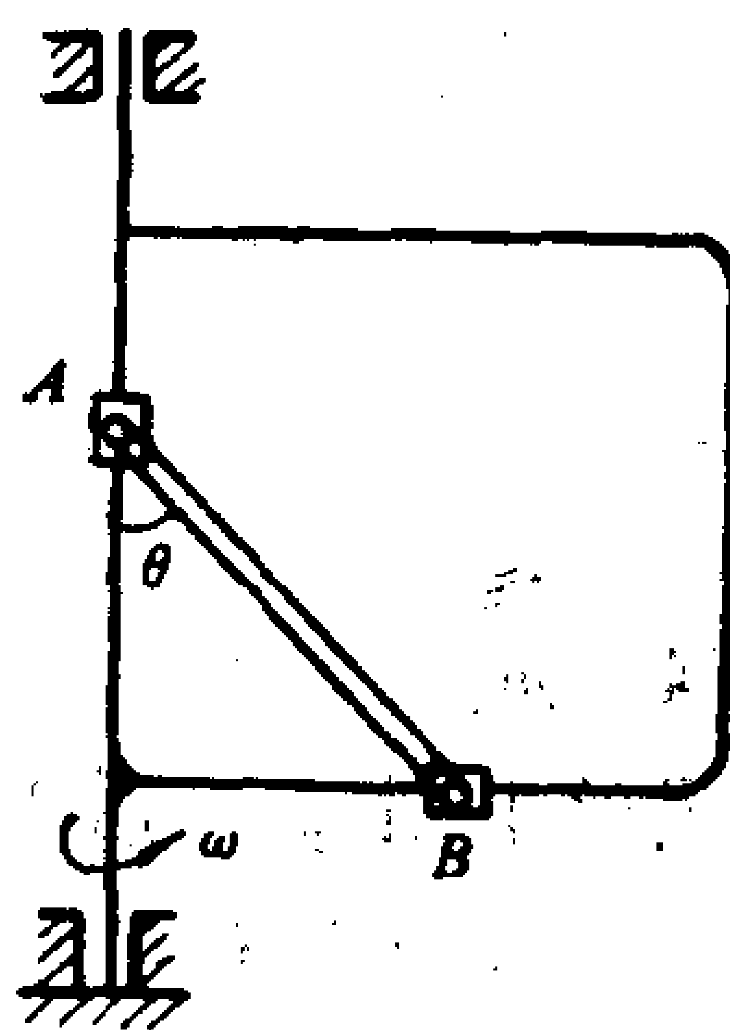
$\sqrt{\frac{3g}{l}}$时，稳定平衡位置$\alpha=\arccos\left(\frac{3g}{l\omega^2}\right)$。

振动周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{5l^2\omega^4-36g^2}{l^2\omega^4-9g^2}}$

5-26 一均质杆AB，长为$2a$，质量为m，两端A和B分别沿一框架的竖直杆和水平杆无摩擦地滑动，框架以等角速度ω绕其竖直杆转动，求杆相对于框架的运动微分方程和相



题5-25图



题5-26图

对平衡位置。

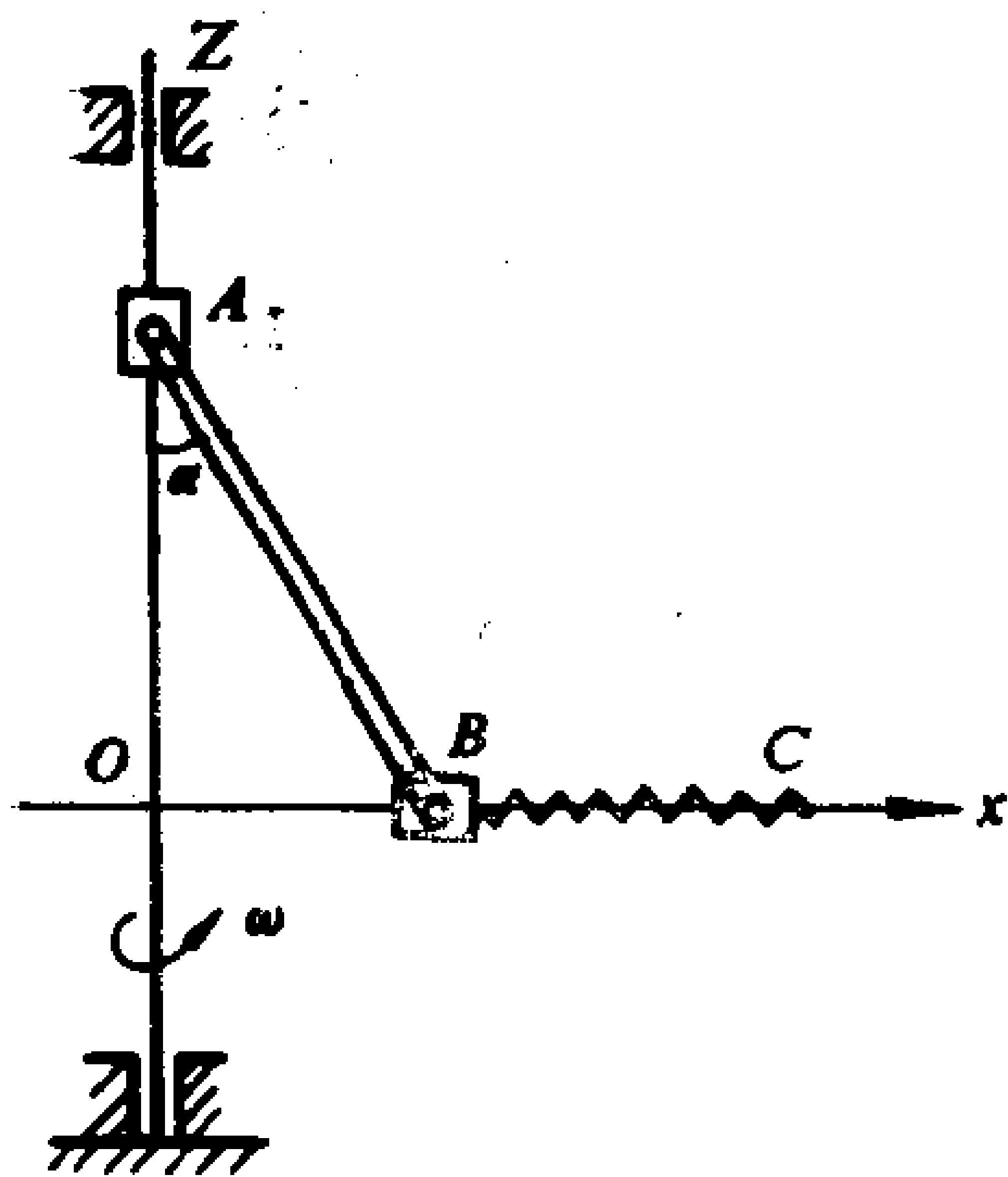
答：$\ddot{\theta}-\omega^2\sin\theta\cos\theta-\frac{3g}{4a}\sin\theta=0$

平衡位置$\theta=0$(不稳定的)。

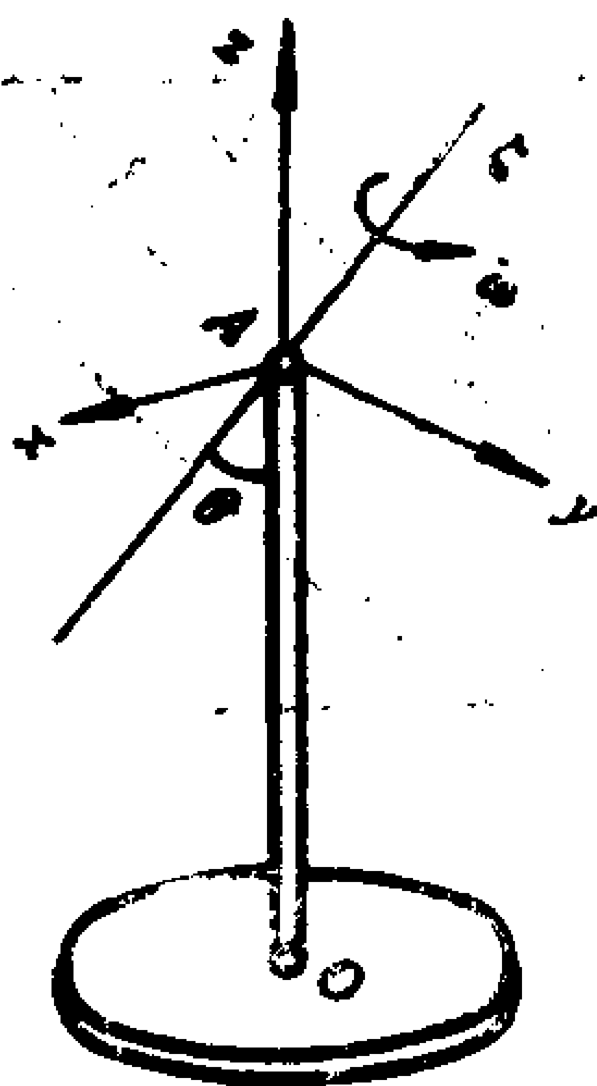
5-27 质量为m，长为l的均质杆AB，其一端A可沿竖直轴oz滑动，另一端B可沿水平轴ox滑动，而ox轴以匀角速ω绕oz轴转动。B端与弹簧BC相连，C端固定在ox轴上。当$\alpha=0$时，弹簧为原长。弹簧的刚度系数为k，不计摩擦，且$0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$。求杆的相对平衡位置并分析其稳定性，再求杆$AB$在稳定平衡位置附近微振动的周期。

答：当 $k>\frac{mg}{2l}+\frac{1}{3}m\omega^2$ 时，有两个平衡位置：$\alpha=0$ 是稳定的，另一个是不稳定的；当 $k<\frac{mg}{2l}+\frac{1}{3}m\omega^2$时，只有一个不稳定的平衡位置$\alpha=0$。在稳定平衡位置附近的微振动周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2ml}{6kl-2ml\omega^2-3mg}}。$$



题5-27图



题5-28图

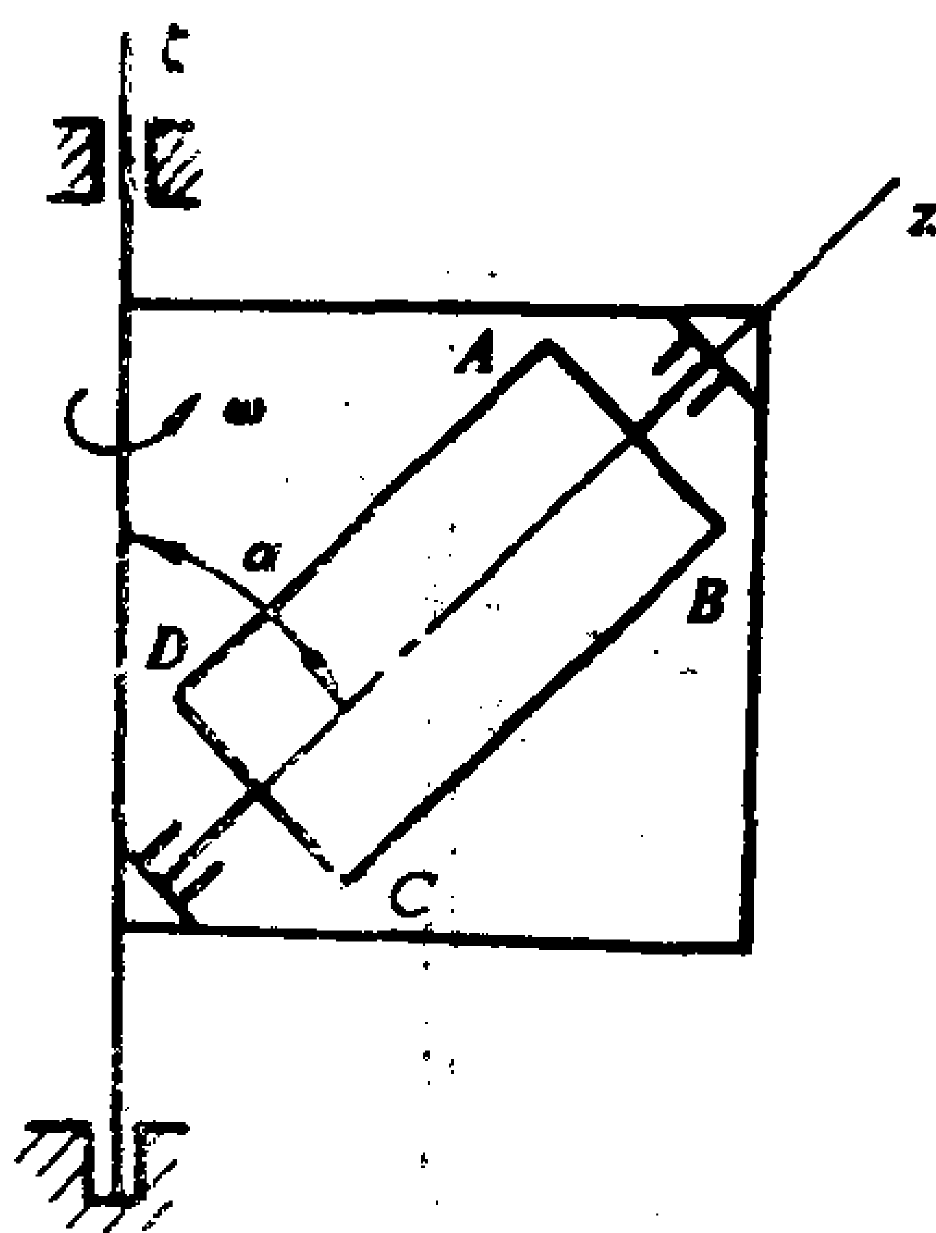
5-28 一半径为r，质量为m的均质薄圆盘，在其中心O与一长l、质量可以不计的直杆垂直地刚性联结，并可绕通过杆的另一端A的水平轴x作定轴转动。求当水平轴x绕铅垂轴ζ以匀角速度ω转动时，圆盘的相对平衡位置，并讨论其稳定性。

5-29 在绕铅垂轴ζ以匀角速度ω转动的框架内有一可以绕y轴转动的长方形匀质薄板$ABCD$。求薄板在其稳定的相对平衡位置附近所作微振动的周期。

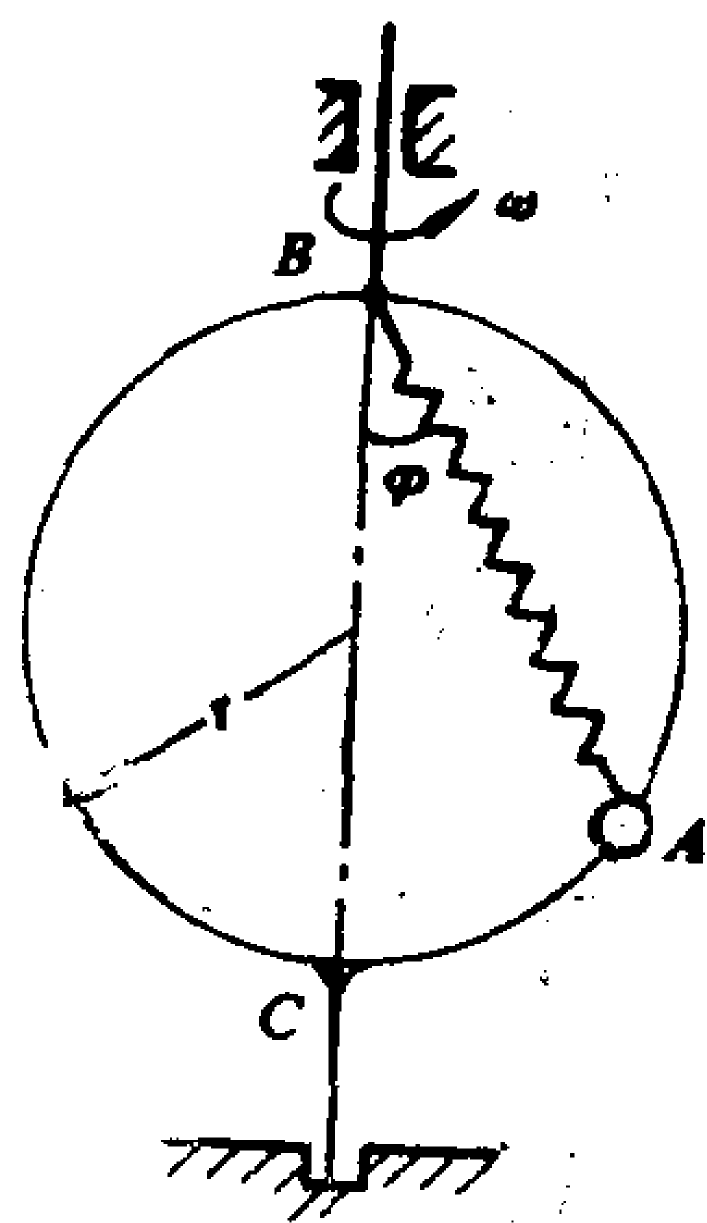
答：$T=\dfrac{2\pi}{\omega\sin\alpha}$

5-30 一质量为m的小球A(可以看作质点)套在一绕铅垂轴BC匀速转动的光滑圆环上，并用弹簧与B点相连如图示。设圆环的半径为r，角速度为ω，弹簧的刚度系数为k，原长为l_0，$l_0<2r$。试讨论小球在最低位置上稳定的条件。

答：$\omega^2\leqslant\dfrac{g}{r}-\dfrac{k(2r-l_0)}{2mr}$



题5-29图



题5-30图

5-31 在方程(5.21)中，如果没有带ω的项，且$Q_s=-\frac{\partial V}{\partial q_s}$，则有积分

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial Lr}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-Lr-\frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{N}m_i(x_i^2+y_i^2)=h^*$$

其中$L_r=T_r-V$，试证明之。

5-32 变质量单摆在阻力与速度成正比的介质中运动。摆的质量由于质点的离散按规律$m=m(t)$变化，且离散微粒的相对速度等于零。已知摆长为l，阻力$R=\beta\dot{\varphi}$，求摆的运动微分方程。

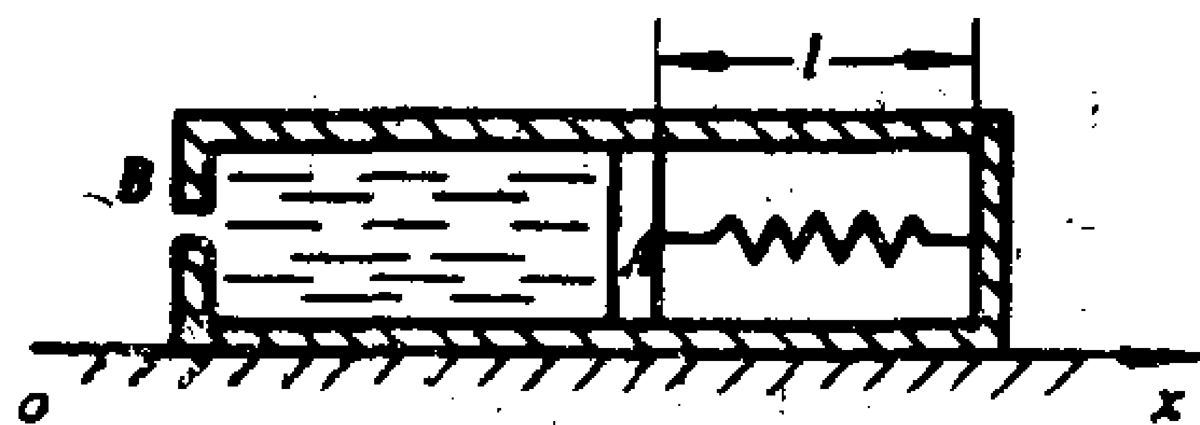
答：$\ddot{\varphi}+\frac{g\sin\varphi}{l}+\frac{\beta\dot{\varphi}}{m(t)l}=0$

5-33 截面为s，质量为m_0的圆柱形筒位于光滑水平导轨ox上。在压缩弹簧作用下活塞A通过面积为s_0的孔B将密度为ρ的液体挤出去。求筒的运动微分方程。已知活塞的运动规律为$l=l(t)$。

答：$m_0\ddot{x}+m(t)(\ddot{x}-\ddot{l})=-\dot{m}(u-\dot{l})$

其中 $u=-\frac{\dot{m}}{\rho s_0}=\frac{s}{s_0}\dot{l}$

$m(t)=\rho s[L-l(t)]$



题5-33图

5-34 （密歇尔斯基问题）反推力船用泵带动，泵经过水平道的入口吸入水并且在相反的方向将水喷出。入口处水的相对速度为u，入口面积为s，出口面积为s/n。船和其中的水的质量为m。如果认为船受与速度平方成正比的阻力的作用，$F=-kv^2$，求船从速度v_0到v_1的急速行驶的时间。

答：方程为

$$m\frac{dv}{dt}=-kv^2-\rho su^2+\rho snu^2，解为\ T=\frac{mp}{2k}\ln\left(\frac{1+pv_1}{1-pv_1}\cdot\frac{1-pv_0}{1+pv_0}\right)，其中\ p=\frac{1}{u}\sqrt{\frac{k}{\rho s(n-1)}}，$$

ρ为水的密度。



题5-34图

5-35 小喷气推车沿直线水平导轨运动。质量按规律$M=M_0-\mu t$变化，气体从发动机喷出的相对速度μ是常量，小车的初始速度为v_0。如果运动时小车所受阻力为$F=-\alpha v-\beta v^2$，试求小车速度与时间的关系。

答：$v=$

$$\frac{\left(v_0+\frac{\alpha+\sqrt{\Delta}}{2\beta}\right)\left(\frac{\alpha-\sqrt{\Delta}}{2\beta}\right)}{\left(v_0+\frac{\alpha-\sqrt{\Delta}}{2\beta}\right)\left(\frac{M_0 Mt}{M_0}\right)^{\sqrt{\Delta}/\mu}}\longrightarrow$$

$$\leftarrow \frac{-\left(v_0+\frac{a-\sqrt{\Delta}}{2\beta}\right)\left(\frac{M_0-\mu t}{M_0}\right)^{\sqrt{\Delta}/\mu}\left(\frac{a+\sqrt{\Delta}}{2\beta}\right)}{-\left(v_0+\frac{a+\sqrt{\Delta}}{2\beta}\right)}$$

其中$\Delta=a^2+4\beta\mu u$

5-36 保持例5-11的条件，但认为$M=0$，用$h\to 0$，$\rho h(t)\to m(t)$的极限过渡方法求出对应的变质量数学摆的运动微分方程。

答：$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$

5-37 已知三维系统的运动方程为

$$(\dot{q}_1+2\dot{q}_2)\ddot{q}_1+(2\dot{q}_1+2\dot{q}_2+\dot{q}_3)\ddot{q}_2+\dot{q}_2\ddot{q}_3$$
$$+\frac{1}{3}(q_2q_3-2q_1\dot{q}_2-q_2\dot{q}_3+2q_2\dot{q}_2)=0$$

$$(2\dot{q}_1+2\dot{q}_2+\dot{q}_3)\ddot{q}_1+(2\dot{q}_1+\dot{q}_2)+\dot{q}_1\ddot{q}_3$$
$$+\frac{1}{3}(2q_1\dot{q}_1-2q_2\dot{q}_1-q_1\dot{q}_3+q_1q_3)=0$$

$$\dot{q}_2\ddot{q}_1+\dot{q}_1\ddot{q}_2+\dot{q}_3\ddot{q}_3+\frac{1}{3}\left(\dot{q}_1q_2+q_1\dot{q}_2+q_1q_2\right)=0$$

试构造其拉格朗日函数。

答：
$$L=\frac{1}{6}\left(\dot{q}_1^3+\dot{q}_2^3+\dot{q}_3^3\right)+\dot{q}_1^2\dot{q}_2+\dot{q}_1\dot{q}_2^2+\dot{q}_1\dot{q}_2\dot{q}_3$$
$$+\frac{1}{9}\dot{q}_1q_2(-2q_1+2q_2-q_3)$$
$$+\frac{1}{9}\dot{q}_2q_1(2q_1-2q_2-q_3)$$
$$+\frac{2}{9}q_1q_2\dot{q}_3-\frac{1}{3}q_1q_2q_3$$

5-38 已知二维系统的运动方程为

$$\ddot{q}_1\sin^2 q_2+2\dot{q}_1\dot{q}_2\sin q_2\cos q_2-\dot{q}_2^2\sin q_1\cos q_1+q_2=0$$

$$\ddot{q}_2\sin^2 q_1+2\dot{q}_1\dot{q}_2\sin q_1\cos q_1-\dot{q}_1^2\sin q_2\cos q_2+q_1=0$$

试构造其拉格朗日函数。

答：$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2\sin^2 q_2+\dot{q}_2^2\sin^2 q_1)-q_1q_2$

5-39 试对一维系统

$$e^{\beta t}(\ddot{x}+\beta\dot{x}+w^2x)=0$$

构造拉格朗日函数。

答：$L=\frac{1}{2}e^{\beta t}(\dot{x}^2-\omega^2x^2)$

5-40 已知二维系统的运动方程为

$$\ddot{q}_1\sin(q_1q_2)+\dot{q}_1(\dot{q}_1q_2+q_1\dot{q}_2)\cos(q_1q_2)-\frac{1}{2}q_2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2(\cos)q_1q_2)+q_2=0$$

$$\ddot{q}_2\sin(q_1q_2)+\dot{q}_2(\dot{q}_2q_1+q_2\dot{q}_1)\cos(q_1q_2)-\frac{1}{2}q_1(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)\cos(q_1q_2)+q_1=0$$

试构造其拉格朗日函数。

答：$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)\sin(q_1q_2)-q_1q_2$

第六章　尼尔森方程

一、基本理论与公式

德国学者尼尔森（*Nielsen*）于1935年导出了完整力学系统的一类新型运动方程，其形式为

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}-2\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s \quad (s=1,\cdots,n) \qquad (6\text{-}1)$$

其中 T为系统的动能，$\dot{T}=\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ 为动能对时间的导数，Q_s为对应于广义坐标q_s的广义力。

二、范例

例6-1　试证明 $N_s(T)=\varepsilon_s(T)$　$(s=1,\cdots,n)$，其中 T 为系统动能，而

$$N_s=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-2\frac{\partial}{\partial q_s}\text{为尼尔森算子}$$

$$\varepsilon_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s}\text{为欧拉算子}$$

［证明］　由尼尔森算子的定义，有

$$N_s(T)=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}-2\frac{\partial T}{\partial q_s}$$

$$=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_k}\dot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k+\frac{\partial T}{\partial t}\right)-2\frac{\partial T}{\partial q_s}$$

$$=\frac{\partial T}{\partial q_s}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_s\partial q_k}\dot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k$$

$$+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_s\partial t}-2\frac{\partial T}{\partial q_s}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_s\partial q_k}\dot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_s\partial t}-\frac{\partial T}{\partial q_s} \tag{1}$$

由欧拉算子的定义，有

$$\varepsilon_s(T)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 T}{\partial q_k\partial \dot{q}_s}\dot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_k\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_k$$

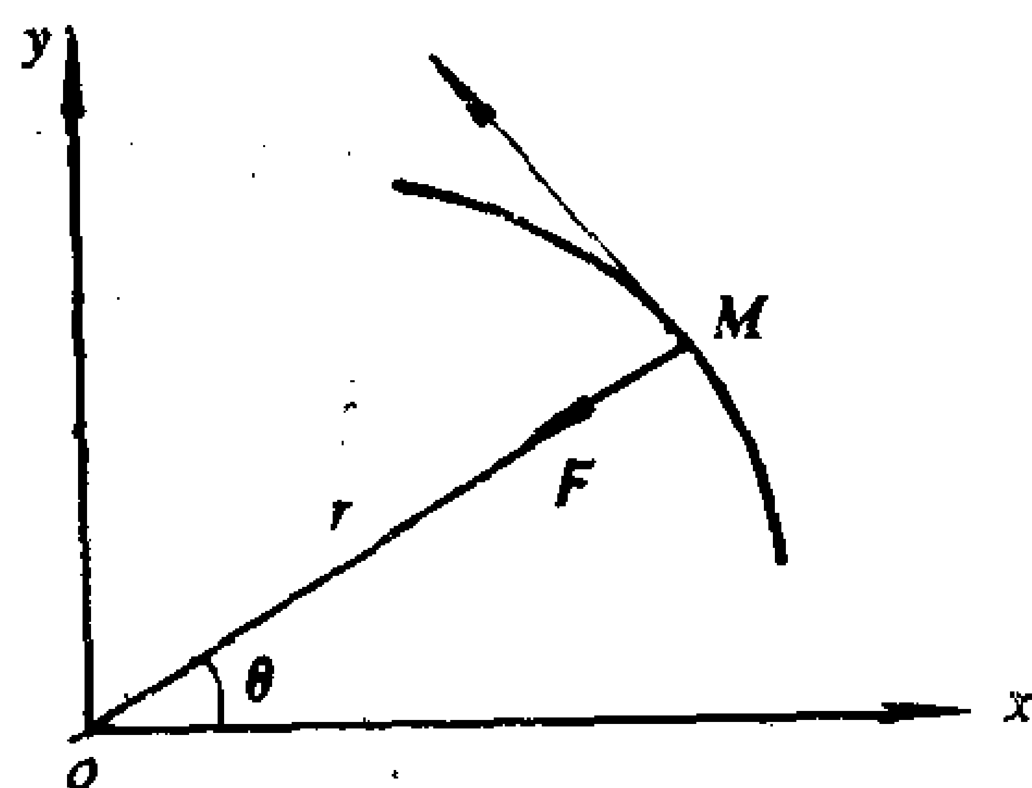
$$+\frac{\partial^2 T}{\partial t\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s} \tag{2}$$

比较(1)与(2)，便得

$$N_s(T)=\varepsilon_s(T) \tag{3}$$

这就证明尼尔森方程和拉格朗日方程是等价的。

例 6-2 利用尼尔森方程建立质点在有心力作用下的运动微分方程。



例6-2图

［解］ 取极坐标r，θ为广义坐标，质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$

将其对时间求导数，有

于是 $\dot{T}=m(\dot{r}\ddot{r}+r\dot{r}\dot{\theta}^2+r^2\dot{\theta}\ddot{\theta})$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial T}{\partial \dot r}=m\ddot r+mr\dot\theta^2,\quad \frac{\partial \dot T}{\partial \dot\theta}=2mr\dot r\dot\theta+mr^2\ddot\theta\\&\frac{\partial T}{\partial r}=mr\dot\theta^2,\qquad \frac{\partial T}{\partial\theta}=0\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

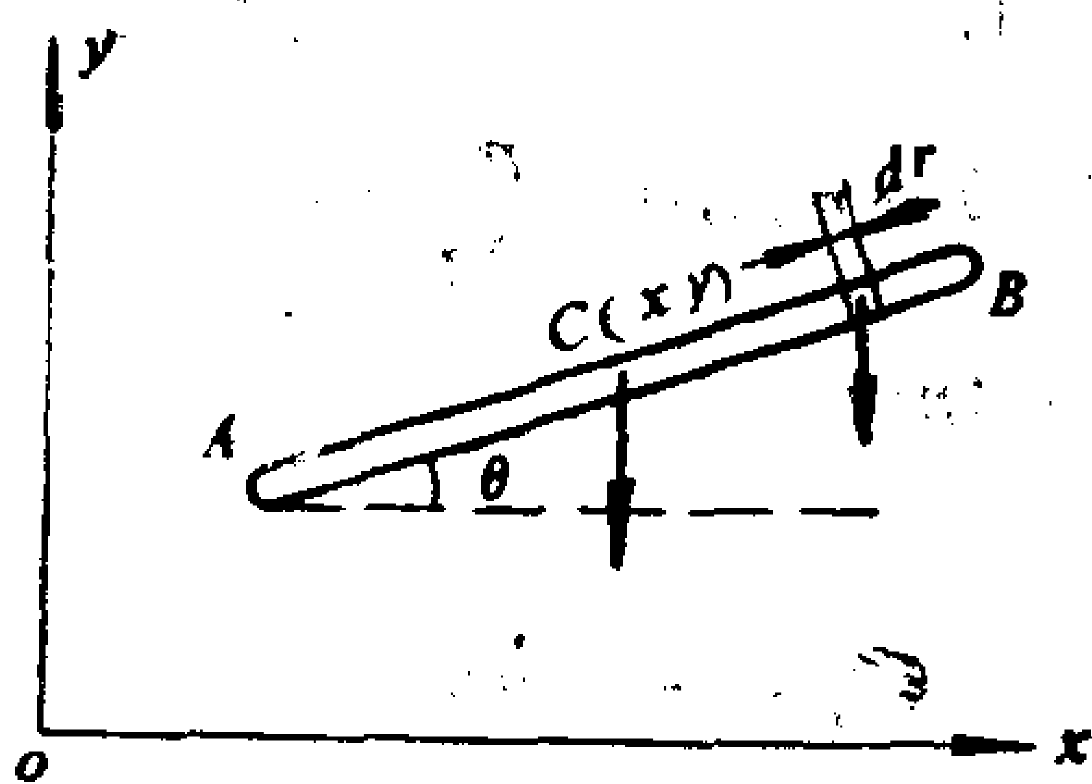
又

$$Q_r=-F,\ Q_\theta=0\qquad(2)$$

将(1)和(2)代入尼尔森方程(6-1)，得

$$m(\ddot r-r\dot\theta^2)=-F,\ m(r^2\ddot\theta+2r\dot r\dot\theta)=0\qquad(3)$$

例6-3 一质量为m、长为$2a$的匀质杆AB在光滑桌面上自由运动。如果杆的各点受到桌面上固定线的吸引，引力与质量以及点到此固定线的距离成正比，其比例系数为μ。试用尼尔森方程建立杆在给定力场中的运动方程。



例6-3图

[解] 取固定线为x轴，杆质心坐标x, y和杆与x轴的夹角θ为广义坐标。杆AB的动能为

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}m(2a^2)\dot\theta^2\\&=\frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2)+\frac{1}{6}ma^2\dot\theta^2\end{aligned}$$

于是

$$\dot{T}=m(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})+\frac{1}{3}ma^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

由此得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{x}}=m\ddot{x},\quad \frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{y}}=m\ddot{y},\quad \frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{\theta}}=\frac{1}{3}ma^2\ddot{\theta}\\&\frac{\partial T}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial T}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial T}{\partial\theta}=0\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

下面计算广义力。因

$$F_x=0$$

故

$$Q_x=0\tag{2}$$

又

$$\begin{aligned}F_y=&-\left[\int_0^a\mu(y+r\sin\theta)\frac{m}{2a}dr+\right.\\&\left.\int_0^a\mu(y-r\sin\theta)\frac{m}{2a}\mathrm{d}r\right]\\=&-\mu my\end{aligned}$$

故

$$Q_y=-\mu my\tag{3}$$

引力对质心C的矩为

$$\begin{aligned}M_C=&-\int_0^a\mu(y+r\sin\theta)\frac{m}{2a}r\cos\theta\,\mathrm{d}r\\&+\int_0^a\mu(y-r\sin\theta)\frac{m}{2a}r\cos\theta\,\mathrm{d}r\\=&-\frac{1}{6}\mu ma^2\sin2\theta\end{aligned}$$

因此

$$Q_\theta = -\frac{1}{6}\mu m a^2 \sin 2\theta \tag{5}$$

将(1)—(5)代入尼尔森方程(6-1)，得到

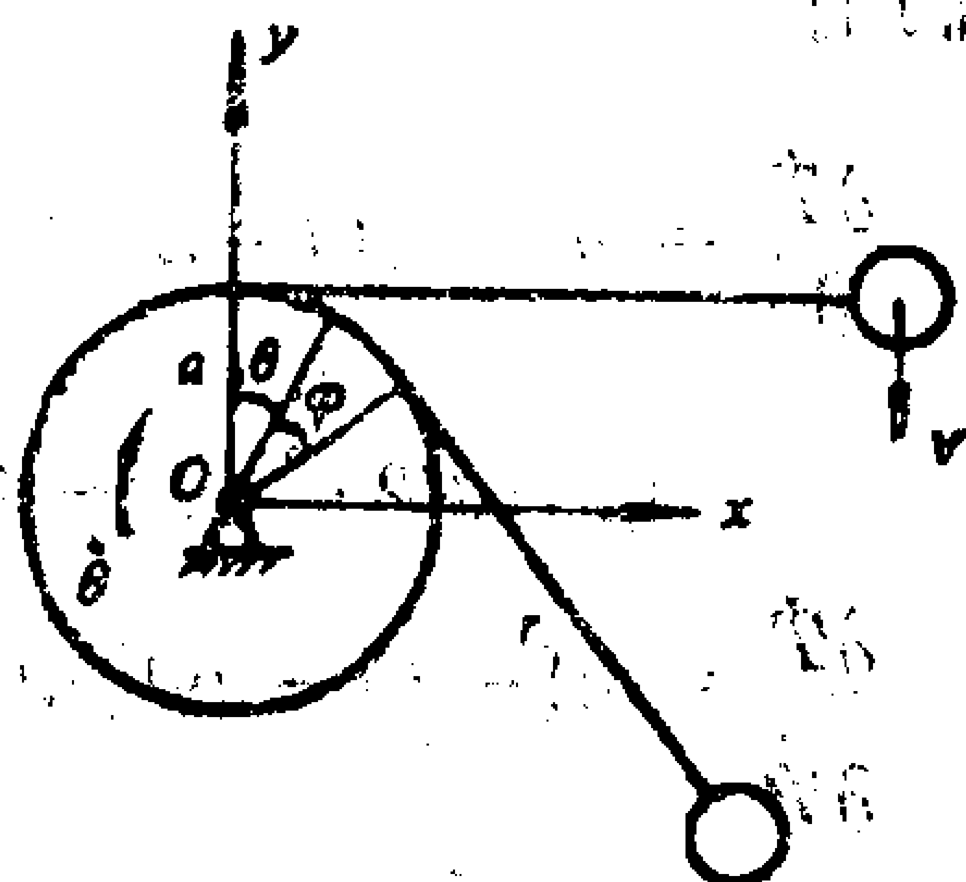
$$m\ddot{x}=0,\quad m\ddot{y}=-\mu m y$$

$$\frac{1}{3}ma^2\ddot{\theta}=-\frac{1}{6}\mu m a^2 \sin 2\theta$$

或

$$\ddot{x}=0,\quad \ddot{y}+\mu=0,\quad 2\ddot{\theta}+\mu\sin 2\theta=0 \tag{6}$$

例6-4 一质量为 m 的质点拴于轻线的一端。此轻线绕在质量为 M 的轮子上，轻线的另一端拴于轮缘上。开始时线是直的，长为 l。轮子(半径为 a，回转半径为 k)可自由地绕过其中心的铅垂固定轴转动。质点在光滑水平桌面上，并以速度 v 与线成直角地抛出，那么线开始缠在轮上。试证，如果线始终不脱离轮子，那么线的直线部分的最短长度为 $\left[l^2-a^2-\frac{M}{m}k^2\right]^{1/2}$。



例6-4图

[解] 首先，用尼尔森方程建立问题的运动微分方程。

取轮子转角 θ，线对轮子的包角 φ 为广义坐标。线的直线部分的长度为 $r=l-a\varphi$。我们有

$$x=a\sin(\theta+\varphi)+r\cos(\theta+\varphi)$$

$$y=a\cos(\theta+\varphi)-r\sin(\theta+\varphi)$$

$$\dot{x}=\dot{r}\cos(\theta+\varphi)+[a\cos(\theta+\varphi)-r\sin(\theta+\varphi)](\dot{\theta}+\dot{\varphi})$$

$$\dot{y}=-\dot{r}\sin(\theta+\varphi)-[a\sin(\theta+\varphi)+r\cos(\theta+\varphi)](\dot{\theta}+\dot{\varphi})$$

质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}Mk^2\dot{\theta}^2$$

$$=\frac{1}{2}m[(l-a\varphi)^2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2+a^2\dot{\theta}^2]+\frac{1}{2}Mk^2\dot{\theta}^2$$

因此

$$\dot{T}=m[-(l-a\varphi)a\dot{\varphi}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2+(l-a\varphi)^2\times(\dot{\theta}+\dot{\varphi})(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})+a^2\dot{\theta}\ddot{\theta}]+Mk^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

我们有

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{\theta}}&=m[-2(l-a\varphi)a\dot{\varphi}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})+(l-a\varphi)^2(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})+a^2\ddot{\theta}]+Mk^2\ddot{\theta}\\
\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{\varphi}}&=m[-(l-a\varphi)a(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2-2(l-a\varphi)a\dot{\varphi}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})+(l-a\varphi)^2(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})]\\
\frac{\partial T}{\partial\theta}&=0,\quad \frac{\partial T}{\partial\varphi}=-ma(l-a\varphi)(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

而

$$Q_\varphi=Q_\theta=0\quad(2)$$

将(1)和(2)代入尼尔森方程(6-1)，得到

$$m[(l-a\varphi)^2(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})-2(l-a\varphi)a\dot{\varphi}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})+a^2\ddot{\theta}]+Mk^2\ddot{\theta}=0\quad(3)$$

$$m[(l-a\varphi)^2(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})-2(l-a\varphi)a\dot{\varphi}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})+a(l-a\varphi)(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2]=0\quad(4)$$

方程(3)和(4)即为问题的运动微分方程。

其次，寻求问题的第一积分。

方程(3)可积分为

$$m[a^2\dot{\theta}+(l-a\varphi)^2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})]+Mk^2\dot{\theta}=mlv \tag{5}$$

将(3)乘以$\dot{\theta}$，(4)乘以$\dot{\varphi}$，并相加，积分得

$$\frac{1}{2}m[(l-a\varphi)^2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2+a^2\dot{\theta}^2]+\frac{1}{2}Mk^2\dot{\theta}^2$$

$$=\frac{1}{2}mv^2 \tag{6}$$

积分(5)是循环积分，积分(6)是能量积分。

最后，求线的直线部分的最短长度。

使线的直线部分取极小值的条件为$\dot{r}>0$，$\ddot{r}<0$，或者

$$\dot{\varphi}=0; \qquad \ddot{\varphi}<0 \tag{7}$$

而由(3)和(4)知，条件(7)能够成立。以$\dot{\varphi}=0$代入积分(5)和(6)，得

$$m(a^2+r^2)\dot{\theta}+Mk^2\dot{\theta}=mlv \tag{8}$$

$$m(a^2+r^2)\dot{\theta}^2+Mk^2\dot{\theta}^2=mv^2 \tag{9}$$

由(8)和(9)解得

$$r^2=l^2-a^2-\frac{M}{m}k^2$$

即

$$r=\left(l^2-a^2-\frac{M}{m}k^2\right)^{1/2} \tag{10}$$

例6-5 质量为m的质点由无质量弹簧系于点P。已知弹簧的刚度为k，自然长为r_0，点P以匀角速度ω沿半径为a的圆路径运动。假定质点在水平面上无摩擦地运动，试写出运动微分方程。

[解] 系统有两个自由度，取r和θ为广义坐标。我们有

$$x=a\cos\omega t+r\cos\theta$$

$$y=a\sin\omega t+r\sin\theta$$

$$\dot{x}=-a\omega\sin\omega t+\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\dot{y}=a\omega\cos\omega t+\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta$$

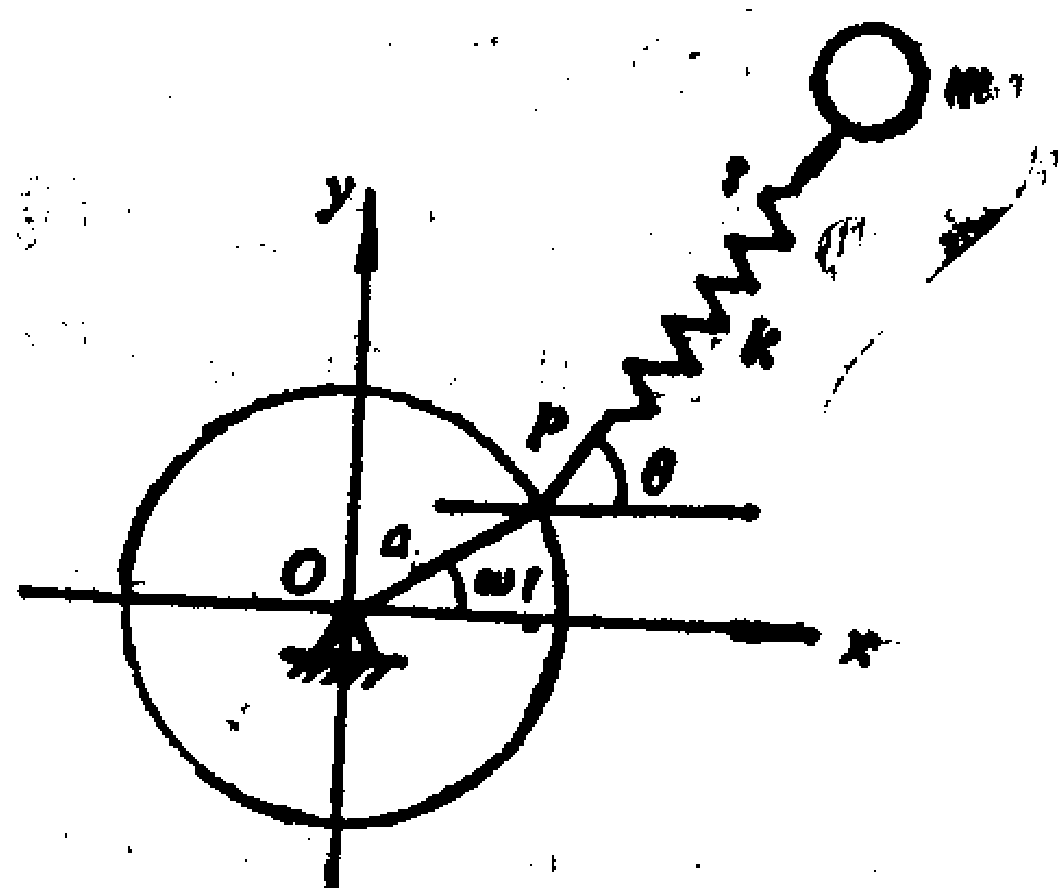
系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

$$=\frac{1}{2}ma^2\omega^2+\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$

$$+ma\omega[\dot{r}\sin(\theta-\omega t)$$

$$+r\dot{\theta}\cos(\theta-\omega t)]$$



例 6-5 图

势能为

$$V=\frac{1}{2}k(r-r_0)^2$$

求动能对时间的导数，有

$$\dot{T}=m\dot{r}\ddot{r}+mr\dot{r}\dot{\theta}^2+mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+ma\omega$$

$$\times[\ddot{r}\sin(\theta-\omega t)+\dot{r}(\dot{\theta}-\omega)\cos(\theta-\omega t)$$

$$+\dot{r}\dot{\theta}\cos(\theta-\omega t)+r\ddot{\theta}\cos(\theta-\omega t)-r\dot{\theta}(\dot{\theta}-\omega)$$

$$\times\sin(\theta-\omega t)]$$

于是

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{\theta}}=2mr\dot{r}\dot{\theta}+mr^2\ddot{\theta}+2ma\omega[\dot{r}\cos(\theta-\omega t)$$

$$-r\dot{\theta}\sin(\theta-\omega t)]+ma\omega^2 r\sin(\theta-\omega t)$$

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{r}}=m\ddot{r}+mr\dot{\theta}^2+2ma\omega\dot{\theta}\cos(\theta-\omega t)$$

$$-ma\omega^2\cos(\theta-\omega t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta}=ma\omega[\dot{r}\cos(\theta-\omega t)-r\dot{\theta}\sin(\theta-\omega t)]$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}=mr\dot{\theta}^2+ma\omega\dot{\theta}\cos(\theta-\omega t) \tag{1}$$

广义力由势能给出为

$$Q_r=-\frac{\partial V}{\partial r}=-k(r-r_0)$$

$$Q_\theta=-\frac{\partial V}{\partial \theta}=0 \tag{2}$$

将(1)和(2)代入尼尔森方程(6-1)，得到

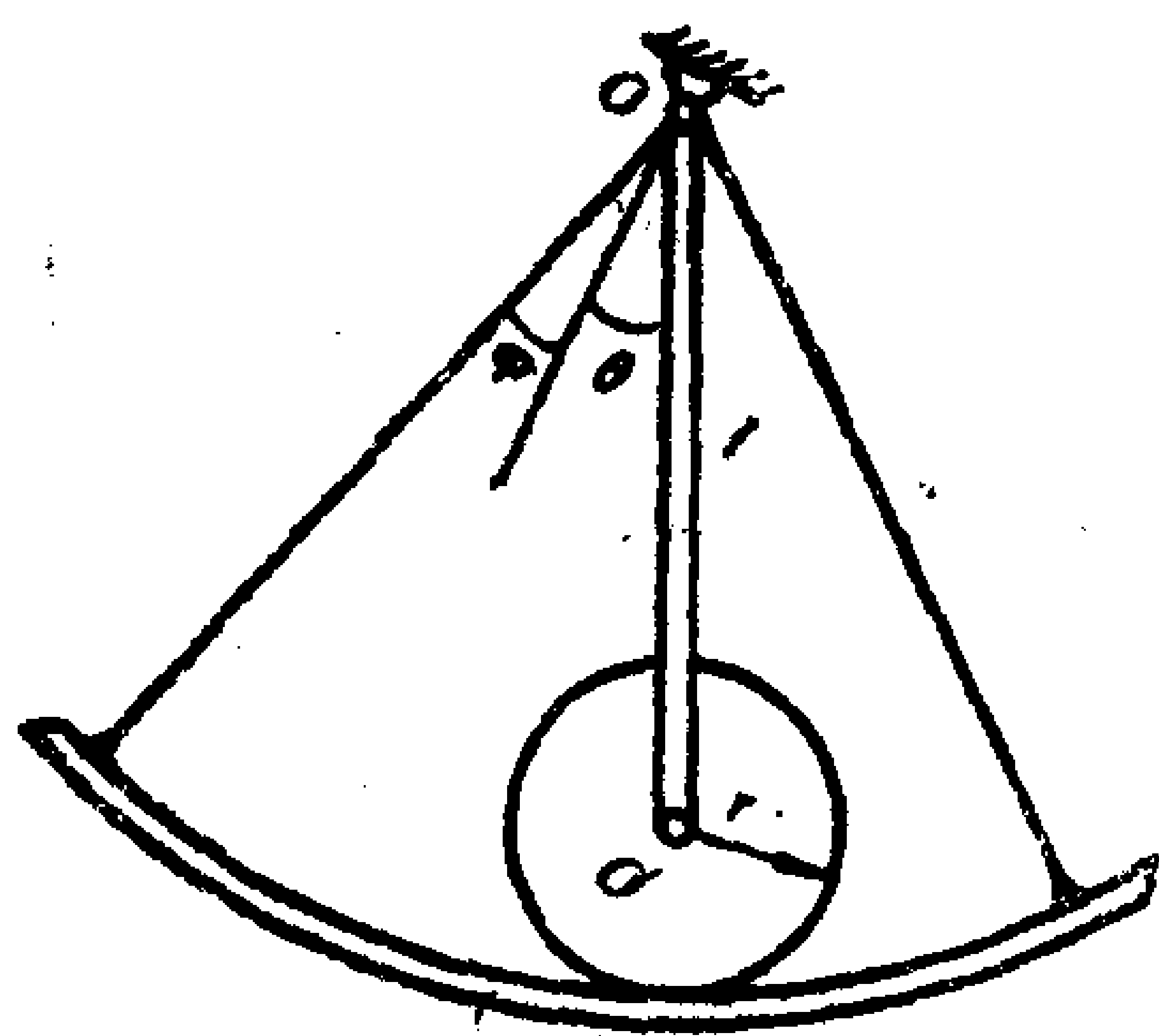
$$m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2-ma\omega^2\cos(\theta-\omega t)=-k(r-r_0)$$

$$mr^2\theta+2mr\dot{r}\dot{\theta}+mar\omega^2\sin(\theta-\omega t)=0$$

或

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-a\omega^2\cos(\theta-\omega t)+\frac{k}{m}(r-r_0)=0\\&r^2\ddot{\theta}+2r\dot{r}\dot{\theta}+ar\omega^2\sin(\theta-\omega t)=0\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

例6-6 图示系统由杆OO'，圆盘O'以及薄壁圆筒组成。已知：(1)杆OO'长l，质量为m，绕O轴转动，转角以θ表示，(2)圆盘O'的半径为r，质量为m，由杆OO'带动在薄壁圆筒内作纯滚动；(3)薄壁圆筒绕O轴转动，对于O轴的转动惯量为J_0，其转角以φ表示。试列写系统的运动微分方程。



例6-6图

［解］ 系统有两个自由度，取θ和φ为广义坐标，并设圆盘滚动角速度为ω。圆盘与圆筒接触点的速度$v_C=(l+r)\dot{\varphi}=-l\dot{\theta}+r\omega$，由此得

$$\omega=\dot{\varphi}+\frac{l}{r}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})$$

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left[\dot{\varphi}+\frac{l}{r}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\right]^2$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}J_0\dot{\varphi}^2$$

$$=\frac{11}{12}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}ml(l+r)\dot{\theta}\dot{\varphi}$$

$$+\frac{1}{2}\left[J_0+\frac{1}{2}m(l+r)^2\right]\dot{\varphi}^2$$

设O点为势能零点，则势能为

$$V=-\frac{1}{2}mgl\cos\theta-mgl\cos\theta$$

$$=-\frac{3}{2}mgl\cos\theta$$

这里忽略薄壁圆筒的重力势能。求动能对时间的导数，有

$$\dot{T}=\frac{11}{6}ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+\frac{1}{2}ml(l+r)(\ddot{\theta}\dot{\varphi}+\dot{\theta}\ddot{\varphi})$$

$$+\left[J_0+\frac{1}{2}m(l+r)^2\right]\dot{\varphi}\ddot{\varphi}$$

于是

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{\theta}}=\frac{11}{6}ml^2\ddot{\theta}+\frac{1}{2}ml(l+r)\ddot{\varphi}\\&\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{1}{2}ml(l+r)\ddot{\theta}\\&\quad+\left[J_0+\frac{1}{2}m(l+r)^2\right]\ddot{\varphi}\\&\frac{\partial T}{\partial\theta}=\frac{\partial T}{\partial\varphi}=0\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

由势能表达式求得广义力为

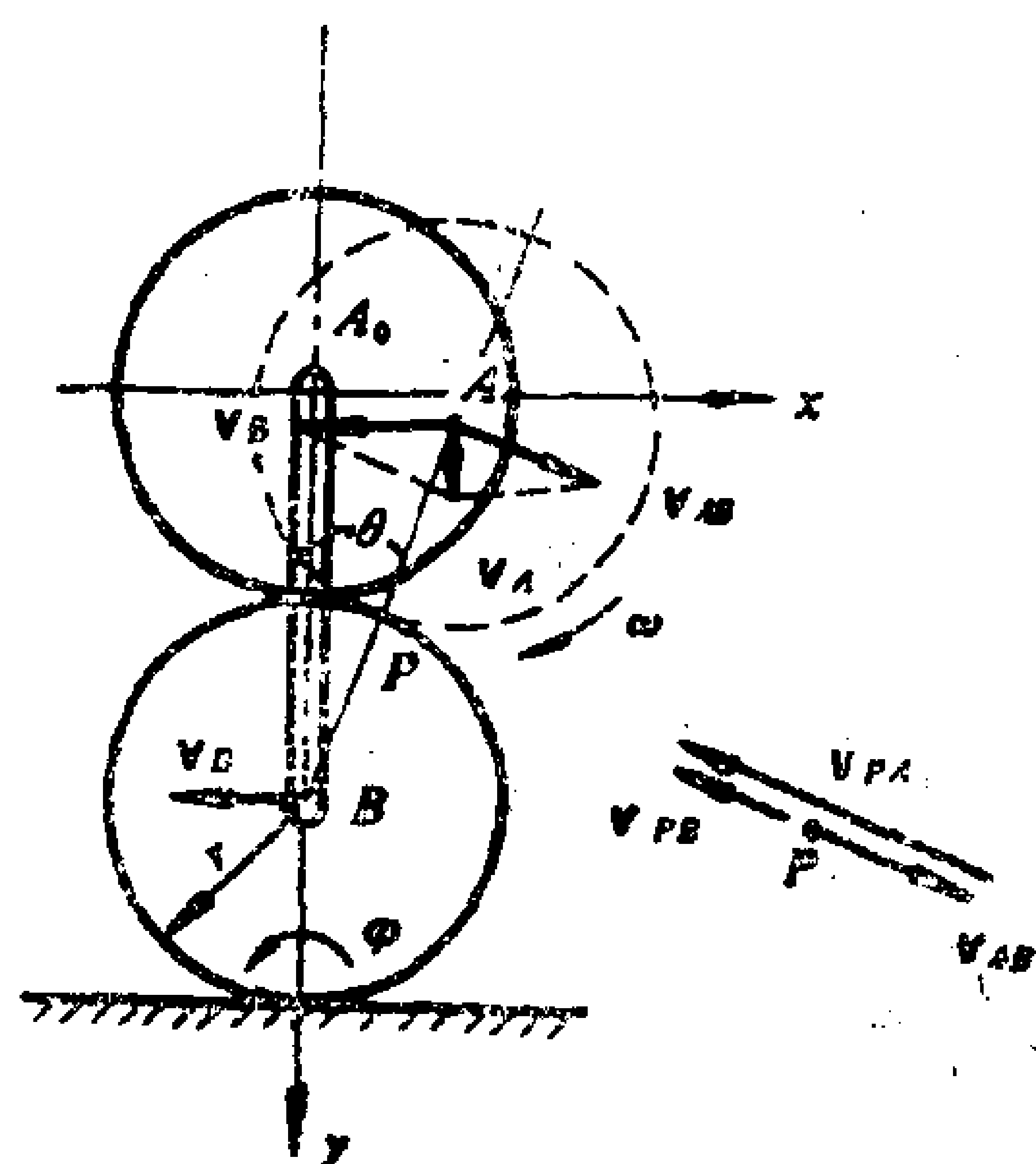
$$Q_\theta=-\frac{\partial V}{\partial\theta}=-\frac{3}{2}mgl\sin\theta$$

$$Q_\varphi=-\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0\tag{2}$$

将(1)和(2)代入尼尔森方程(6-1)，得到

$$\left.\begin{aligned}&\frac{11}{6}ml^2\ddot{\theta}+\frac{1}{2}ml(l+r)\ddot{\varphi}=\\&\quad-\frac{3}{2}mgl\sin\theta\\&\frac{1}{2}ml(l+r)\ddot{\theta}+\\&\left[J_0+\frac{1}{2}m(l+r)^2\right]\ddot{\varphi}=0\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

例6-7 两个相同的圆轮用连杆AB铰接后放置如图示。这是一个不稳定的平衡位置，稍有干扰即发生运动。设圆轮可以看作匀质圆盘，连杆的质量可以不计。此外，假定圆轮A与B之间以及圆轮B与水平面间的摩擦力都足以阻止相对滑动。



例6-7图

(1) 以圆轮B的转角φ以及连杆AB与铅垂线的交角θ为广义坐标，写出系统的动能与势能表达式，并由此得到确定θ的微分方程。

(2) 以A点的起始位置为原点，x轴与y轴如图示，以θ为参数，写出A点的轨迹方程。设圆轮半径为r。

［解］ (1)首先，进行运动学分析。两轮在一般位置时，有

$$v_B = r\dot{\varphi} \tag{1}$$

根据平面运动理论，有

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{AB} \tag{2}$$

而　$v_{AB}=2r\dot{\theta}$，因此

$$v_A^2=v_B^2+v_{AB}^2-2v_Bv_{AB}\cos\theta$$

$$=r^2(\dot{\varphi}^2+4\dot{\theta}^2-4\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta) \qquad (3)$$

以A，B为基点，研究P的速度，有

$$\boldsymbol{v}_p=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_{pA},\quad \boldsymbol{v}_p=\boldsymbol{v}_B+\boldsymbol{v}_{pB} \qquad (4)$$

联合(2)和(4)，得

$$\boldsymbol{v}_{AB}+\boldsymbol{v}_{PA}=\boldsymbol{v}_{PB}，即-2r\dot{\theta}+r\omega=r\dot{\varphi}$$

由此解得轮A的角速度

$$\omega=\dot{\varphi}+2\dot{\theta} \qquad (5)$$

其次，列写系统的动能和势能。轮B的动能，注意到式(1)，有

$$T_B=\frac{1}{2}mv_B^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\dot{\varphi}^2=\frac{3}{4}mr^2\dot{\varphi}^2$$

轮A的动能，注意到(3)和(5)，有

$$T_A=\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\omega^2$$

$$=3mr^2\dot{\theta}^2+\frac{3}{4}mr^2\dot{\varphi}^2+mr^2\dot{\theta}\dot{\varphi}(1-2\cos\theta)$$

系统的动能为

$$T=T_A+T_B=3mr^2\dot{\theta}^2+\frac{3}{2}mr^2\dot{\varphi}^2$$

$$+mr^2\dot{\theta}\dot{\varphi}(1-2\cos\theta) \qquad (6)$$

以B点为势能零点，势能为

$$V=2mgr\cos\theta \qquad (7)$$

而系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=3mr^2\dot{\theta}^2+\frac{3}{2}mr^2\dot{\varphi}^2+mr^2\dot{\theta}\dot{\varphi}$$

$$(1-2\cos\theta)-2mgr\cos\theta \tag{8}$$

再次，按尼尔森方程建立问题的运动微分方程。尼尔森方程(6-1)，在有势力情形下可写成形式

$$\frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{q}_s}-2\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \qquad (s=1,\ \cdots,\ n) \tag{9}$$

由(8)得

$$\dot{L}=6mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+3mr^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}+mr^2\ddot{\theta}\dot{\varphi}$$

$$\times(1-2\cos\theta)+mr^2\dot{\theta}\ddot{\varphi}(1-2\cos\theta)$$

$$+2mr^2\dot{\theta}^2\dot{\varphi}\sin\theta+2mgr\dot{\theta}\sin\theta$$

于是有

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{\varphi}}=3mr^2\ddot{\varphi}+mr^2\ddot{\theta}(1-2\cos\theta)\\
&+2mr^2\dot{\theta}^2\sin\theta\\
&\frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{\theta}}=6mr^2\ddot{\theta}+mr^2\ddot{\varphi}(1-2\cos\theta)\\
&+4mr^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta+2mgr\sin\theta\\
&\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial \theta}=2mr^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta\\
&+2mgr\sin\theta
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

将(10)代入(9)，得到

$$3mr^2\ddot{\varphi}+mr^2\ddot{\theta}(1-2\cos\theta)+2mr^2\dot{\theta}^2\sin\theta=0$$

$$6mr^2\ddot{\theta}+mr^2\ddot{\varphi}(1-2\cos\theta)-2mgr\sin\theta=0$$

化简后，得

$$3\ddot{\varphi}+\ddot{\theta}(1-2\cos\theta)+2\dot{\theta}^2\sin\theta=0 \tag{11}$$

$$6r\ddot{\theta}+r\ddot{\varphi}(1-2\cos\theta)-2g\sin\theta=0 \tag{12}$$

最后，求确定θ的微分方程。由(11)和(12)消去$\ddot{\varphi}$，得

$$17r\ddot{\theta}+4r\ddot{\theta}\cos\theta-4r\ddot{\theta}\cos^2\theta-2r\dot{\theta}^2\sin\theta$$
$$+4r\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta-6g\sin\theta=0 \tag{13}$$

将(13)两端乘以$\dot{\theta}$，并以$\theta=\dot{\theta}=0$为初始条件，积分得

$$\frac{1}{2}(17r\dot{\theta}^2+4r\dot{\theta}^2\cos\theta-4r\dot{\theta}^2\cos^2\theta)$$
$$+6g(\cos\theta-1)=0$$

由此解得

$$r\dot{\theta}^2=\frac{12g(1-\cos\theta)}{17+4\cos\theta-4\cos^2\theta} \tag{14}$$

(2) 求A点的轨迹方程。我们有

$$x=2r\sin\theta-r\varphi \tag{15}$$

$$y=2r(1-\cos\theta) \tag{16}$$

由(11)积分得

$$3\dot{\varphi}+\dot{\theta}(1-2\cos\theta)=C$$

因$t=0$时，$\dot{\theta}=\dot{\varphi}=0$，故$C=0$，于是

$$3\dot{\varphi}+\dot{\theta}(1-2\cos\theta)=0$$

再积分一次，得

$$3\varphi+\theta-2\sin\theta=C_1$$

因$t=0$时，$\theta=\varphi=0$，故$C_1=0$，于是

$$\varphi=\frac{2}{3}\sin\theta-\frac{1}{3}\theta \tag{17}$$

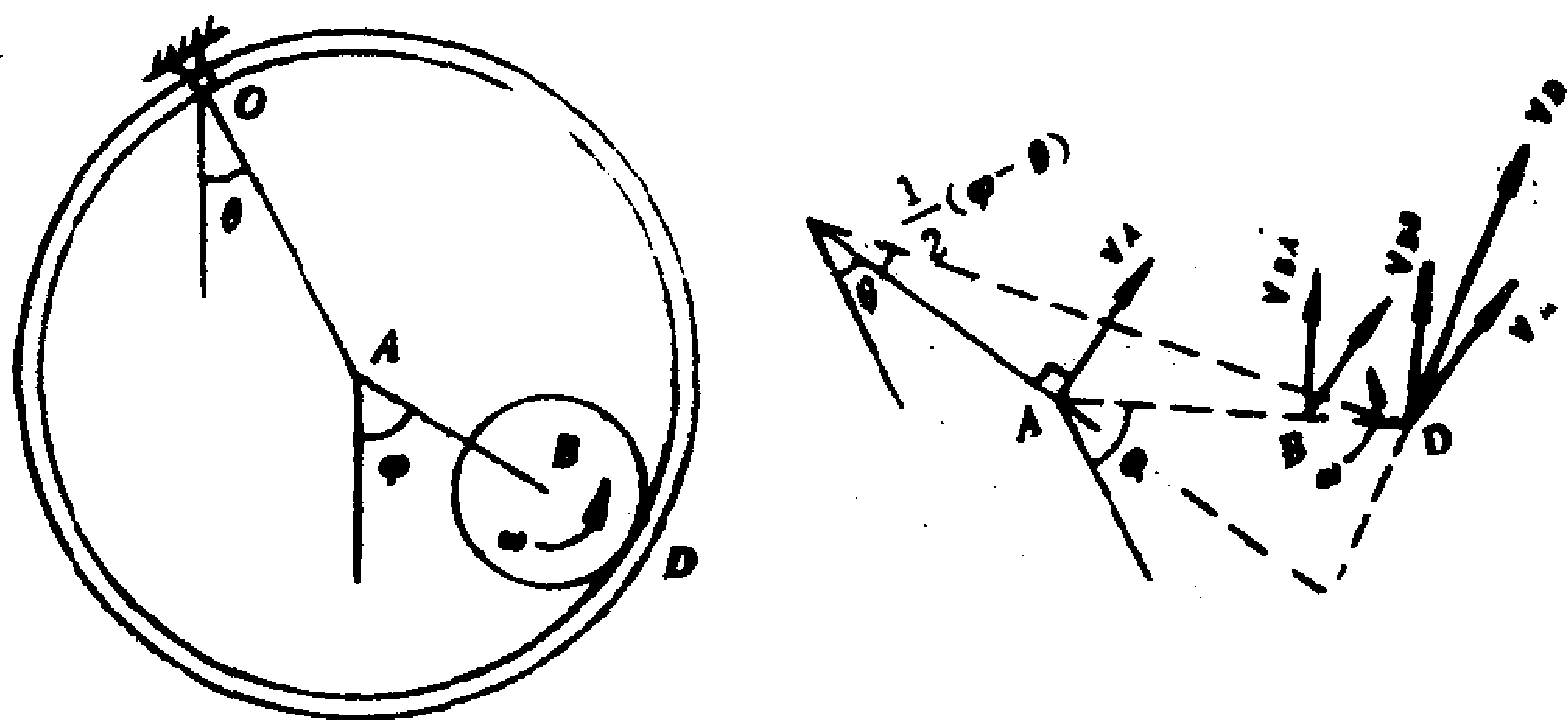
将(17)代入(15)，得

$$x=\frac{1}{3}(4r\sin\theta+\theta) \tag{18}$$

关系(18)和(16)，即为以θ为参数的轨迹方程。

例6-8 图示系统中，A为圆环，B为圆盘，A绕水平轴O转动，而B在A内作纯滚动。设A的半径为R，B的半径为r，$R=4r$。A与B的质量相同。用尼尔森方程写出系统的运动微分方程，并证明系统作微振动时的圆频率为

$\sqrt{\frac{2g}{15r}}$与$\sqrt{\frac{g}{4r}}$。



例6-3图

［解］ 系统有两个自由度，取θ，φ为广义坐标。

首先，进行运动学分析，来求B点速度和B的角速度。我们有

$$v_A=R\dot{\theta}=4r\dot{\theta} \tag{1}$$

根据平面运动理论

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_{BA}$$

而

$$v_{BA}=(R-r)\dot{\varphi}=3r\dot{\varphi} \tag{2}$$

于是

$$v_B^2=v_A^2+v_{BA}^2+2v_Av_{BA}\cos(\varphi-\theta)$$
$$=(4r\dot{\theta})^2+(3r\dot{\varphi})^2+2(4r\dot{\theta})(3r\dot{\varphi})\cos(\varphi-\theta)$$
$$=r^2[16\dot{\theta}^2+9\dot{\varphi}^2+24\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)] \tag{3}$$

又

$$\boldsymbol{v}_D=\boldsymbol{v}_B+\boldsymbol{v}_{DB}=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_{BA}+\boldsymbol{v}_{DB}$$

将其投影到圆环在D的切线方向，得

$$v_D=(v_A+v_{BA}+v_{DB})\cos\frac{\varphi-\theta}{2} \tag{4}$$

注意到(1)、(2)以及

$$v_D=8r\dot{\theta}\cos\frac{\varphi-\theta}{2}, \quad v_{DB}=r\omega$$

其中ω为B的角速度，则(4)成为

$$8r\dot{\theta}\cos\frac{\varphi-\theta}{2}=(4r\dot{\theta}+3r\dot{\varphi}+r\omega)\cos\frac{\varphi-\theta}{2}$$

由此解得

$$\omega=4\dot{\theta}-3\dot{\varphi} \tag{5}$$

其次，列写系统的动能和势能。

圆环A的动能为

$$T_A=\frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}(mR^2+mR^2)\dot{\theta}^2=16mr^2\dot{\theta}^2$$

圆盘B的动能为

$$T_B=\frac{1}{2}mv_B^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\omega^2$$
$$=\frac{1}{2}mr^2[16\dot{\theta}^2+9\dot{\varphi}^2+24\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)]$$
$$+\frac{1}{4}mr^2(4\dot{\theta}-3\dot{\varphi})^2$$

取O点为势能零点，则势能为

$$V=-4mgr\cos\theta-mg(4r\cos\theta+3r\cos\varphi)$$
$$=-mgr(8\cos\theta+3\cos\varphi)$$

系统的拉格朗日函数为

$$L=T_A+T_B-V$$
$$=\frac{1}{2}mr^2[48\dot{\theta}^2+9\dot{\varphi}^2+24\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)]+$$
$$\frac{1}{4}mr^2(4\dot{\theta}-3\dot{\varphi})^2+mgr(8\cos\theta+3\cos\varphi) \qquad (6)$$

再次，按尼尔森方程建立问题的运动微分方程。我们有

$$\dot{L}=mr^2[48\dot{\theta}\ddot{\theta}+9\dot{\varphi}\ddot{\varphi}+12\ddot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)+12\dot{\theta}$$
$$\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)-12\dot{\theta}\dot{\varphi}(\dot{\varphi}-\dot{\theta})\sin(\varphi-\theta)]$$
$$+\frac{1}{2}mr^2(4\dot{\theta}-3\dot{\varphi})(4\ddot{\theta}-3\ddot{\varphi})-mgr(8\dot{\theta}\sin\theta$$
$$+3\dot{\varphi}\sin\varphi) \qquad (7)$$

$$\frac{\partial\dot{L}}{\partial\dot{\theta}}=mr^2[48\ddot{\theta}+12\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)-12\dot{\varphi}$$
$$(\dot{\varphi}-\dot{\theta})\sin(\varphi-\theta)+12\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin(\varphi-\theta)]$$
$$+2mr^2(4\ddot{\theta}-3\ddot{\varphi})-8mgr\sin\theta \qquad (8)$$

$$\frac{\partial\dot{L}}{\partial\dot{\varphi}}=mr^2[9\ddot{\varphi}+12\ddot{\theta}\cos(\varphi-\theta)-12\dot{\theta}$$
$$(\dot{\varphi}-\dot{\theta})\sin(\varphi-\theta)-12\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin(\varphi-\theta)]$$
$$-\frac{3}{2}mr^2(4\ddot{\theta}-3\ddot{\varphi})-3mgr\sin\varphi \qquad (9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=12mr^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin(\varphi-\theta)-8mgr\sin\theta \qquad (10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi}=-12mr^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin(\varphi-\theta)-3mgr\sin\varphi \qquad (11)$$

将(8)-(11)代入尼尔森方程，并整理得

$$56\ddot{\theta}-6\ddot{\varphi}+12\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)-12\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\theta)$$

$$+\frac{8g}{r}\sin\theta=0 \qquad (12)$$

$$9\ddot{\varphi}-4\ddot{\theta}+8\ddot{\theta}\cos(\varphi-\theta)+8\dot{\theta}^2\sin(\varphi-\theta)$$

$$+\frac{2g}{r}\sin\varphi=0 \qquad (13)$$

最后，计算系统作微振动时的圆频率。

因θ，φ很小，$\sin(\varphi-\theta)\approx\varphi-\theta$，$\cos(\varphi-\theta)\approx1$，$\sin\theta\approx\theta$，$\sin\varphi\approx\varphi$，方程(12)和(13)线性化为

$$56\ddot{\theta}+6\ddot{\varphi}+8\frac{g}{r}\theta=0$$

$$9\ddot{\varphi}+4\ddot{\theta}+2\frac{g}{r}\varphi=0$$

系统频率方程为

$$\begin{vmatrix} -56k^2+8\frac{g}{r}, & -6k^2 \\ -4k^2 & -9k^2+2\frac{g}{r} \end{vmatrix}=0$$

即

$$\left(15k^2-2\frac{g}{r}\right)\left(4k^2-\frac{g}{r}\right)=0$$

由此得圆频率

$$k_1=\sqrt{\frac{2g}{15r}},\ k_2=\sqrt{\frac{g}{4r}}$$

三、习题

6-1 试把有多余坐标系统的拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_u}-\frac{\partial T}{\partial q_u}=Q_u+\sum_{\gamma=1}^{m}\lambda_\gamma\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_u}$$

$$(u=1,\ 2,\ \cdots,\ n+m)$$

化为尼尔森方程的形式。

6-2 试把带参数约束系统的拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s \qquad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

化为尼尔森方程的形式。

6-3 试把包含伺服约束系统的拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\nu=1}^{j}\lambda_\nu A_{\nu s}$$

$$(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

化为尼尔森方程的形式。

6-4 试把耗散约束系统的拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s-\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s}$$

$$(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

化为尼尔森方程的形式。

6-5 已知力学系统的动能和势能

$$T=\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2}{a+bq_2^2}+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2$$

$$V=c+dq_2$$

式中a，b，c，d均为常量，试求系统的运动。

答：$q_1=c_1\left[a+\frac{1}{2}bA^2\right]t-\frac{c_1ba^2}{4(2d+bc_1^2)^{\frac{1}{2}}}$

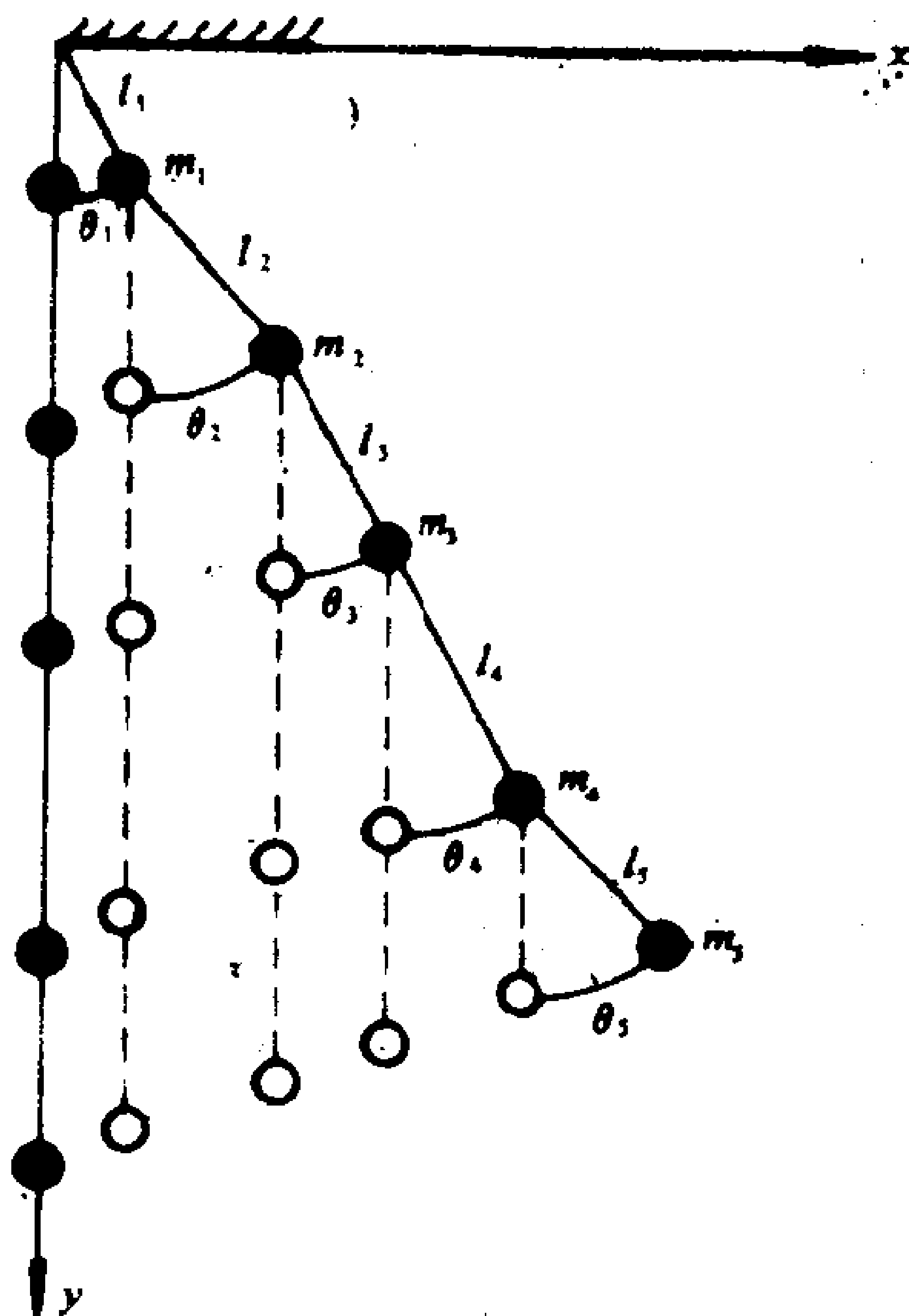
$$\times\sin[2(2d+bc_1^2)^{-\frac{1}{2}}t+\alpha]+\beta$$

$$q_2=A\sin[(2d+bc_1^2)^{-\frac{1}{2}}t+\alpha]$$

式中：A，α，β均为积分常量，而

$$c_1=p_1=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_1}=\frac{\dot{q}_1}{a+bq_2^2}。$$

6-6 图示多质点系统，它由质量为$m_i(i=1,2,\cdots,N)$的N个质点用不计质量、长度为$l_i(i=1,2,\cdots,N)$的N根细杆连接而成。在重力作用下于铅垂平面内运动。试写出系统动能和势能的表达式，并列出$i=2$时系统的运动方程。



题6-6 图

答：
$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{i}\sum_{\beta=1}^{i}m_i l_\alpha l_\beta\dot{\theta}_\alpha\dot{\theta}_\beta\cos(\theta_\alpha-\theta_\beta)$$

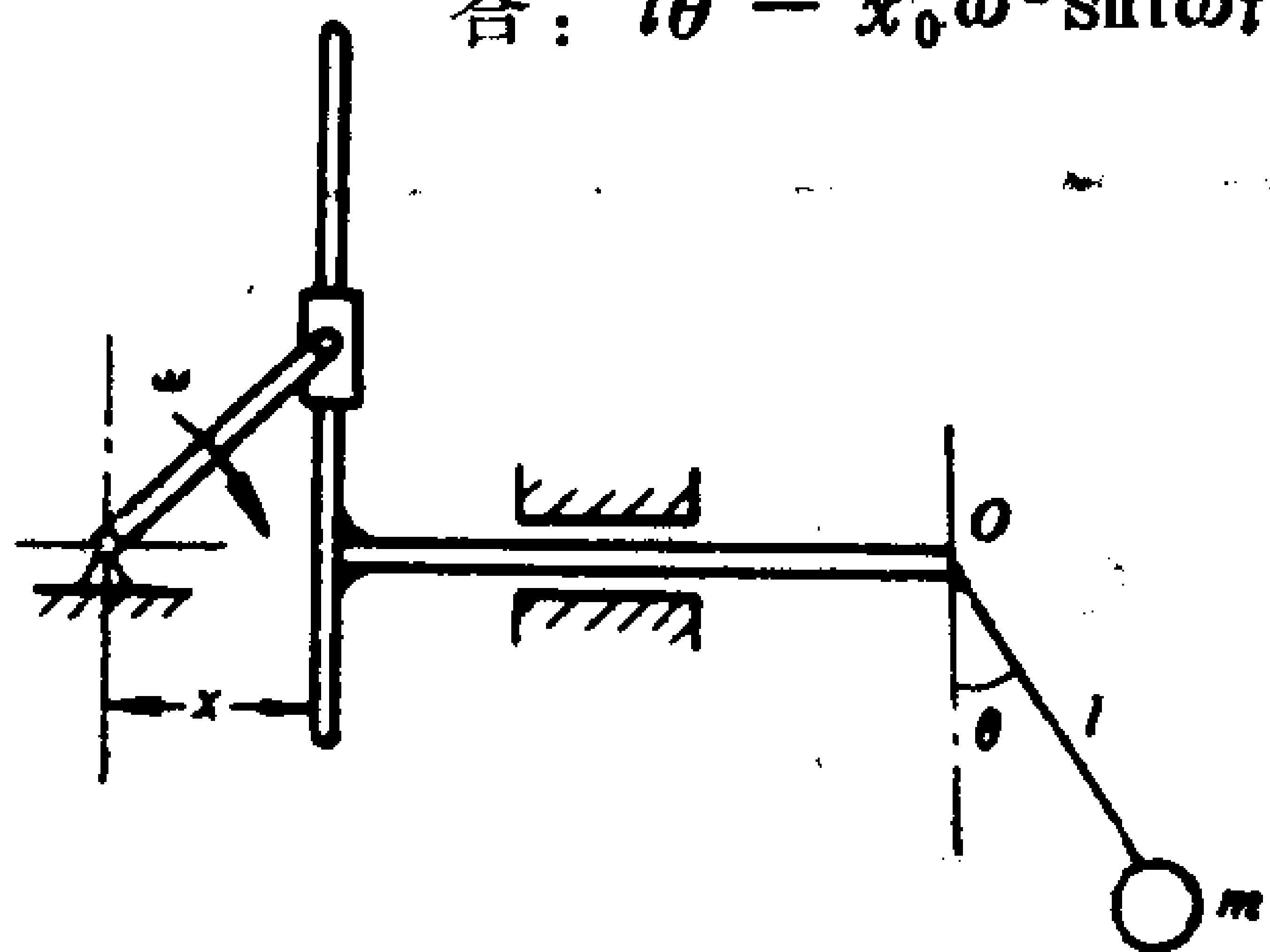
$$V=\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=\alpha}^{N}m_i g l_\alpha(1-\cos\theta_\alpha)$$

$$(m_1+m_2)l^2{}_1\ddot{\theta}_1+m_2 l_1 l_2\cos(\theta_1-\theta_2)+m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)+(m_1+m_2)g l_1\sin\theta_1=0$$

$$m_2 l_2^2\ddot{\theta}_2+m_2 l_1 l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_1-m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)+m_2 g l_2\sin\theta_2=0$$

6-7 图示导杆机构带动单摆的支点按已知规律$x=x_0\sin\omega t$ 作水平运动。试写出质点m的运动微分方程。

答：$l\ddot{\theta}-x_0\omega^2\sin\omega t\cos\theta+g\sin\theta=0$

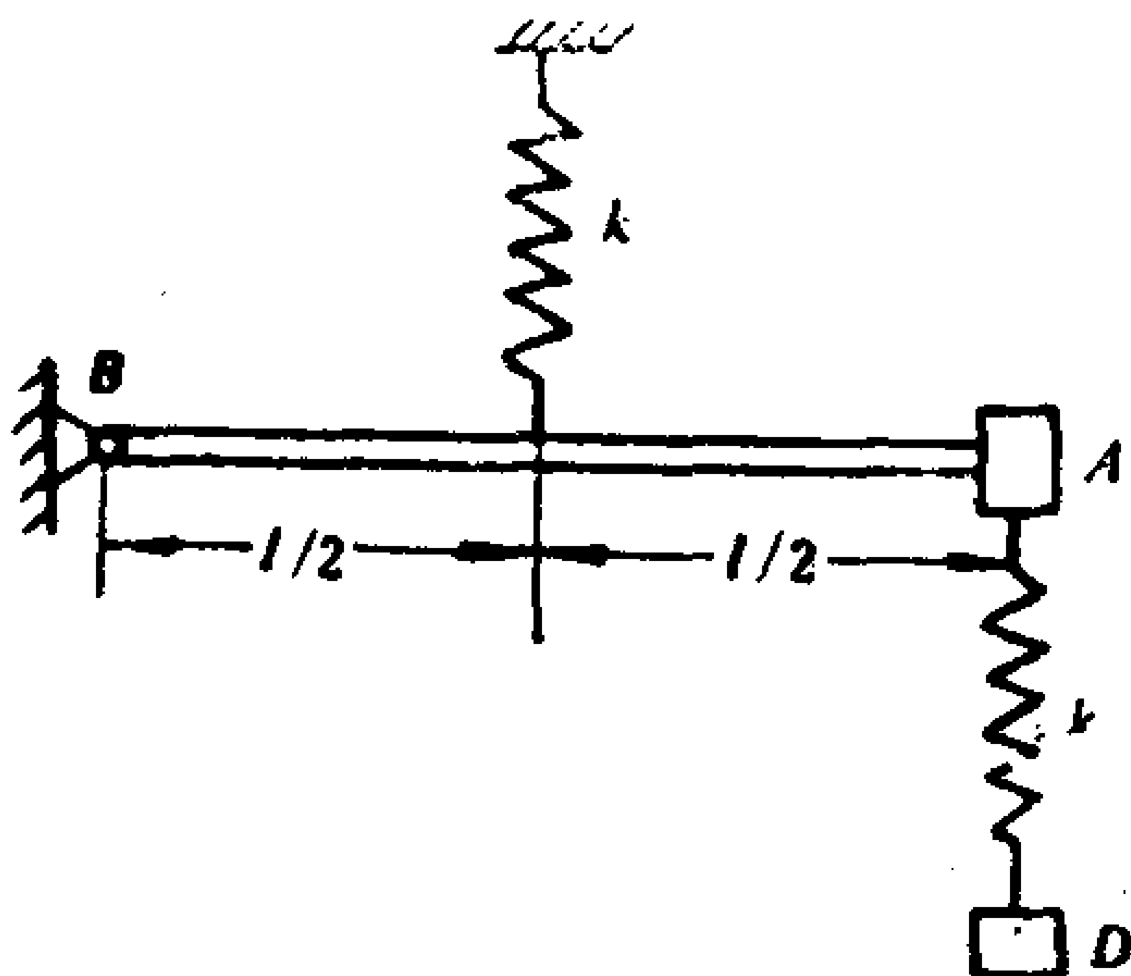


题6-7 图

6-8 刚杆AB的长l，其质量不计，杆的一端B铰支，另一端固连质量为m的物体A，其下连接一弹簧 系 数 为k的弹簧，并挂有质量为m的物体D，杆AB中点用弹簧系 数为k的弹簧系住，使杆在水平位置平衡，如图所示。求系统振动的微分方程。

答：$m\ddot{x}_1+\frac{5}{4}kx_1-kx_2=0$

$m\ddot{x}_2-kx_1+kx_2=0$



题6-8 图

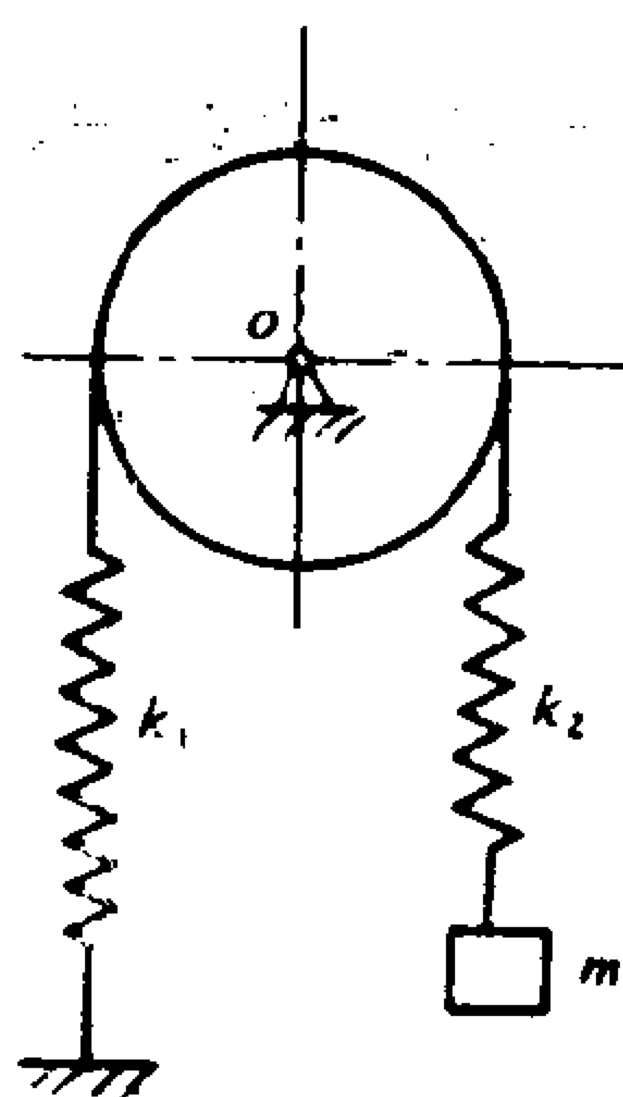
6-9 滑轮可绕水平轴O转动，如图所示。滑轮对O轴的转动惯量为J，半径为r；在滑轮上跨过一不可伸长的绳，绳的一端连结在铅垂弹簧上，另一端也与弹簧相连并悬挂一质量为m的重物；两弹簧的弹性系数各为k_1和k_2。设绳与滑轮间无滑动，试建立系统的运动微分方程。

答：$m\ddot{x}+k_2x-k_2r\varphi=0$

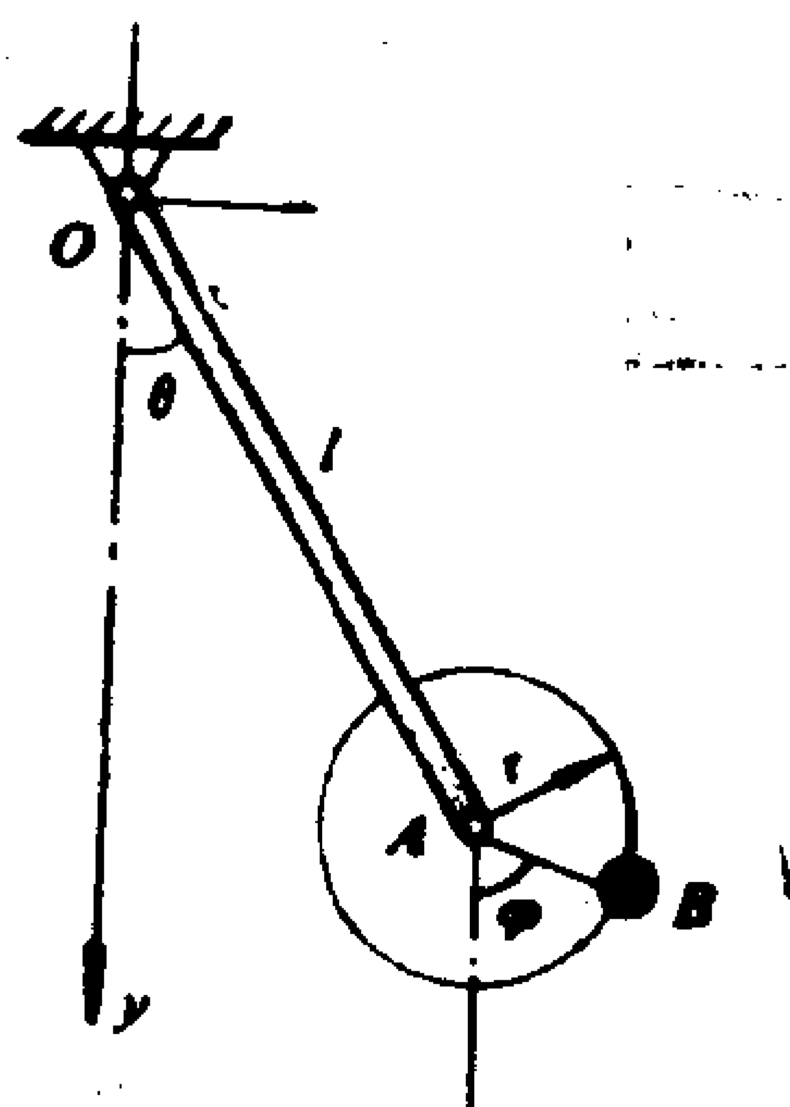
$J\ddot{\varphi}-k_2rx+(k_1+k_2)r^2\varphi=0$

6-10 杆OA的长$l=1.5\text{m}$，质量不计，可绕水平轴O摆动，在A端装一质量$M=20\text{N}$，半径$r=0.5\text{m}$的均质圆盘；在圆盘边上B点固结一质量$m=10\text{N}$的质点，如图所示。试求系统在平衡位置附近作微小振动的运动微分方程。

答：$9\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}+6g\theta=0$；$3\ddot{\theta}+2\ddot{\varphi}+2g\varphi=0$



题6-3 图



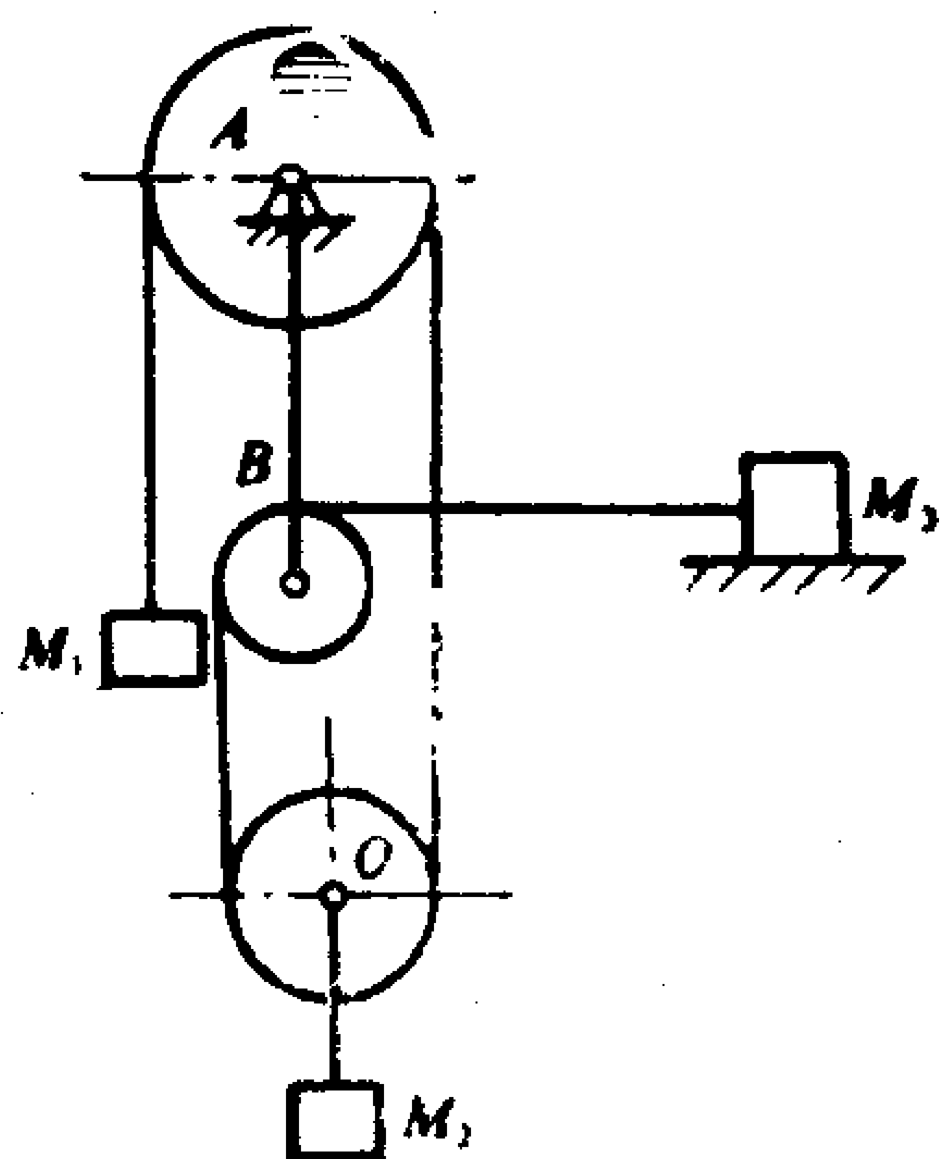
题6-10图

6-11 图示物块M_1，M_2，M_3的质量分别等于m_1，m_2，m_3；动滑轮O，定滑轮A、B及绳的质量略去不计，并不计摩擦。求当物块M_2下落时，各物块的加速度。

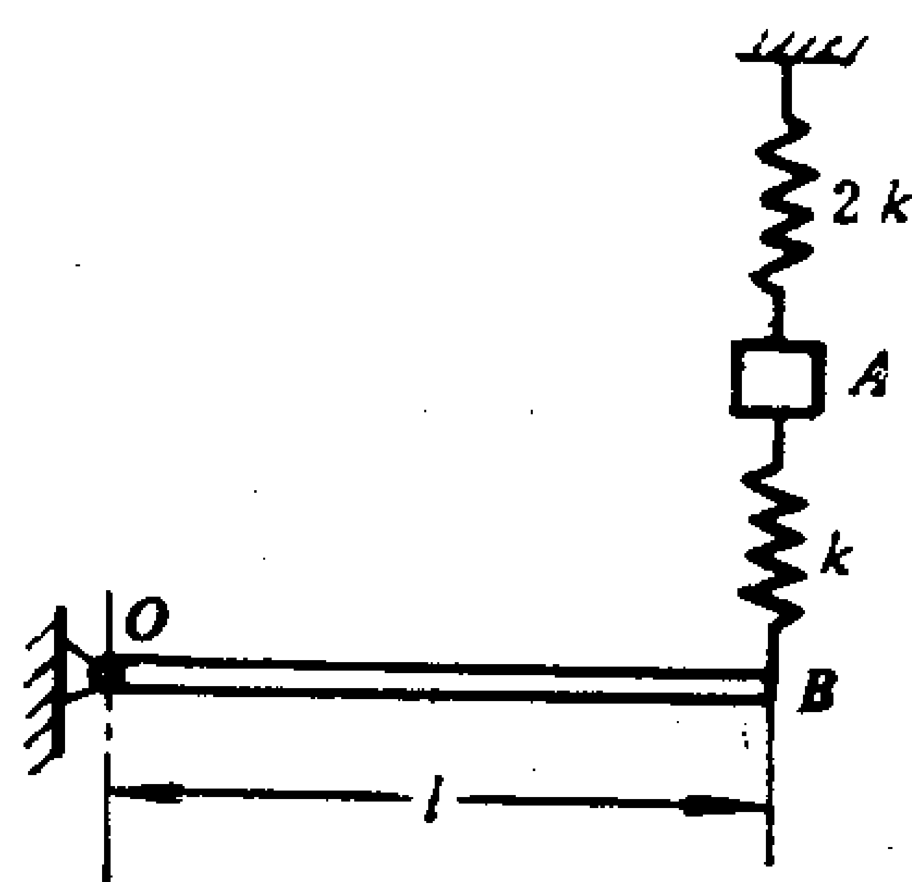
答：$a_1=\dfrac{2m_2m_3-m_1(m_2+4m_3)}{m_1m_2+4m_1m_3+m_2m_3}g$

$a_2=\dfrac{m_1m_2+m_2m_3-2m_1m_3}{m_1m_2+4m_1m_3+m_2m_3}g$

$a_3=\dfrac{3m_1m_2}{m_1m_2+4m_1m_3+m_2m_3}g$



题6-11图



题6-12图

6-12 图示物块A的质量为m，均质杆OB的质量为1.5 m，长为l，上、下两弹簧的弹性系数分别为$2k$与k；在平衡位置时，弹簧处于铅垂，而杆OB处于水平。试求系统的主振动频率；若给杆以微小的起始角速度ω_0时，物块A的速度等于零。试求物块A的运动方程。

答：$\omega_{n1}=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，$\omega_{n2}=2\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$$y=\frac{l\omega_0}{3}\sqrt{\frac{m}{K}}\left[\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t-\frac{1}{2}\sin 2\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right]$$

6-13 均质杆长为l，质量为m，两端被限制在一光滑垂直圆环的圆周上运动，圆环的半径$r>l/2$，圆环以匀角速度ω绕其铅垂直径转动，求杆的运动方程(取圆环圆心至杆中点的垂线与环铅直直径所夹的角φ为广义坐标)。

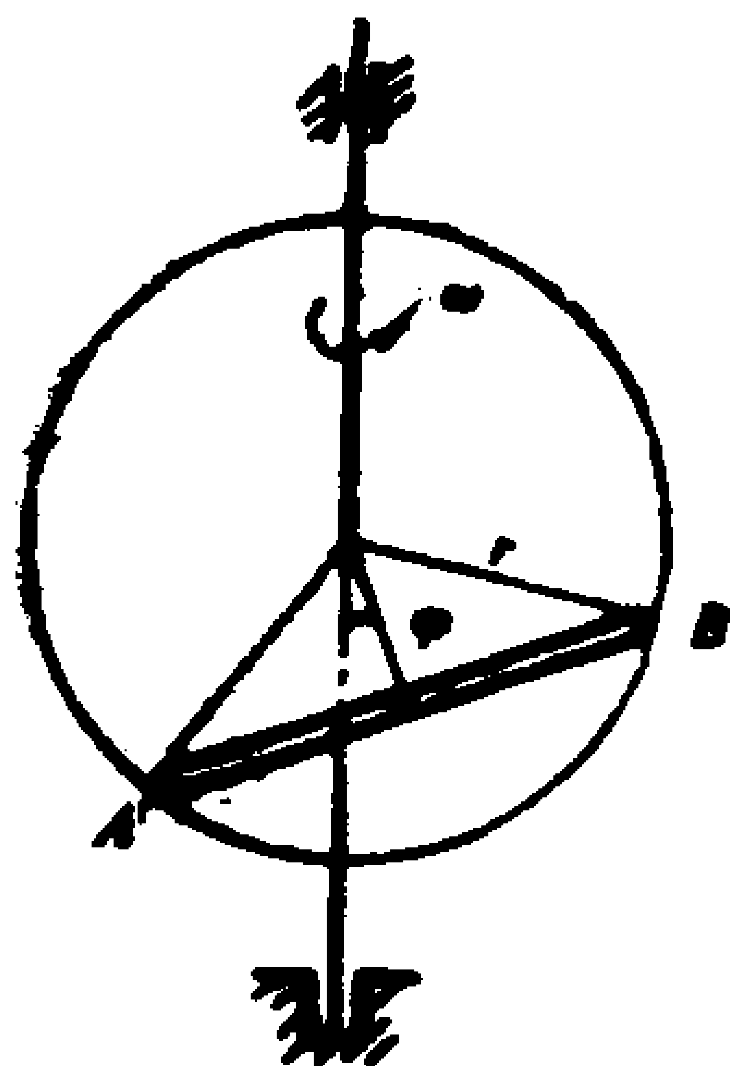
答：$$m\left(r^2-\frac{l^2}{6}\right)\ddot{\varphi}-m\left(r^2-\frac{l^3}{3}\right)\omega^2\sin\varphi\cos\varphi+mg\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi=0$$

6-14 光滑杆AB固结在铅直轴oz上的A点，与轴成α角．并以匀角速度ω绕oz轴转动，如图示。已知$OA=h$，$AB=l$。一质量为m的小球被限制沿杆AB运动，求小球的运动规律。如小球在A点由静止开始运动，并求小球由A点到B点所需时间。

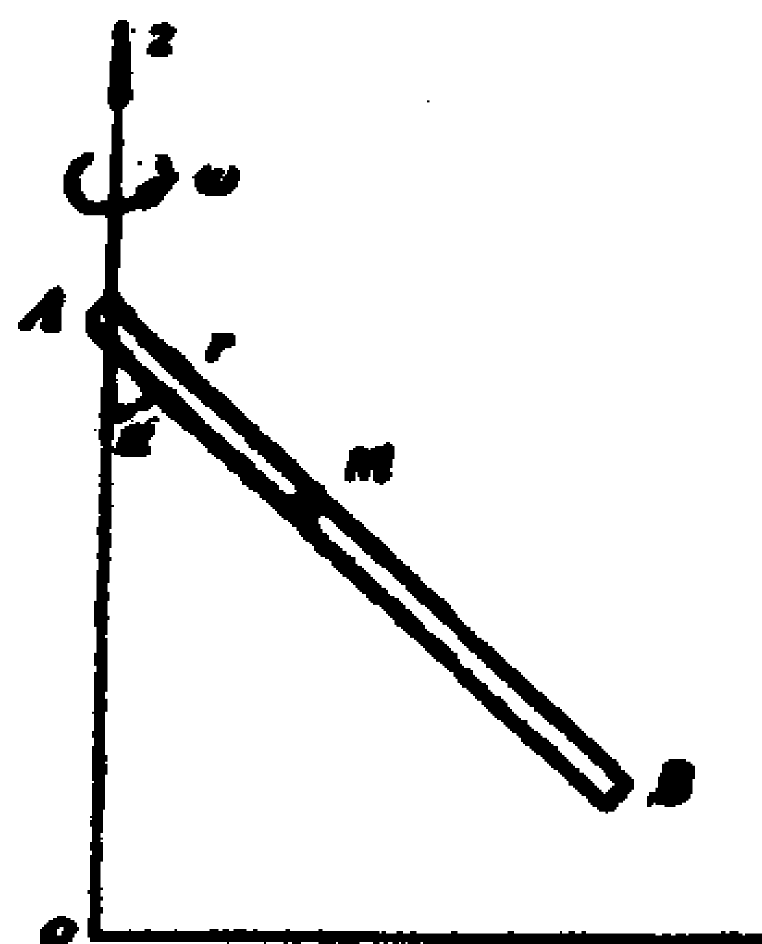
答：$\ddot{r}-(\omega^2\sin^2\alpha)r=g\cos\alpha$

运动方程　$r=\dfrac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}[\mathrm{ch}(\omega\sin\alpha)t-1]$

$$\text{或} t=\frac{1}{\omega\sin\alpha}\ln\left[\left(1+\frac{l\omega^2\sin^2\alpha}{g\cos\alpha}\right)\right.$$



题6-13图



题6-14图

$$\left.+\sqrt{\left(1+\frac{l\omega^2\sin^2\alpha}{g\cos\alpha}\right)^2-1}\;\right]$$

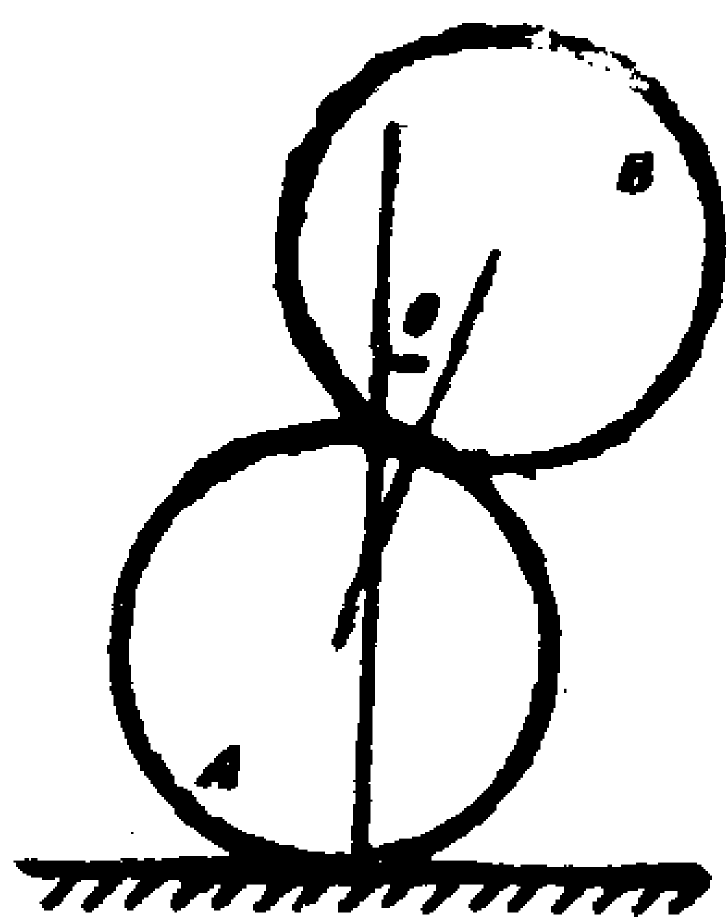
6-15 匀质圆球A，B质量分别为m_1，m_2，半径皆为a，球B安置在球A的顶端，而球A放在光滑的水平面上，如图示。球B由静止开始运动，设两球接触处无滑动，试证明以两球中心线与铅垂方向间夹角θ表示的运动微分方程为

$$a\dot{\theta}(7m_1+5m_2\sin^2\theta)=5g(m_1+m_2)(1-\cos\theta)$$

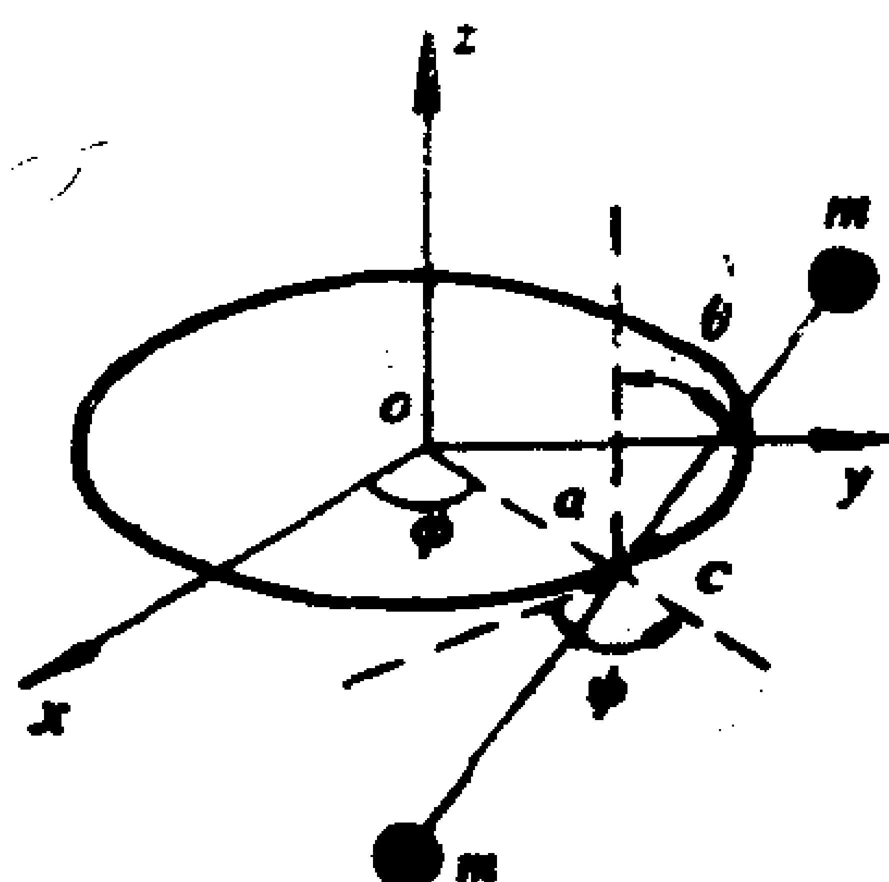
6-16 在长为$2l$，质量不计的细杆两端，各固结一个质点，其质量均为m。细杆中心c被限制在半径为a的水平圆周上运动，如图示。试求系统的运动微分方程。

答：$\ddot{\varphi}=0$，　$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin^2\theta\cdot\dot{\psi})=0$，

$$\ddot{\theta}-2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\psi}^2=0$$



题6-15图



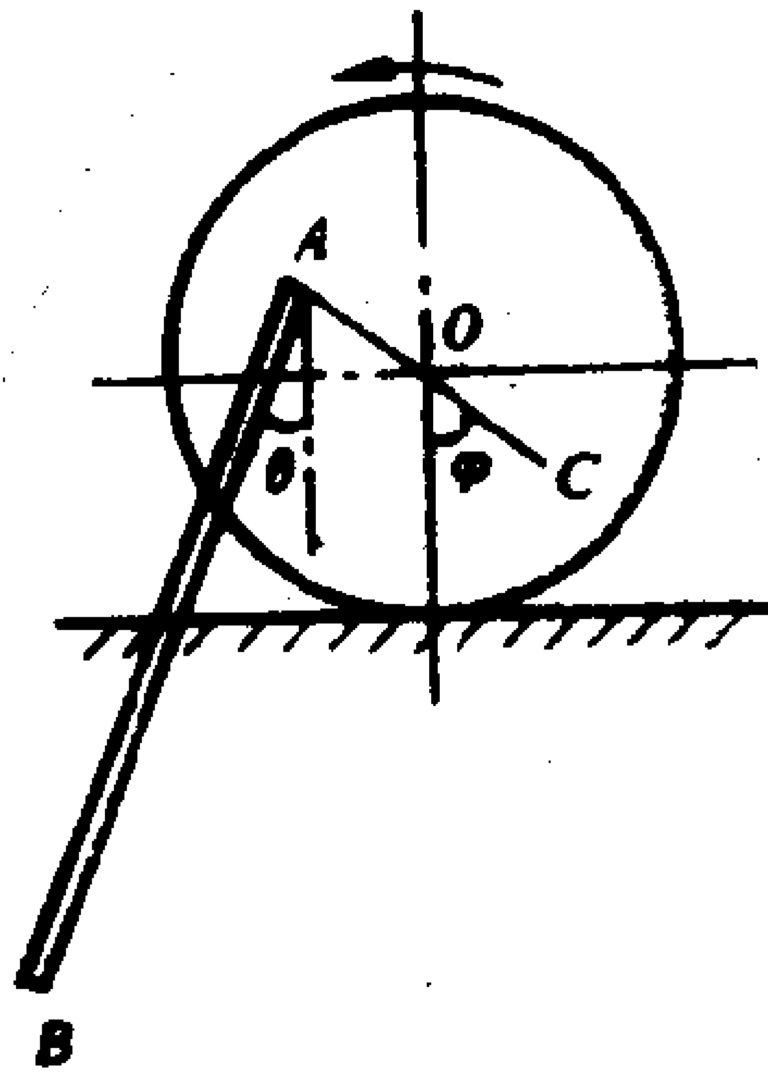
题6-16图

6-17 有一半径为r质量为$2m$的圆筒，其重心在C点，点C距其几何中心O为$r/2$，圆筒对重心C的转动惯量$J=mr^2$。圆筒可以在水平面上自由滚动。一长为$3r$质量为m的均质杆用销钉连在圆筒对O与C成对称的A点。设销钉完全光滑，求系统微小摆动时的运动微分方程式。

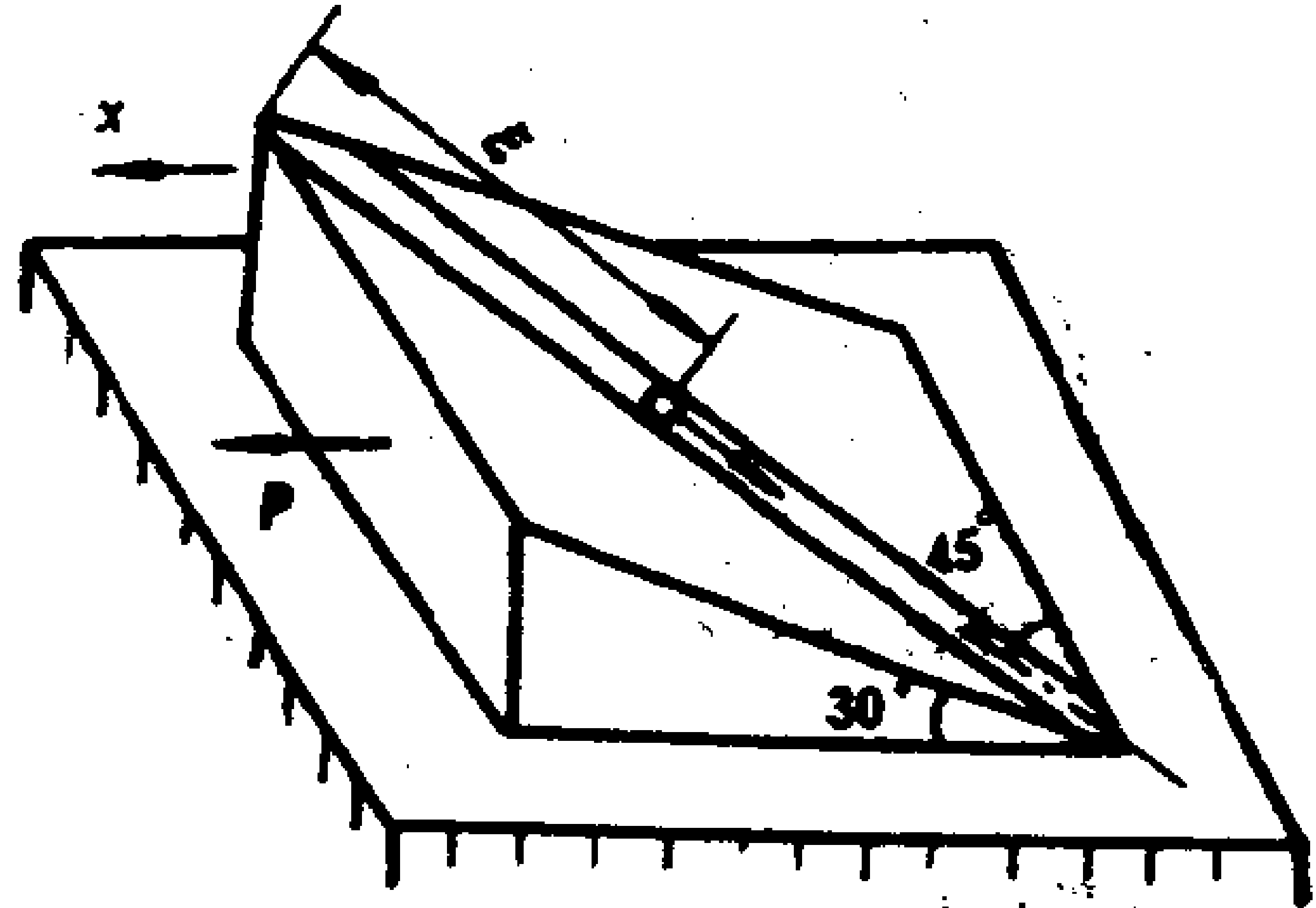
答：$3r(5\ddot{\varphi}+3\ddot{\theta})+2g\varphi=0$，$r(3\ddot{\varphi}+4\ddot{\theta})+2g\theta=0$

6-18 质量为$5m$的楔块在水平常力P的作用下，沿力的指向在光滑的水平面上作平动。今有质量为m的小球在楔块斜面上的对角直槽内作向下的相对运动，如图示。设小球受的运动阻力为$\boldsymbol{R}=-b\boldsymbol{v}$（式中：$b$——常数，$v$——相对速度）。试求以广义坐标$x$，$\xi$表示的系统运动微分方程。

答：$6m\ddot{x}-m\frac{\sqrt{6}}{4}\ddot{\xi}=P$，$\ddot{\xi}+\frac{b}{m}\dot{\xi}-\frac{\sqrt{6}}{4}\ddot{x}=g\frac{\sqrt{2}}{4}$



题6-17图



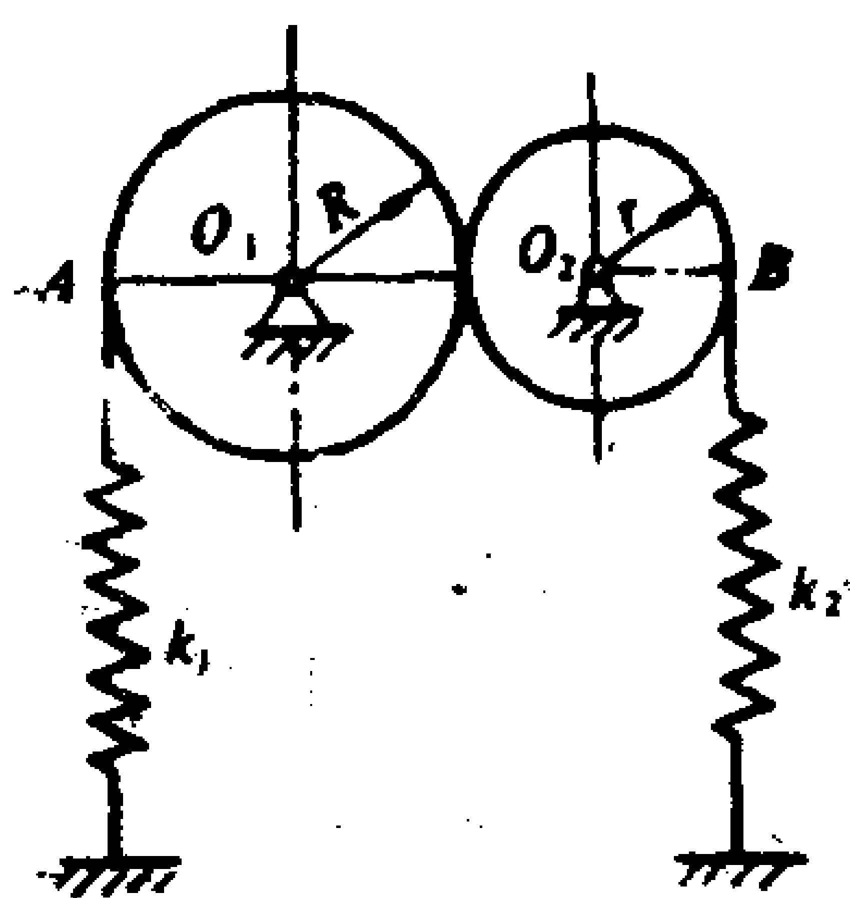
题6-18图

6-19 两个摩擦轮可分别绕水平轴O_1与O_2转动，互相接触，不能相对滑动。在图示位置（半径O_1A与O_2B在同一水平线上）弹簧不受力，弹簧系数分别为k_1与k_2；摩擦轮可视为等厚均质圆盘，质量为m_1与m_2。求系统微幅振动的周期。

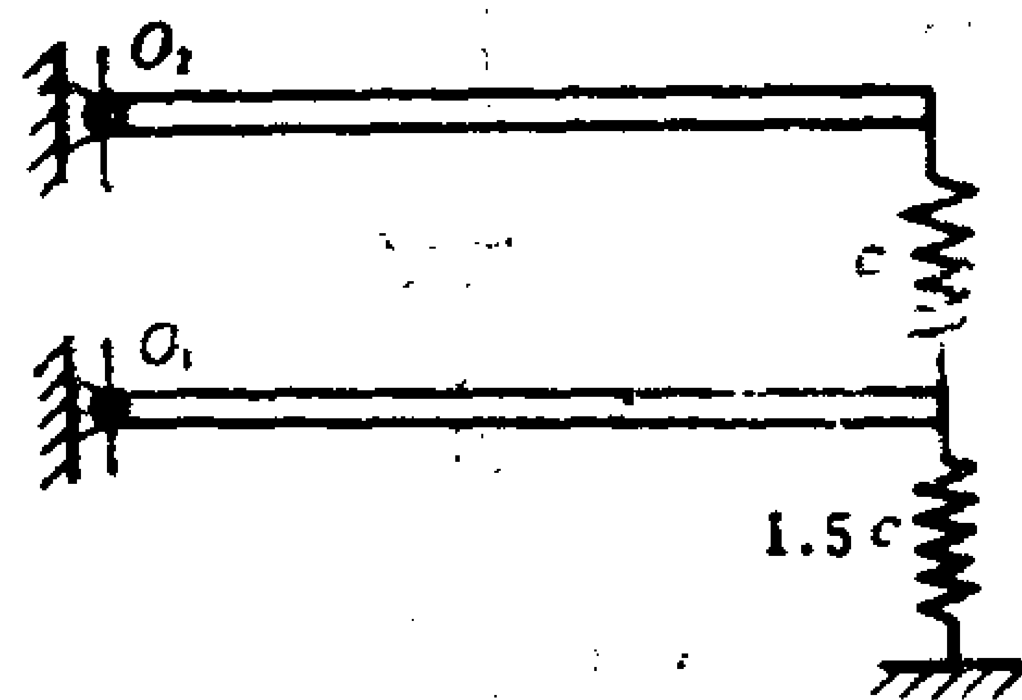
$$答：T=2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{2(k_1+k_2)}}$$

6-20 两根长度相同的均质杆的重量为P，上部弹簧的刚性系数等于c，下部弹簧的刚性系数等于$1.5c$。在平衡状态下，杆处于水平而弹簧铅垂。求该系统的主振动频率。

$$答：k_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6cg}{P}}\ ；\ k_2=3\sqrt{\frac{cg}{P}}$$



题6-19图



题6-20图

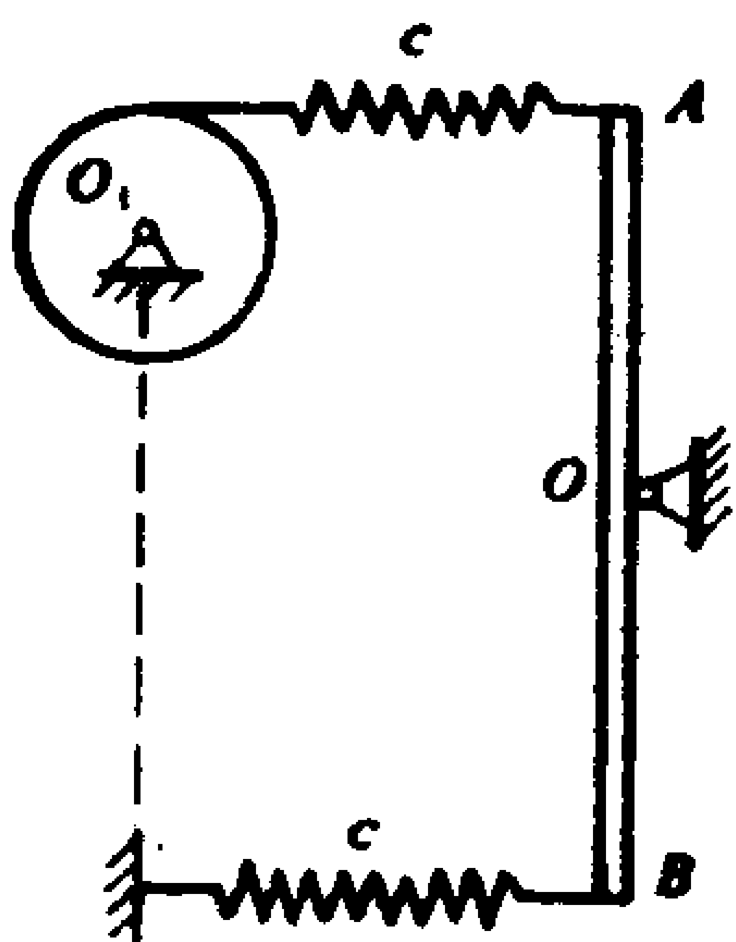
6-21 均质圆盘的重量为P，均质杆AB的重量为$4P$。$OA=OB$，每一弹簧的刚性系数为c。在平衡位置时，杆处于铅垂，而弹簧位于水平，并处于未变形的状态下。在起始时刻，杆离开平衡位置倾斜一个角度φ_0，此时圆盘的转角，杆及圆盘的角速度等于零。试求系统的主振动频率和杆的微振动方程。

答：$k_1=\sqrt{\dfrac{cg}{2P}}$，$k_2=\sqrt{\dfrac{3cg}{P}}$

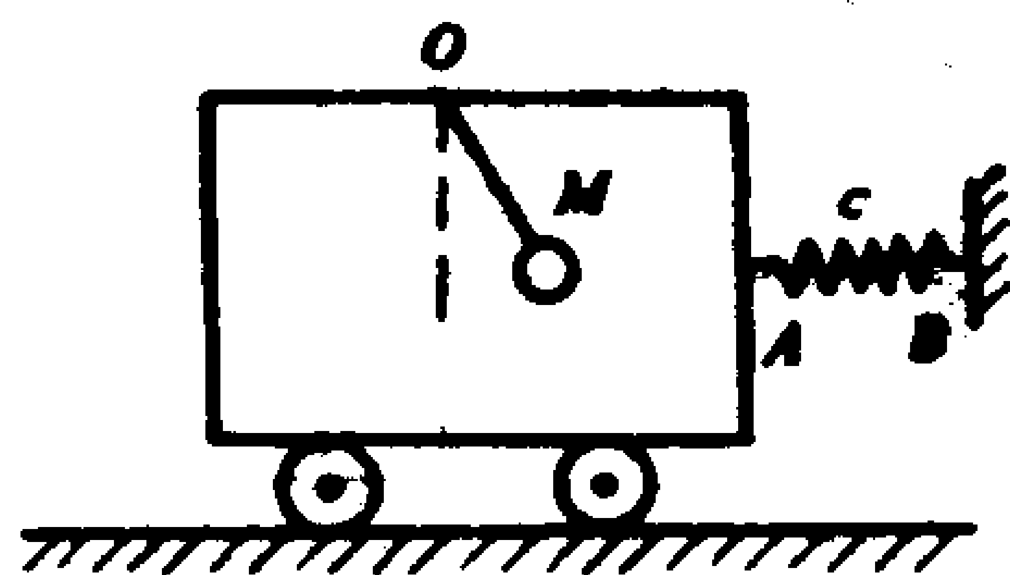
$$\varphi=\frac{\varphi_0}{5}\left[3\cos\sqrt{\frac{cg}{2P}}t+2\cos\sqrt{\frac{3cg}{P}}t\right]$$

6-22 小车重量为24kN，重物M的重量为2kN，联接器AB的刚性系数$c=200\text{N/cm}$，$OM=1.2\text{m}$。小车与重物一起发生微小的振动，其振动方向与小车侧表面平行。假设略去未受张力的绳索OM的重量，求系统的主振动频率。

答：$k_1=2.48\text{rad/s}$；$k_2=3.30\text{rad/s}$。



题6-21图

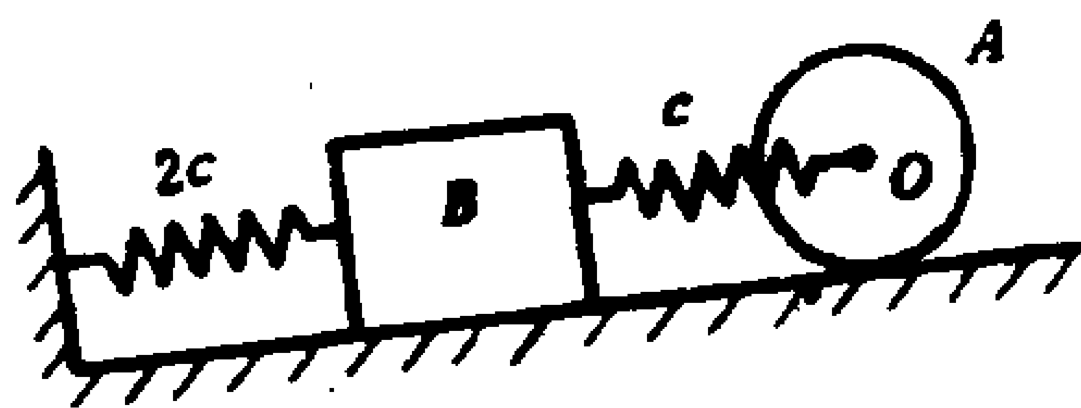


题6-22图

6-23 均质实心圆柱体A的质量等于m，物体B的质量为$3m$。将圆柱体A的轴O与物体B连接，处于水平位置的弹簧的刚性系数等于c。将物体B与墙连接，且处于水平状态的弹簧的刚性系数为$2c$。在初始时刻，轴O离开平衡位置的位移为x_0，而物体B的位移为零，其初始速度也为零。试求系统的主振动频率及圆柱轴的运动方程。圆柱体只滚动而不滑动。物体B与平面之间的摩擦可以忽略。

答：$k_1=\sqrt{\dfrac{c}{3m}}$；$k_2=2\sqrt{\dfrac{c}{3m}}$；

$$x=\frac{x_0}{3}\left[2\cos\sqrt{\frac{c}{3m}}t+\cos 2\sqrt{\frac{c}{3m}}t\right]$$



题6-23图

6-24 试用尼尔森方程解题4-152。

第七章　哈密顿方程及其积分方法

一、基本理论与公式

1. 哈密顿方程

(1) 哈密顿函数

1°哈密顿函数$H=-L+\sum_{s=1}^{n} p_s\dot{q}_s$　　(7-1)

其中L为拉格朗日函数，p_s为广义动量

$$p_s=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \tag{7-2}$$

哈密顿函数对完全稳定的保守系统表示力学系统的总能量。

2°由(7-1)和(7-2)，已知拉格朗日函数可以造出哈密顿函数。

3°在构造哈密顿函数时必须将其表为广义坐标、广义动量和时间的函数，即

$$H=H(q_s, p_s, t) \tag{7-3}$$

这就要求由(7-2)解出$\dot{q}_s=\dot{q}_s(q_k, p_k, t)$，然后将其代入(7-1)。

(2) 哈密顿正则方程

1°哈密顿正则方程为

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s} \qquad (s=1, 2, \cdots, n)$$

(7-4)

2°已知哈密顿函数H，可以按(7-4)列写出哈密顿正则方程。

3°已知哈密顿函数H，可以造出系统的拉格朗日函数L。构造方法如下：由哈密顿方程(7-4)的第一组可解出
$p_s=p_s(q_k, \dot{q}_k, t)$；
由(7-1)解得

$$L=-H+\sum_{s=1}^{n} p_s\dot{q}_s \qquad (7-5)$$

将所得$p_s=p_s(q_k, \dot{q}_k, t)$代入(7-5)，便造出$L=L(q_s, \dot{q}_s t)$。

4°对于简单系统，哈密顿方程可直接用通常方法积分求解。

2.布洼松定理及其应用

(1) 泊松括号

两函数$\varphi(q_s, p_s, t)$，$\psi(q_s, p_s, t)$的泊松括号定义如下

$$(\varphi, \psi)=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_s}\frac{\partial\psi}{\partial p_s}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_s}\frac{\partial\psi}{\partial q_s}\right)$$

(7-6)

根据定义(7-6)，可由给定的φ，ψ，计算出它们的泊松括号。

(2) 泊松条件

$f(q_s, p_s, t)=c$为哈密顿方程(7-4)的第一积分的充要条件(泊松条件)是

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(f, H)=0 \tag{7-7}$$

根据泊松条件(7-7)可以判断函数f是否为哈密顿函数H的系统的第一积分。

(3) 泊松定理

如果已知哈密顿正则方程的不处于相互内旋的两个第一积分

$$f_1(q_s, p_s, t)=c_1, \ f_2(q_s, p_s, t)=c_2$$

那么(f_1, f_2)也是哈密顿正则方程的积分。

3. 哈密顿-雅科比方程

(1) 哈密顿-雅科比方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(t, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_s}\right)=0 \tag{7-8}$$

1°已知哈密顿函数H，将其中广义动量p_s用$\dfrac{\partial S}{\partial q_s}$替代，按(7-8)可列出哈密顿-雅科比方程。

2°已知拉格朗日函数L，可列出哈密顿-雅科比方程。只要用本章1、(1)、3°项的方法造出H，然后按(7-8)可列写出哈密顿-雅科比方程。

(2) 哈密顿-雅科比定理

已知哈密顿-雅科比方程(7-8)的全积分$S=S(q_s, \alpha_s, t)$，正则方程(7-4)的$2n$个第一积分则为

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_s}=\beta_s, \ \frac{\partial S}{\partial q_s}=p_s \tag{7-9}$$

1°求(7-8)的全积分常用分离变量方法。

2°找到哈密顿-雅科比方程的完全积分S，便可用哈密顿-雅科比定理由(7-9)得到问题的解。

3°已知完全积分S，可以反过来造出哈密顿函数H。方法如下：由(7-8)知

$$H=-\frac{\partial S}{\partial t} \tag{7-10}$$

因此，首先求S对t的偏导数。其次，由(7-9)知

$$p_s=p_s(q_k,\ \alpha_k,\ t)$$

由此解出

$$\alpha_s=\alpha_s(q_k,\ p_k,\ t) \tag{7-11}$$

将(7-11)代入(7-10)，便得

$$H=H(q_k,\ p_k,\ t)$$

4.正则变换

(1) 正则变换的定义

可逆变换

$$Q_s=Q_s(q_k,\ p_k,\ t),\ P_s=P_s(q_k,\ p_k,\ t) \tag{7-12}$$

使正则方程(7-4)变换为正则方程

$$\dot{Q}_s=\frac{\partial H^*}{\partial P_s},\qquad \dot{P}_s=-\frac{\partial H^*}{\partial Q_s} \tag{7-13}$$

则称为正则变换。注意到，我们所指正则变换是指对一般n个自由度的系统而言的，因此，并不涉及具体的系统。当然，对具体的系统也可以找到具体的正则变换。

(2) 判断正则变换的条件

1°如果微分形式

$$\sum_{s=1}^{n} p_s \mathrm{d}q_s - \sum_{s=1}^{n} P_s \mathrm{d}Q_s + (H^* - H)\mathrm{d}t = \mathrm{d}U$$

(7-14)

恒满足，则变换(7-13)是正则的。

2°完全正则变换为

$$\sum_{s=1}^{m} p_s \mathrm{d}q_s - \sum_{s=1}^{n} P_s \mathrm{d}Q_s = \mathrm{d}U \tag{7-15}$$

将(7-12)代入(7-15)，得到

$$\sum_{s=1}^{n}\left(p_s - \sum_{k=1}^{n} P_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_s}\right)\mathrm{d}q_s$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\left(-\sum_{k=1}^{n} P_k \frac{\partial Q_k}{\partial p_s}\right)\mathrm{d}p_s = \mathrm{d}U \tag{7-16}$$

令

$$A_s = p_s - \sum_{k=1}^{n} P_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_s}, \quad B_s = -\sum_{k=1}^{n} P_k \frac{\partial Q_k}{\partial p_s} \tag{7-17}$$

于是条件(7-16)给出

$$\frac{\partial A_s}{\partial q_m} = \frac{\partial A_m}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial A_s}{\partial p_m} = \frac{\partial B_m}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial B_s}{\partial p_m} = \frac{\partial B_m}{\partial p_s},$$

$$(s, \ m=1, \ 2, \ \cdots, \ n) \tag{7-18}$$

利用(7-18)可以判断变换的正则性。

如果将(7-17)代入(7-18)，便得用拉格朗日括号表示的正则性判据

$$[q_s, \ q_m] = 0, \quad [q_s, \ p_m] = \delta_{sm}, \quad [p_s, \ p_m] = 0$$

$$(s, \ m=1, \ 2, \ \cdots, \ n) \tag{7-19}$$

其中 $[q_s,\ q_m]=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial Q_k}{\partial q_s}\frac{\partial p_k}{\partial q_m}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial Q_k}{\partial q_m}\frac{\partial p_k}{\partial q_s}$。

利用(7-19)可判断变换的正则性。

正则性还可用泊松括号表示为

$$(O_s,\ Q_m)=0,\ (Q_s,\ P_m)=\delta_{sm},(P_s,\ P_m)=0 \tag{7-20}$$

或

$$(q_s,\ q_m)=0,\ (q_s,\ p_m)=\delta_{sm},\ (p_s,\ p_m)=0 \tag{7-21}$$

利用(7-20)或(7-21)可判断变换的正则性。

(3) 正则变换的基本类型

1°第一类母函数为

$$U_1=U_1(q_s,\ Q_s,\ t) \tag{7-22}$$

则

$$p_s=\frac{\partial U_1}{\partial q_s},\ P_s=-\frac{\partial U_1}{\partial Q_s},\ H^*=H+\frac{\partial U_1}{\partial t} \tag{7-23}$$

2°第二类母函数为

$$U_2=F_2(q_s,\ P_s,\ t)-\sum_{s=1}^{n}Q_sP_s \tag{7-24}$$

则

$$p_s=\frac{\partial F_2}{\partial q_s},\ Q_s=\frac{\partial F_2}{\partial P_s},\ H^*=H+\frac{\partial F_2}{\partial t} \tag{7-25}$$

3°第三类母函数为

$$U_3=F_3(p_s,\ Q_s,\ t)+\sum_{s=1}^{n}p_sq_s \tag{7-26}$$

则

$$P_s=-\frac{\partial F_3}{\partial Q_s},\ q_s=-\frac{\partial F_3}{\partial p_s},\ H^*=H+\frac{\partial F_3}{\partial t} \tag{7-27}$$

4°第四类母函数为

$$U_4=F_4(p_s,\ P_s,\ t)+\sum_{s=1}^{n}p_sq_s-\sum_{s=1}^{n}P_sQ_s \tag{7-28}$$

则

$$q_s=-\frac{\partial F_4}{\partial p_s},\quad Q_s=\frac{\partial F_4}{\partial P_s},\quad H^*=H+\frac{\partial F_4}{\partial t} \tag{7-29}$$

这里有两类基本问题：一是由变换求母函数，二是由母函数反过来求正则变换。对于第一类基本问题，可先按(7-16)求出母函数$U(q_s,\ p_s,\ t)$；在(7-22)、(7-24)、(7-26)和(7-28)中分别取$U_1=U$，$U_2=U$，$U_3=U$，和$U_4=U$；而后分别求出$U_1(q_s,\ Q_s,\ t)$，$F_2(q_s,\ P_s,\ t)$，$F_3(p_s,\ Q_s,\ t)$和$F_4(p_s,\ P_s,\ t)$。对于第二类基本问题，可分别由(7-21)、(7-25)、(7-27)和(7-29)找到正则变换。

二、范 例

例7-1 已知力学系统的拉格朗日函数为

$$L=\frac{5}{2}\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2+\dot{q}_1\dot{q}_2\cos(q_1-q_2)+3\cos q_1+\cos q_2$$

试求系统的哈密顿函数H。

[解Ⅰ] 先计算广义动量p_1，p_2。由(7-2)，知

$$\left.\begin{aligned}p_1&=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_1}=5\dot{q}_1+\dot{q}_2\cos(q_1-q_2)\\p_2&=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_2}=\dot{q}_2+\dot{q}_1\cos(q_1-q_2)\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

再由(1)解出$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_1&=\frac{p_1-p_2\cos(q_1-q_2)}{5-\cos^2(q_1-q_2)}\\ \dot{q}_2&=\frac{5p_2-p_1\cos(q_1-q_2)}{5-\cos^2(q_1-q_2)}\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

系统的哈密顿函数，按(7-1)，为

$$H=-L+p_1\dot{q}_1+p_2\dot{q}_2\tag{3}$$

将(2)代入(3)，消去$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，最后得

$$\begin{aligned}H=&-\frac{5}{2}\left[\frac{p_1-p_2\cos(q_1-q_2)}{5-\cos^2(q_1-q_2)}\right]^2\\ &-\frac{1}{2}\left[\frac{5p_2-p_1\cos(q_1-q_2)}{5-\cos^2(q_1-q_2)}\right]^2\\ &-\frac{p_1-p_2\cos(q_1-q_2)}{5-\cos^2(q_1-q_2)}\cdot\frac{5p_2-p_1\cos(q_1-q_2)}{5-\cos^2(q_1-q_2)}\\ &-3\cos q_1-\cos q_2+\frac{p_1\left[p_1-p_2\cos(q_1-q_2)\right]}{5-\cos^2(q_1-q_2)}\\ &+\frac{p_2\left[5p_2-p_1\cos(q_1-q_2)\right]}{5-\cos^2(q_1-q_2)}\\ =&\frac{p_1^2+5p_2^2-2p_1p_2\cos(q_1-q_2)}{2\left[5-\cos^2(q_1-q_2)\right]}-3\cos q_1-\cos q_2\end{aligned}\tag{4}$$

［解Ⅱ］　由L的形式知道这是一完全稳定系统，动能为

$$T=\frac{5}{2}\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2+\dot{q}_1\dot{q}_2\cos(q_1-q_2)$$

势能为

$$V=-3\cos q_1-\cos q_2$$

故哈密顿函数为系统总能量

$$H=T+V=\frac{5}{2}\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2+\dot{q}_1\dot{q}_2\cos(q_1-q_2)$$

$$-3\cos q_1-\cos q_2 \qquad (5)$$

将(2)代入(5)消去$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，便得(4)。

例7-2 已知力学系统的哈密顿函数为

$$H=q_1p_2-q_2p_1+a(p_1^2+p_2^2)$$

求系统的拉格朗日函数L。

[解] 首先，由正则方程(7-4)求出$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，即

$$\dot{q}_1=\frac{\partial H}{\partial p_1}=-q_2+2ap_1,\quad \dot{q}_2=\frac{\partial H}{\partial p_2}=q_1+2ap_2 \qquad (1)$$

其次，由(1)解出p_1，p_2

$$p_1=\frac{1}{2a}(\dot{q}_1+q_2),\qquad p_2=\frac{1}{2a}(\dot{q}_2-q_1) \qquad (2)$$

最后，将(2)代入(7-5)，消去p_1，p_2，得到

$$L=-H+p_1\dot{q}_1+p_2\dot{q}_2$$

$$=-\left\{q_1\cdot\frac{1}{2a}(\dot{q}_2-q_1)-q_2\cdot\frac{1}{2a}(\dot{q}_1+q_2)\right.$$

$$\left.+a\left[\frac{1}{4a^2}(\dot{q}_1+q_2)^2+\frac{1}{4a^2}(\dot{q}_2-q_1)^2\right]\right\}$$

$$+\frac{1}{2a}(\dot{q}_1+q_2)\cdot\dot{q}_1+\frac{1}{2a}(\dot{q}_2-q_1)\cdot\dot{q}_2$$

$$=\frac{1}{4a}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2-2\dot{q}_2q_1+2q_2\dot{q}_1+q_1^2+q_2^2)$$

例7-3 如果独立坐标分别选定为(1)笛卡儿坐标，(2)球坐标，(3)柱坐标，试求质点在势能为$V(x, y, z)$的场中的哈密顿函数。

［解］ (1)在笛卡儿坐标中，质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) \tag{1}$$

势能为

$$V=V(x, y, z) \tag{2}$$

故哈密顿函数为

$$H=T+V=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+V(x, y, z) \tag{3}$$

在(3)中速度$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$需用广义动量p_x，p_y，p_z表出，即

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}, \qquad \dot{x}=\frac{p_x}{m}$$

$$p_y=\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=m\dot{y}, \qquad \dot{y}=\frac{p_y}{m}$$

$$p_z=\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=m\dot{z}, \qquad \dot{z}=\frac{p_z}{m}$$

于是

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+V(x, y, z) \tag{4}$$

(2) 取球坐标r，θ，φ为广义坐标，则有

$$x=r\sin\theta\cos\varphi, \quad y=r\sin\theta\sin\varphi, \quad z=r\cos\theta \tag{5}$$

质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

势能为

$$V=V(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

而哈密顿函数为

$$H=T+V \tag{6}$$

又广义动量为

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}$$

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta$$

因此有

$$\dot{r}=\frac{p_r}{m},\quad \dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2},\quad \dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta} \tag{7}$$

将(7)代入(6)，得到

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+V(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta) \tag{8}$$

(3) 取柱坐标r，φ，z为广义坐标，则有

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z \tag{9}$$

质点的动能在柱坐标中表示为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2) \tag{10}$$

势能为

$$V=V(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z) \tag{11}$$

广义动量为

$$\left.\begin{aligned}
p_r&=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}\\
p_\varphi&=\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}\\
p_z&=\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}=m\dot{z}.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

于是

$$\dot{r}=\frac{p_r}{m},\quad \dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mr^2},\quad \dot{z}=\frac{p_z}{m} \tag{13}$$

质点的哈密顿函数为

$$H=T+V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)$$

$$+V(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z) \tag{14}$$

将(13)代入(14)，得到

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}+p_z^2\right)+V(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)$$

例7-4 系统在球坐标中的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)-aF(\theta)\dot{\varphi}$$

其中$a=$cohst，$F(\theta)$是连续可微的任意函数。试建立系统运动的正则方程。

［解］ 首先求广义动量，由(7-2)知

$$\left.\begin{aligned} &p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r},\quad p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta} \\ &p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta-aF(\theta) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

由此解出广义速度$\dot{r}$，$\dot{\theta}$，$\dot{\varphi}$，即

$$\dot{r}=\frac{p_r}{m},\quad \dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2},\qquad \dot{\varphi}=\frac{p_\varphi+aF(\theta)}{mr^2\sin^2\theta} \tag{2}$$

其次，计算哈密顿函数H。将(2)代入(7-1)，得到

$$H=-L+p_r\dot{r}+p_\theta\dot{\theta}+p_\varphi\dot{\varphi}$$

$$=-\frac{1}{2}m\left\{\frac{p_r^2}{m^2}+\frac{p_\theta^2}{m^2r^4}r^2+\left(\frac{p_\varphi+aF(\theta)^2}{mr^2\sin^2\theta}\right)r^2\sin^2\theta\right\}$$

$$+aF(\theta)\frac{p_\varphi+aF(\theta)}{mr^2\sin^2\theta}+\frac{p_r^2}{m}+\frac{p_\theta^2}{mr^2}$$

$$+\frac{p_\varphi^2+F(\theta)ap_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{[p_\varphi+aF(\theta)]^2}{r^2\sin^2\theta}\right) \tag{3}$$

最后，列写系统的正则方程，由(7-4)，知

$$\dot{r}=\frac{\partial H}{\partial p_r}=\frac{p_r}{m},\quad \dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial r}=\frac{1}{mr^3}$$

$$\times\left(p_\theta^2+\frac{[p_\varphi+aF(\theta)]^2}{\sin^2\theta}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial p_\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2},\ \dot{p}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial\theta}\\
&=\frac{[p_\varphi+aF(\theta)]}{mr^2\sin^3\theta}\left([p_\varphi+aF(\theta)]\right.\\
&\qquad\left.\cos-a\frac{dF}{d\theta}\sin\theta\right)\\
&\dot{\varphi}=\frac{\partial H}{\partial p_\varphi}=\frac{p_\varphi+aF(\theta)}{mr^2\sin^2\theta},\ \dot{p}_\varphi=-\frac{\partial H}{\partial\varphi}=0
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

例7-5 试建立均匀重力场中质量为m，长度为$2l$的均质细杆的空间运动的正则方程，并求运动的第一积分。

［解］ 首先建立正则方程。均质杆的位置由质心坐标x，y，z以及杆在oxy平面上的投影与ox轴夹角ψ，杆与oz轴的夹角θ来确定。

杆运动的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta)$$

$$+\frac{1}{2}C(\dot{\psi}\cos\theta)^2$$

其中A为对过质心垂直于杆的轴的惯性矩，C为对过质心沿杆轴线的惯性矩，并且

$$A=\frac{1}{3}ml^2,\ C=0$$

于是

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{1}{6}ml^2(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta)$$

杆的势能

$$V=mgz$$

因此，拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

$$+\frac{1}{6}ml^2(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta)-mgz \tag{1}$$

由(7-2)知，广义动量为

$$\left.\begin{aligned}&p_x=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m\dot{x},\quad p_y=\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}=m\dot{y},\quad p_z=\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}=m\dot{z}\\&p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta},\quad p_\psi=\frac{1}{3}ml^2\dot{\psi}\sin^2\theta\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

由(2)解出广义速度$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$，$\dot{\theta}$，$\dot{\psi}$，即

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}=\frac{p_x}{m},\quad\dot{y}=\frac{p_y}{m},\quad\dot{z}=\frac{p_z}{m}\\&\dot{\theta}=\frac{3p_\theta}{ml^2},\quad\dot{\psi}=\frac{3p_4}{ml^2\sin^2\theta}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

哈密顿函数为

$$H=T+V=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{1}{6}ml^2(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta)+mgz \tag{4}$$

将(3)代入(4)，得到

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+\frac{3}{2ml^2}\left(p_\theta^2+\frac{p_\psi^2}{\sin^2\theta}\right)+mgz \tag{5}$$

其次，建立正则方程。按(7-4)，(3)即为第一组正则方程。第二组正则方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{p}_x=-\frac{\partial H}{\partial x}=0,\ \dot{p}_y=-\frac{\partial H}{\partial y}=0\\
&\dot{p}_z=-\frac{\partial H}{\partial z}=-mg\\
&\dot{p}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial \theta}=\frac{3p_\psi^2\cos\theta}{ml^2\sin^3\theta}\\
&\dot{p}_\psi=-\frac{\partial H}{\partial \psi}=0
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

最后求运动的第一积分。由(6)中第一、二、五式可求得循环积分

$$p_x=p_{x0},\quad p_y=p_{y0},\quad p_z=p_{z0},\quad p_\varphi=p_{\varphi 0} \tag{7}$$

由(6)中第三式积分得

$$p_z=p_{z0}-mgt \tag{8}$$

由(6)中第四式和(3)中第四式得到

$$p_\theta \mathrm{d}p_\theta=-\frac{1}{2}p_{\psi 0}^2\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\right)$$

积分得

$$\frac{1}{2}\left(p_\theta^2 - p_{\theta_0}^2\right) = -\frac{1}{2} p_{\psi_0}^2 \left(\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta_0}\right)$$

或

$$p_\theta = \sqrt{p_{\theta_0}^2 - p_{\psi_0}^2 \left(\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta_0}\right)} \tag{9}$$

将(7)、(8)、(9)代入(3)，并积分，得到

$$\left.\begin{aligned} & x = \frac{p_{x0}}{m} t + x_0, \quad y = \frac{p_{y0}}{m} t + y_0 \\ & z = \frac{p_{z_0}}{m} t - \frac{1}{2} g t^2 + z_0 \\ & \frac{3}{ml^2}(t - t_0) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{p_{\theta_0}^2 - p_{\psi_0}^2 \left(\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta_0}\right)}} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\psi - \psi_0 = \frac{3 p_{\psi 0}}{ml^2} \int_0^t \frac{1}{\sin^2\theta} dt$$

$$= p_{\psi_0} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin^2\theta \sqrt{p_{\theta_0}^2 - p_{\phi_0}^2 \left(\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta_0}\right)}}$$

例7-6 在拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{sk} \dot{q}_s \dot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{sk} q_s q_k \tag{1}$$

(式中$a_{sk} = a_{ks} = \text{const}$，$c_{sk} = c_{ks} = \text{const}$)的保守系统中，如果

$$\sum_{k=1}^{n} a_{sk} c_{km} = \sum_{k=1}^{n} c_{sk} a_{km} \quad (s, \ m = 1, \ 2, \ \cdots, \ n) \tag{2}$$

试证广义坐标和广义动量满足同一方程：

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{sk}\ddot{q}_k+c_{sk}q_k)=0, \quad \sum_{k=1}^{n}(a_{sk}\ddot{p}_k+c_{sk}p_k)=0$$

$$(s=1, 2, \cdots, n) \tag{3}$$

[证明] 由(1)得广义动量

$$p_s=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}=\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\dot{q}_k \tag{4}$$

由此解出$\dot{q}_s$

$$\dot{q}_s=\sum_{k=1}^{n}\rho_{sk}p_k \tag{5}$$

其中 $\sum_{k=1}^{n}\rho_{sk}a_{km}=\delta_{sm}, \quad \sum_{k=1}^{n}a_{sk}\rho_{km}=\delta_{sm}$ (6)

系统的哈密顿函数为

$$H=-L+\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\dot{q}_s\dot{q}_k$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_{sk}q_sq_k$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{sk}\rho_{sm}p_m\rho_{kl}p_l$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_{sk}q_sq_k$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\rho_{sk}p_sp_k+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_{sk}q_sq_k \tag{7}$$

系统的正则方程为

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s}=\sum_{k=1}^{n}\rho_{sk}p_k,\quad \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}=-\sum_{k=1}^{n}c_{sk}q_k$$

$$(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{8}$$

将(8)的第一组方程对时间t求导数，并利用第二组方程，得到

$$\ddot{q}_s=\sum_{k=1}^{n}\rho_{sk}\dot{p}_k=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\rho_{sk}c_{km}q_m$$

两端同时乘以a_{ls}并对s求和，注意到(6)，得到

$$\sum_{s=1}^{n}a_{ls}\ddot{q}_s=-\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}a_{ls}\rho_{sk}c_{km}q_m=-\sum_{s=1}^{n}c_{ls}q_s$$

或者写成

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{sk}\ddot{q}_k+c_{sk}q_k)=0 \tag{9}$$

将(8)的第二组对t求导数并利用第一组，得到

$$\ddot{p}_s=-\sum_{k=1}^{n}c_{sk}\dot{q}_k=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}c_{sk}\rho_{km}p_m$$

两端同时乘以a_{ls}并对s求和，注意到(2)，(6)，则

$$\sum_{s=1}^{n}a_{ls}\ddot{p}_s=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}a_{ls}c_{sk}\rho_{km}p_m=$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}c_{ls}a_{sk}\rho_{km}p_m=-\sum_{s=1}^{n}c_{ls}p_s$$

或者写成

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{sk}\ddot{p}_k+c_{sk}p_k)=0 \tag{10}$$

(9)、(10)即为所证。

例7-7　描述在势力场中运动的力学系统时，利用非退化的点变换$q_s=f_s(\theta_k, t)$　($s, k=1, 2, \cdots, n$)实现由拉格朗日变量$(q_s, \dot{q}_s, t)$向新的拉格朗日变量$(\theta_k, \dot{\theta}_k, t)$的过渡。求与变换相应的广义动量$p_{q_s}$和$p_{\theta_k}$的关系。当笛卡儿坐标分别变换为

(1) 柱坐标r, φ, z：$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，$z=z$；

(2) 球坐标r, φ, θ：$x=r\sin\theta\cos\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，$z=r\cos\theta$时，求广义动量的变换规律。

[解]　设原变量下的拉格朗日函数为$L(q_s, \dot{q}_s, t)$，新变量下的拉格朗日函数为$\tilde{L}(\theta_k, \dot{\theta}_k, t)$，则

$$\tilde{L}(\theta_k, \dot{\theta}_k, t)=L\left(f_s(\theta_k, t), \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_s}{\partial\theta_k}\dot{\theta}_k+\frac{\partial f_s}{\partial t}, t\right) \tag{1}$$

新变量下的广义动量为

$$p_{\theta_k}=\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\theta}_k} \tag{2}$$

注意到(1)，则有

$$p_{\theta_k}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\dot{\theta}_k}=\sum_{s=1}^{n}p_{q_s}\frac{\partial f_s}{\partial\theta_k} \tag{3}$$

关系(3)给出广义动量p_{θ_k}与p_{q_s}之间的关系。

将关系(3)应用于直角坐标向柱坐标的过渡，我们有

$$
\left.\begin{aligned}
p_r &= p_x\frac{\partial x}{\partial r}+p_y\frac{\partial y}{\partial r}+p_z\frac{\partial z}{\partial r}\\
&= p_x\cos\varphi+p_y\sin\varphi\\
p_\varphi &= p_x\frac{\partial x}{\partial\varphi}+p_y\frac{\partial y}{\partial\varphi}+p_z\frac{\partial z}{\partial\varphi}\\
&= -p_x r\sin\varphi+p_y r\cos\varphi\\
p_z &= p_x\frac{\partial x}{\partial z}+p_y\frac{\partial y}{\partial z}+p_z\frac{\partial z}{\partial z}=p_z
\end{aligned}\right\}\tag{4}
$$

将关系(3)应用于直角坐标向球坐标的过渡，我们有

$$
\left.\begin{aligned}
p_r &= p_x\frac{\partial x}{\partial r}+p_y\frac{\partial y}{\partial r}+p_z\frac{\partial z}{\partial r}\\
&= p_x\sin\theta\cos\varphi+p_y\sin\theta\sin\varphi+p_z\cos\theta\\
p_\varphi &= p_x\frac{\partial x}{\partial\varphi}+p_y\frac{\partial y}{\partial\varphi}+p_z\frac{\partial z}{\partial\varphi}\\
&= -p_x r\sin\theta\sin\varphi+p_y r\sin\theta\cos\varphi\\
p_\theta &= p_x\frac{\partial x}{\partial\theta}+p_y\frac{\partial y}{\partial\theta}+p_z\frac{\partial z}{\partial\theta}\\
&= p_x r\cos\theta\cos\varphi+p_y r\cos\theta\sin\varphi-p_z r\sin\theta
\end{aligned}\right\}\tag{5}
$$

例7-8 已知力学系统的哈密顿函数为

$$H=(p_1^2+q_1^2)F(p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_n,\ t)$$

试求用积分形式表示的系统的运动。

[解] 首先由哈密顿函数H，建立系统的正则方程。由(7-4)知，

$$\dot{q}_1=\frac{\partial H}{\partial p_1}=2p_1F \tag{1}$$

$$\dot{p}_1=-\frac{\partial H}{\partial q_1}=-2q_1F \tag{2}$$

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s}=(p_1^2+q_1^2)\ \ \frac{\partial F}{\partial p_s}(s=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

$$(3)$$

$$\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}=0\qquad (s=2,\ 3,\ \cdots,\ n)\qquad (4)$$

其次，用通常方法解正则方程(1)、(2)、(3)、(4)。将(1)、(2)二式相除，得到

$$\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}q_1}=-\frac{q_1}{p_1},\ \text{即}\ p_1dp_1+q_1dq_1=0$$

积分得

$$p_1^2+q_1^2=\alpha_1^2\qquad (5)$$

其中α_1为积分常数。

由(4)积分得

$$p_s=\alpha_s\qquad (s=2,\ 3,\ \cdots,\ n)\ (6)$$

将(5)和(6)代入(3)，得

$$\dot{q}_s=\alpha_1^2\frac{\partial F(\alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_n,t)}{\partial\alpha_s}\quad (s=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

积分之，得

$$q_s=\alpha_1^2\int\frac{\partial F}{\partial\alpha_s}\mathrm{d}t+\beta_s\quad (s=2,\ 3,\ \cdots,\ n)\qquad (7)$$

为解出p_1，q_1，利用(1)、(2)，得到

$$\mathrm{d}\left(\frac{q_1}{p_1}\right)=\frac{p_1\mathrm{d}q_1-q_1\mathrm{d}p_1}{p_1^2}=2F\left[1+\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^2\right]\mathrm{d}t$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{q_1}{p_1}\right)}{1+\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^2}=2F\mathrm{d}t$$

积分之，得到

$$\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{q_1}{p_1}\right)=\int 2F\mathrm{d}t$$

即

$$q_1=p_1\mathrm{tg}\left(\int 2F\mathrm{d}t+\beta_1\right) \tag{8}$$

由(8)、(5)解得

$$\left.\begin{aligned} q_1&=\alpha_1\sin\left[2\int F(\alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_n,\ t)\mathrm{d}t+\beta_1\right]\\ p_1&=\alpha_1\cos\left[2\int F(\alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_n,\ t)\mathrm{d}t+\beta_1\right]\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

问题的解为(9)、(7)、(6)。

例7-9 已知$\varphi=q\cos\omega t+\frac{p}{\omega}\sin\omega t$，$\psi=p\cos\omega t-q\omega\sin\omega t$，试计算泊松括号$(\varphi,\ \psi)$。

[解] 由泊松括号定义(7-6)，知

$$\begin{aligned}(\varphi,\psi)&=\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial p}-\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial q}\\ &=\cos\omega t\cos\omega t-\frac{1}{\omega}\sin\omega t(-\omega\sin\omega t)\\ &=\cos^2\omega t+\sin^2\omega t=1\end{aligned}$$

例7-10 已知$\varphi=\varphi(p^2+q^2)$，$\psi=\mathrm{tg}^{-1}(p/q)$，试计算泊松括号$(\varphi,\ \psi)$。

[解] 由(7-6)，得

$$\begin{aligned}(\varphi,\psi)&=\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial p}-\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial q}\\ &=\varphi'\cdot 2q\frac{1/q}{1+(p/q)^2}-\varphi'\cdot 2p\frac{-p/q^2}{1+(p/q)^2}=2\varphi'\end{aligned}$$

其中φ'为φ对自变量p^2+q^2的导数。

例7-11 试证明函数$\varphi_1=p_1^2+q_2^2$，$\varphi_2=p_2^2+q_1^2$，$\varphi_3=(\varphi_1, \varphi_2)$是哈密顿函数为$H=p_1p_2+q_1q_2$的方程组的第一积分。

［证明］ 用泊松条件(7-7)来判断φ_1，φ_2是第一积分。因

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+(\varphi_1, H)=(\varphi_1, H)$$

$$=\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_s}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial q_s}\right)$$

$$=2q_2p_1-2p_1q_2=0$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+(\varphi_2, H)=(\varphi_2, H)=\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_s}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial q_s}\right)$$

$$=2q_1p_2-2p_2q_1=0$$

故φ_1，φ_2是第一积分。

φ_1，φ_2是不处于相互内旋的。实际上，有

$$(\varphi_1, \varphi_2)=\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_s}\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_s}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_s}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_s}\right)$$

$$=2(p_2q_2-p_1q_1)\neq 0$$

由泊松定理知$(\varphi_1, \varphi_2)=\varphi_3$也是系统的第一积分。

例7-12 试证对哈密顿函数为

$$H(q_s, p_s)=\frac{\sum_{k=1}^{n}f_k(q_k, p_k)}{\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(q_k, p_k)}$$

的方程组来说函数$f_k(q_k, p_k)-H(q_s, p_s)\varphi_k(q_k, p_k)$是第一积分。

[证明]　利用泊松条件(7-7)来证明。我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}[f_k(q_k, p_k)-H(q_s, p_s)\varphi_k(q_k, p_k)]$$

$$-([f_k(q_k, p_k)-H(q_s, p_s)\varphi_k(q_k, p_k)], H)$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial f_k}{\partial q_m}-H\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_m}-\frac{\partial H}{\partial p_m}\varphi_k\right)\frac{\partial H}{\partial p_m}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial f_k}{\partial p_m}-H\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_m}-\frac{\partial H}{\partial p_m}\varphi_k\right)\frac{\partial H}{\partial q_m}\right\}$$

$$=\left(\frac{\partial f_k}{\partial q_k}-H\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_k}\right)\frac{\partial H}{\partial p_k}-\left(\frac{\partial f_k}{\partial p_k}-H\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_k}\right)\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$=\left(\frac{\partial f_k}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}-\frac{\partial f_k}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)-H\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}-\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)$$

$$=\frac{\partial f_k}{\partial q_k}\frac{\frac{\partial f_k}{\partial p_k}\sum_{m=1}^{n}\varphi_m(q_m, p_m)-\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_k}\sum_{m=1}^{n}f_m(q_m, p_m)}{\left[\sum_{m=1}^{n}\varphi_m(q_m, p_m)\right]^2}$$

$$-\frac{\partial f_k}{\partial p_k}\frac{\frac{\partial f_k}{\partial q_k}\sum_{m=1}^{n}\varphi_m(q_m, p_m)-\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_k}\sum_{m=1}^{n}f_m(q_m, p_m)}{\left[\sum_{m=1}^{n}\varphi_m(q_m, p_m)\right]^2}$$

$$
-\frac{\sum_{m=1}^{n} f_m(q_m, p_m)}{\sum_{m=1}^{n} \varphi_m(q_m, p_m)}
$$

$$
\cdot\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_k}\frac{\frac{\partial f_k}{\partial p_k}\sum_{m=1}^{n}\varphi_m(q_m, p_m)-\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_k}\sum_{m=1}^{n} f_m(q_m, p_m)}{\left(\sum_{m=1}^{n}\varphi_m(q_m, p_m)\right)^2}\right.
$$

$$
\left.-\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_k}\frac{\frac{\partial f_k}{\partial q_k}\sum_{m=1}^{n}\varphi(q_m, p_m)-\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_k}\sum_{m=1}^{n} f_m(q_m, p_m)}{\left(\sum_{m=1}^{n}\varphi_m(q_m, p_m)\right)^2}\right)
$$

$$
=0
$$

例7-13 已知力学系统的哈密顿函数为

$$
H=\frac{1}{2}\left[p_1^2+p_2^2+\frac{(p_3-p_2\sin q_1)^2}{\cos^2 q_1}\right]
$$

试建立哈密顿-雅科比方程，求其全积分并得到其运动规律。

［解］ 首先利用(7-8)，建立问题的哈密顿-雅科比方程，得到

$$
\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2+\frac{1}{\cos^2 q_1}\left(\frac{\partial S}{\partial q_3}-\frac{\partial S}{\partial q_2}\sin q_1\right)^2\right]=0 \tag{1}
$$

其次，找(1)的全积分。设

$$S=-\alpha_1 t+w_1(q_1)+w_2(q_2)+w_3(q_3) \tag{2}$$

因q_2，q_3不出现于H中，故有

$$\frac{\partial w_2}{\partial q_2}=\alpha_2, \quad \frac{\partial w_3}{\partial q_3}=\alpha_3 \tag{3}$$

于是(2)可写成

$$S=-\alpha_1 t+w_1(q_1)+\alpha_2 q_2+\alpha_3 q_3 \tag{4}$$

将(4)代入(1)，得

$$-\alpha_1+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial q_1}\right)^2+\alpha_2^2+\frac{1}{\cos^2 q_1}(\alpha_3-\alpha_2\sin q_1)^2\right]=0$$

即

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial q_1}\right)^2=2\alpha_1-\alpha_2^2-\frac{1}{\cos^2 q_1}(\alpha_3-\alpha_2\sin q_1)^2$$

因此

$$w_1=\int\sqrt{2\alpha_1-\alpha_2^2-\frac{1}{\cos^2 q_1}(\alpha_3-\alpha_2\sin q_1)^2}\,dq_1 \tag{5}$$

于是，全积分为

$$S=-\alpha_1 t+\alpha_2 q_2+\alpha_3 q_3+\int\sqrt{2\alpha_1-\alpha_2^2-\frac{1}{\cos^2 q_1}(\alpha_3-\alpha_2\sin q_1)^2}\,dq_1 \tag{6}$$

最后，利用(7-9)得到

$$\beta_1=\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}=-t$$

$$+\int \frac{dq_1}{\sqrt{2\alpha_1-\alpha_2^2-\frac{1}{\cos^2 q_1}(\alpha_3-\alpha_2\sin q_1)^2}} \tag{7}$$

$$\beta_2=\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}=q_2$$

$$+\int \frac{-\alpha_2+\frac{\sin q_1}{\cos^2 q_1}(\alpha_3-\alpha_2\sin q_1)}{\sqrt{2\alpha_1-\alpha_2^2-\frac{1}{\cos^2 q_1}(\alpha_3-\alpha_2\sin q_1)^2}}dq_1 \tag{8}$$

$$\beta_3=\frac{\partial S}{\partial \alpha_3}=q_3$$

$$+\int \frac{-\frac{1}{\cos^2 q_1}(\alpha_3-\alpha_2\sin q_1)}{\sqrt{2\alpha_1-\alpha_2^2-\frac{1}{\cos^2 q_1}(\alpha_3-\alpha_2\sin q_1)^2}}dq_1 \tag{9}$$

$$p_1=\frac{\partial S}{\partial q_1}$$

$$=\int \frac{(\alpha_3-\alpha_2\sin q_1)\ [\alpha_2\cos^2 q_1-(\alpha_3-\alpha_2\sin q_1)\sin q_1]}{\cos^3 q_1\sqrt{2\alpha_1-\alpha_2^2-\frac{1}{\cos^2 q_1}\ (\alpha_3-\alpha_2\sin q_1)^2}}$$

$$\times dq_1 \tag{10}$$

$$p_2=\frac{\partial S}{\partial q_2}=\alpha_2,\quad p_3=\frac{\partial S}{\partial q_3}=\alpha_3 \tag{11}$$

公式(7)、(8)、(9)便给出运动规律。

例7-14 已知力学系统的哈密顿函数为

$$H=\frac{p_1^2q_1^2+p_2^2q_2^2}{2p_1^2q_1^2+3p_2^2q_2^2}\sin t$$

试建立问题的哈密顿-雅科比方程，求其全积分并得到运动规律。

［解］ 由(7-8)给出问题的哈密顿-雅科比方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2q_1^2+\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2q_2^2}{2\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2q_1^2+3\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2q_2^2}\sin t=0 \tag{1}$$

令$\sin t\neq 0$，(1)可写成

$$\frac{1}{\sin t}\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2q_1^2+\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2q_2^2}{2\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2q_1^2+3\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2q_2^2}=0 \tag{2}$$

分离变量，有

$$-\frac{1}{\sin t}\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2q_1^2+\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2q_2^2}{2\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2q_1^2+3\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2q_2^2}=h \tag{3}$$

令$S=w(t)+w_1(q_1)+w_2(q_2)$，则(3)给出

$$-\frac{1}{\sin t}\frac{\partial w}{\partial t}=h \tag{4}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial w_1}{\partial q_1}\right)^2q_1^2+\left(\frac{\partial w_2}{\partial q_2}\right)^2q_2^2}{2\left(\frac{\partial w_1}{\partial q_1}\right)^2q_1^2+3\left(\frac{\partial w_2}{\partial q_2}\right)^2q_2^2}=h \tag{5}$$

由(4)得

$$w=-\int h\sin t\,dt=h\cos t \tag{6}$$

由(5)分离变量，得

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial q_1}\right)^2 q_1^2(1-2h)=\left(\frac{\partial w_2}{\partial q_2}\right)^2 q_2^2(3h-1)\equiv\alpha_1 \tag{7}$$

因此有

$$\frac{\partial w_1}{\partial q_1}=\sqrt{\frac{\alpha_1}{1-2h}}\frac{1}{q_1},\quad \frac{\partial w_2}{\partial q_2}=\sqrt{\frac{\alpha_1}{3h-1}}\frac{1}{q_2}$$

积分之，得

$$w_1=\sqrt{\frac{\alpha_1}{1-2h}}\ln q_1,\quad w_2=\sqrt{\frac{\alpha_1}{3h-1}}\ln q_2 \tag{8}$$

于是全积分为

$$S=h\cos t+\sqrt{\frac{\alpha_1}{1-2h}}\ln q_1+\sqrt{\frac{\alpha_1}{3h-1}}\ln q_2 \tag{9}$$

今调整积分常数，令

$$\alpha_1^*=\frac{\alpha_1}{1-2h},\quad \alpha_2^*=\frac{\alpha_1}{3h-1}$$

则 $$h=\frac{\alpha_1^*+\alpha_2^*}{2\alpha_1^*+3\alpha_2^*}$$

于是(9)可写成

$$S=\frac{\alpha_1^*+\alpha_2^*}{2\alpha_1^*+3\alpha_2^*}\cos t+\sqrt{\alpha_1^*}\ln q_1+\sqrt{\alpha_2^*}\ln q_2 \tag{10}$$

由(10)给出运动规律

$$\beta_1=\frac{\partial S}{\partial\alpha_1^*}=\frac{\alpha_2^*}{(2\alpha_1^*+3\alpha_2^*)^2}\cos t+\frac{1}{2\sqrt{\alpha_1^*}}\ln q_1$$

$$\beta_2=\frac{\partial S}{\partial \alpha_2^*}=-\frac{\alpha_1^*}{(2\alpha_1^*+3\alpha_2^*)^2}\cos t+\frac{1}{2\sqrt{\alpha_2^*}}\ln q_2$$

即

$$\left.\begin{aligned}q_1&=\exp\left[2\sqrt{\alpha_1^*}\left(\beta-\frac{\alpha_2^*}{(2\alpha_1^*+3\alpha_2^*)^2}\cos t\right)\right]\\ q_2&=\exp\left[2\sqrt{\alpha_2^*}\left(\beta+\frac{\alpha_1^*}{(2\alpha_1^*+3\alpha_2^*)^2}\cos t\right)\right]\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

例7-15 已知力学系统的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{4}\left(\frac{\dot{q}_1^2}{q_2^2}+\frac{\dot{q}_2^2}{\operatorname{tg}q_2}\right)-q_2^2\cos q_1$$

试建立问题的哈密顿-雅科比方程，求其全积分并得到运动规律。

［解］ 首先由拉格朗日函数造哈密顿函数。因

$$p_1=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1}{q_2^2},\quad p_2=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}=\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_2}{\operatorname{tg}q_2}$$

故

$$\dot{q}_1=2p_1q_2^2,\quad \dot{q}_2=2p_2\operatorname{tg}q_2$$

于是哈密顿函数为

$$\begin{aligned}H&=-L+p_1\dot{q}_1+p_2\dot{q}_2\\ &=-\frac{1}{4}\left[4p_1^2q_2^2+4p_2^2\operatorname{tg}q_2\right]+q_2^2\cos q_1\\ &\qquad+2p_1^2q_2^2+2p_2^2\operatorname{tg}q_2\\ &=p_1^2q_2^2+p_2^2\operatorname{tg}q_2+q_2^2\cos q_1\end{aligned} \tag{1}$$

其次，由哈密顿函数列写哈密顿-雅科比方程。我们有

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2q_2^2+\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2\operatorname{tg}q_2+q_2^2\cos q_1=0 \tag{2}$$

然后，用分离变量法解方程(2)。令

$$S=-ht+w_1(q_1)+w_2(q_2) \tag{3}$$

将(3)代入(2)，得到

$$-h+\left(\frac{\partial w_1}{\partial q_1}\right)^2 q_2^2+\left(\frac{\partial w_2}{\partial q_2}\right)^2 \mathrm{tg}q_2+q_2^2\cos q_1=0$$

分离变量，有

$$\frac{1}{q_2^2}\left[h-\left(\frac{\partial w_2}{\partial q_2}\right)^2 \mathrm{tg}q_2\right]=\left(\frac{\partial w_1}{\partial q_1}\right)^2+\cos q_1\equiv\alpha_1$$

于是

$$\frac{\partial w_1}{\partial q_1}=\sqrt{\alpha_1-\cos q_1} \quad \frac{\partial w_2}{\partial q_2}=\sqrt{\frac{h-\alpha_1 q_2^2}{\mathrm{tg}q_2}}$$

积分之，得

$$w_1=\int\sqrt{\alpha_1-\cos q_1}\,\mathrm{d}q_1,\quad w_2=\int\sqrt{\frac{h-\alpha_1 q_2^2}{\mathrm{tg}q_2}}\,\mathrm{d}q_2$$

因此有

$$S=-ht+\int\sqrt{\alpha_1-\cos q_1}\,\mathrm{d}q_1+\int\sqrt{\frac{h-\alpha_1 q_2^2}{\mathrm{tg}q_2}}\,\mathrm{d}q_2 \tag{4}$$

最后，利用(7-9)，得到运动规律

$$\left.\begin{aligned}\beta&=\frac{\partial S}{\partial h}=-t+\int\frac{\mathrm{d}q_2}{2\sqrt{(h-\alpha_1 q_2^2)\mathrm{tg}q_2}}\\ \beta_1&=\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}=\int\frac{\mathrm{d}q_1}{2\sqrt{\alpha_1-\cos q_1}}\\ &\quad-\int\frac{q_2^2\,\mathrm{d}q_2}{2\sqrt{(h-\alpha_1 q_2^2)\mathrm{tg}q_2}}\end{aligned}\right| \tag{5}$$

例7-16　试用哈密顿-雅科比定理解物理摆问题：刚体

质量为M，刚体对悬点O的回转半径为k，重心在G，$OG=l_1$，OG与铅垂线夹角为θ。

［解］　首先列写问题的拉格朗日函数。物理摆的动能为

$$T=\frac{1}{2}Mk^2\dot{\theta}^2$$

势能为

$$V=-Mgl_1\cos\theta$$

于是拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}Mk^2\dot{\theta}^2+Mgl_1\cos\theta \tag{1}$$

其次，由L造出哈密顿函数H。因广义动量为

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=Mk^2\dot{\theta}$$

故广义速度为

$$\dot{\theta}=\frac{p\theta}{Mk^2} \tag{2}$$

问题的哈密顿函数为

$$\begin{aligned}H=T+V&=\frac{1}{2}Mk^2\dot{\theta}^2-Mgl_1\cos\theta\\&=\frac{1}{2}Mk^2\left(\frac{p_\theta}{Mk^2}\right)^2-Mgl_1\cos\theta\\&=\frac{p_\theta^2}{2Mk^2}-Mgl_1\cos\theta\end{aligned} \tag{3}$$

然后，由哈密顿函数H，列写哈密顿-雅科比方程，并求其全积分。按(7-8)，有

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2Mk^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2-Mgl_1\cos\theta=0 \tag{4}$$

用分离变量法解方程(4)。令

$$S=-ht+w(\theta) \tag{5}$$

将(5)代入(4)，得到

$$-h+\frac{1}{2Mk^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2-Mgl_1\cos\theta=0$$

于是

$$\frac{\partial w}{\partial \theta}=\sqrt{2Mk^2}\sqrt{h+Mgl_1\cos\theta}$$

积分之，得

$$w=\sqrt{2Mk^2}\int\sqrt{h+Mgl_1\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \tag{6}$$

于是有

$$S=-ht+\sqrt{2Mk^2}\int\sqrt{h+Mgl_1\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \tag{7}$$

最后，由(7)给出运动规律

$$t_0=\frac{\partial S}{\partial h}=-t+\frac{\sqrt{2Mk^2}}{2}\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{h+Mgl_1\cos\theta}}$$

其中t_0为积分常数，即

$$t+t_0=\frac{\sqrt{2Mk^2}}{2}\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{h+Mgl_1\cos\theta}}$$

例7-17 在平面上运动的质量为m的质点与两个固定中心A和B相互作用。A和B之间的距离为$2c$。相互作用势等于$V=-\left(\frac{\gamma_1}{r_1}+\frac{\gamma_2}{r_2}\right)$，其中$r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，$r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$是引力中心到质点的距离，而$\gamma_1$和$\gamma_2$是常数。试求哈密顿-雅科比方程的全积分。

[解] 首先列写问题的拉格朗日函数。取椭圆坐标ξ，

η. 它们与直角坐标的关系为

$$x=c\,\text{ch}\,\xi\cos\eta,\quad y=c\,\text{sh}\,\xi\sin\eta \tag{1}$$

于是

$$r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{c^2(\text{ch}\,\xi\cos\eta-1)^2+c^2\text{sh}^2\xi\sin^2\eta}$$
$$=c(\text{ch}\,\xi-\cos\eta)$$

$$r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=c(\text{ch}\,\xi+\cos\eta)$$

质点的势能写成

$$V=-\frac{\gamma_1}{c(\text{ch}\,\xi-\cos\eta)}-\frac{\gamma_2}{c(\text{ch}\,\xi+\cos\eta)} \tag{2}$$

由(1)得

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=c^2(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)(\text{ch}^2\xi-\cos^2\eta)$$

于是，质点的动能可写成

$$T=\frac{1}{2}mc^2(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)(\text{ch}^2\xi-\cos^2\eta) \tag{3}$$

于是，问题的拉格朗日函数在椭圆坐标下写成

$$L=T-V=\frac{1}{2}mc^2(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)(\text{ch}^2\xi-\cos^2\eta)$$
$$+\frac{\gamma_1}{c(\text{ch}\,\xi-\cos\eta)}+\frac{\gamma_2}{c(\text{ch}\,\xi+\cos\eta)} \tag{4}$$

其次，由(4)造哈密顿函数，因广义动量为

$$\left.\begin{aligned}p_\xi&=\frac{\partial L}{\partial\dot{\xi}}=mc^2\dot{\xi}(\text{ch}^2\xi-\cos^2\eta)\\ p_\eta&=\frac{\partial L}{\partial\dot{\eta}}=mc^2\dot{\eta}(\text{ch}^2\xi-\cos^2\eta)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

故广义速度为

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{\xi} &= \frac{p_\xi}{mc^2(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta)} \\
\dot{\eta} &= \frac{p_\eta}{mc^2(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta)}
\end{aligned}\right\} \tag{6}
$$

问题的哈密顿函数为

$$
H=T+V=\frac{1}{2}mc^2(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta)
$$

$$
-\frac{\gamma_1}{c(\operatorname{ch}\xi-\cos\eta)}-\frac{\gamma_2}{c(\operatorname{ch}\xi+\cos\eta)} \tag{7}
$$

将(6)代入(7)，得到

$$
H=\frac{p_\xi^2+p_\eta^2}{2mc^2(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta)}-\frac{\gamma_1}{c(\operatorname{ch}\xi-\cos\eta)}
$$

$$
-\frac{\gamma_2}{c(\operatorname{ch}\xi+\cos\eta)} \tag{8}
$$

最后，由 H 列写哈密顿-雅科比方程并求其全积分。我们有

$$
\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2mc^2(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta)}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2\right]
$$

$$
-\frac{\gamma_1}{c(\operatorname{ch}\xi-\cos\eta)}-\frac{\gamma_2}{c(\operatorname{ch}\xi+\cos\eta)}=0 \tag{9}
$$

令全积分有形式

$$
S=-ht+w_1(\xi)+w_2(\eta) \tag{10}
$$

将(10)代入(9)，得到

$$
-h+\frac{1}{2mc^2(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta)}\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial w_2}{\partial \eta}\right)^2\right]
$$

$$
-\frac{\gamma_1}{c(\operatorname{ch}\xi-\cos\eta)}-\frac{\gamma_2}{c(\operatorname{ch}\xi+\cos\eta)}=0
$$

将其分离变量，有

$$-\left(\frac{\partial w_1}{\partial \xi}\right)^2+2mc^2h\mathrm{ch}^2\xi+2mc(\gamma_1+\gamma_2)\mathrm{ch}\xi$$

$$=\left(\frac{\partial w_2}{\partial \eta}\right)^2+2mc^2h\cos\eta-2mc(\gamma_1+\gamma_2)\equiv\alpha$$

由此解出

$$\frac{\partial w_1}{\partial \xi}=\sqrt{2mc^2h\mathrm{ch}^2\xi+2mc(\gamma_1+\gamma_2)\mathrm{ch}\xi-\alpha}$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial \eta}=\sqrt{\alpha-2mc^2h\cos^2\eta+2mc(\gamma_1-\gamma_2)\cos\eta}$$

积分之，得到

$$w_1=\int\sqrt{2mc^2h\mathrm{ch}^2\xi+2mc(\gamma_1+\gamma_2)\mathrm{ch}\xi-\alpha}\,\mathrm{d}\xi$$

$$w_2=\int\sqrt{\alpha-2mc^2h\cos^2\eta+2mc(\gamma_1-\gamma_2)\cos\eta}\,\mathrm{d}\eta$$

因此，全积分为

$$S=-ht+\int\sqrt{2mc^2h\mathrm{ch}^2\xi+2mc(\gamma_1+\gamma_2)\mathrm{ch}\xi-\alpha}\,\mathrm{d}\xi$$
$$+\int\sqrt{\alpha-2mc^2h\cos^2\eta+2mc(\gamma_1-\gamma_2)\cos\eta}\,\mathrm{d}\eta \quad (11)$$

例7-18 已知某力学系统哈密顿-雅科比方程的全积分为

$$S=-\alpha_1\int f(t)dt+\int\sqrt{\alpha_n f_n(q_n)}\,\mathrm{d}q_n$$
$$+\sum_{s=1}^{n-1}\int\sqrt{(\alpha_s-\alpha_{s+1})f_s(q_s)}\,\mathrm{d}q_s$$

试求该系统的哈密顿函数。

［解］ 由哈密顿-雅科比方程(7-8)，知

$$H=-\frac{\partial S}{\partial t}=\alpha_1 f(t) \quad (1)$$

现确定常数α_1。由(7-10)，得

$$\left.\begin{aligned} p_s&=\frac{\partial S}{\partial q_s}=\sqrt{(\alpha_s-\alpha_{s+1})f_s(q_s)} \quad (s=1,2,\cdots,n-1)\\ p_n&=\frac{\partial S}{\partial q_n}=\sqrt{\alpha_n f_n(q_n)} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

由(2)得到

$$\left.\begin{aligned} \alpha_s&=\alpha_{s+1}+\frac{p_s^2}{f_s(q_s)} \quad (S=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)\\ \alpha_n&=\frac{p_n^2}{f_n(q_n)} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

由(3)解得

$$\begin{aligned} \alpha_1&=\alpha_2+\frac{p_1^2}{f_1(q_1)}=\alpha_3+\frac{p_1^2}{f_1(q_1)}+\frac{p_2^2}{f_2(q_2)}\\ &=\alpha_n+\frac{p_1^2}{f_1(q_1)}+\frac{p_2^2}{f_2(q_2)}+\cdots+\frac{p_{n-1}^2}{f_{n-1}(q_{n-1})}\\ &=\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k^2}{f_k(q_n)} \end{aligned} \tag{4}$$

将(4)代入(1)，最终得到

$$H=f(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k^2}{f_k(q_k)} \tag{5}$$

例7-19 试证变换

$$Q_1=q_1^2+p_1^2,\qquad Q_2=\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2+p_1^2+p_2^2)$$

$$P_1=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{q_2}{p_2}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{q_1}{p_2}\right),\quad p_2=-\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{q_2}{p_2}\right)$$

是正则变换。

［解 I］ 利用(7-18)判断。我们有

$$\sum_{s=1}^{2}(p_s\mathrm{d}q_s-P_s\mathrm{d}Q_s)=p_1\mathrm{d}q_1+p_2\mathrm{d}q_2$$

$$-\left[\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{q_2}{p_2}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{q_1}{p_1}\right)\right]2q_1\mathrm{d}q_1+2p_1\mathrm{d}p_1)$$

$$+\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{q_2}{p_2}\right)(q_1\mathrm{d}q_1+q_2\mathrm{d}q_2+p_1\mathrm{d}p_1+p_2\mathrm{d}p_2)$$

$$=\left[p_1+q_1\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{q_1}{p_1}\right)\right]\mathrm{d}q_1+\left[p_2+q_2\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{q_2}{p_2}\right)\right]\mathrm{d}q_2$$

$$+p_1\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{q_1}{p_1}\right)\mathrm{d}p_1+p_2\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{q_2}{p_2}\right)\mathrm{d}p_2$$

按(7-17)的记号，有

$$A_1=p_1+q_1\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{q_1}{p_1}\right),\quad A_2=p_2+q_2\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{q_2}{p_2}\right)$$

$$B_1=p_1\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{q_1}{p_1}\right),\qquad B_2=p_2\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{q_2}{p_2}\right)$$

于是

$$\frac{\partial A_1}{\partial q_2}=\frac{\partial A_2}{\partial q_1}=0,\qquad \frac{\partial B_1}{\partial p_2}=\frac{\partial B_2}{\partial p_1}=0$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial p_1}=\frac{\partial B_1}{\partial q_2}=0,\qquad \frac{\partial A_1}{\partial p_2}=\frac{\partial B_2}{\partial q_1}=0$$

因此，条件(7-18)得以满足，变换是正则的。

[解Ⅱ] 利用拉格朗日括号判据(7-19)。我们有

$$[q_1, q_2]=-[q_2, q_1]=\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial Q_s}{\partial q_1}\frac{\partial P_s}{\partial q_2}-\frac{\partial Q_s}{\partial q_2}\frac{\partial P_s}{\partial q_1}\right)$$

$$=2q_1\cdot\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{p_2}}{1+\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^2}+q_1(-1)\frac{\frac{1}{p_2}}{1+\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^2}=0$$

$$[p_1, p_2]=-[p_2, p_1]=\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial Q_s}{\partial p_1}\frac{\partial P_s}{\partial p_2}-\frac{\partial Q_s}{\partial p_2}\frac{\partial P_s}{\partial p_1}\right)$$

$$=2p_1\cdot\frac{1}{2}\frac{\left(-\frac{q_2}{p_2^2}\right)}{1+\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^2}+p_1\left(-\frac{\left(-\frac{q_2}{p_2^2}\right)}{1+\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^2}\right)=0$$

$$[q_1, p_1]=\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial Q_s}{\partial q_1}\frac{\partial P_s}{\partial p_1}-\frac{\partial Q_s}{\partial p_1}\frac{\partial P_s}{\partial q_1}\right)$$

$$=2q_1\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(-\frac{q_1}{p_1^2}\right)}{1+\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^2}\right.$$

$$\left.-2p_1\left(-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{p_1}}{1+\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^2}\right)\right)=1,$$

$$[q_1, p_2]=\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial Q_s}{\partial q_1}\frac{\partial P_s}{\partial p_2}-\frac{\partial Q_s}{\partial p_2}\frac{\partial P_s}{\partial q_1}\right)$$

$$=2q_1\cdot\frac{1}{2}\frac{\left(-\frac{q_2}{p_2^2}\right)}{1+\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^2}$$

$$+q_1\left(-\frac{\left(-\frac{q_2}{p_2^2}\right)}{1+\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^2}\right)=0$$

$$[q_2,\ p_1]=\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial Q_s}{\partial q_2}\frac{\partial P_s}{\partial p_1}-\frac{\partial Q_s}{\partial p_1}\frac{\partial P_s}{\partial q_2}\right)$$

$$=-2p_1\cdot\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{p_2}\right)}{1+\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^2}-p_1$$

$$\cdot\left(-\frac{\frac{1}{p_2}}{1+\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^2}\right)=0$$

$$[q_2,\ p_2]=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_s}{\partial q_2}\frac{\partial P_s}{\partial p_2}-\frac{\partial Q_s}{\partial p_2}\frac{\partial P_s}{\partial q_2}\right)$$

$$=q_2\left(\frac{\left(-\frac{q_2}{p_2^2}\right)}{1+\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^2}\right)-p_2$$

$$\cdot\left(-\frac{\frac{1}{p_2}}{1+\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^2}\right)=1$$

因此，条件(7-19)成立，变换是正则的。

[解Ⅲ] 利用泊松括号判据(7-20)或(7-21)。我们有

$$(Q_1, Q_2) = -(Q_2, Q_1) = \sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_s}\frac{\partial Q_2}{\partial p_s} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_s}\frac{\partial Q_2}{\partial q_s}\right)$$

$$= 2q_1 \cdot p_1 - 2p_1 q_1 = 0$$

$$(P_1, P_2) = -(P_2, P_1) = \sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial P_1}{\partial q_s}\frac{\partial P_2}{\partial p_s} - \frac{\partial P_1}{\partial p_s}\frac{\partial P_2}{\partial q_s}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{p_2}}{1+\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^2}\left(-\frac{\left(-\frac{q_2}{p_2^2}\right)}{1+\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^2}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\left(-\frac{q_2}{p_2^2}\right)}{1+\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^2}\cdot\left(-\frac{\frac{1}{p_2}}{1+\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^2}\right) = 0$$

$$(Q_1, P_1) = \sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_s}\frac{\partial P_1}{\partial p_s} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_s}\frac{\partial P_1}{\partial q_s}\right)$$

$$= 2q_1\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{q_1}{p_1^2}\right)}{1+\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^2}\right) - 2p_1$$

$$\times\left(-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{p_1}}{1+\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^2}\right) = 1$$

$$(Q_1, P_2) = \sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_s}\frac{\partial P_2}{\partial p_s} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_s}\frac{\partial P_2}{\partial q_s}\right) = 0$$

$$(Q_2,\ P_2)=\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial Q_2}{\partial q_s}\frac{\partial P_2}{\partial p_s}-\frac{\partial Q_2}{\partial p_s}\frac{\partial P_2}{\partial q_s}\right)$$

$$=q_2\left(-\frac{\left(-\frac{q_2}{p_2^2}\right)}{1+\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^2}\right)-p_2$$

$$\times\left(-\frac{\frac{1}{p_2}}{1+\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^2}\right)=1$$

因此，条件(7-2)成立，变换是正则的。

例7-20 试证变换

$$Q_s=\sqrt{2q_s}\cos p_s,\ P_s=\sqrt{2q_s}\sin p_s\quad(s=1,2,\cdots,n)$$

是正则的，并求出其母函数U。

[解] 我们有

$$\sum_{s=1}^{n}(p_s\mathrm{d}q_s-P_s\mathrm{d}Q_s)$$

$$=\sum_{s=1}^{n}p_s\mathrm{d}q_s-\sqrt{2q_s}\sin p_s\left(\frac{\cos p_s}{\sqrt{2q_s}}\mathrm{d}q_s-\sqrt{2q_s}\sin p_s\mathrm{d}p_s\right)$$

$$=\sum_{s=1}^{n}(p_s-\sin p_s\cos p_s)\mathrm{d}q_s+\sum_{s=1}^{n}2q_s\sin^2 p_s\mathrm{d}p_s\qquad(1)$$

又

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p_s}(p_s-\sin p_s\cos p_s)&=1-\cos^2 p_s+\sin^2 p_s\\&=2\sin^2 p_s,\\\frac{\partial}{\partial q_s}(2q_s\sin^2 p_s)&=2\sin^2 p_s\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

故条件(7-19)满足因此，变换是正则的。

令
$$\sum_{s=1}^{n}(p_s\mathrm{d}q_s-p_s\mathrm{d}Q_s)=\mathrm{d}U\quad(3)$$

则
$$\frac{\partial U}{\partial q_s}=p_s-\sin p_s\cos p_s,\quad(4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial p_s}=2q_s\sin^2 p_s\quad(5)$$

由(4)得

$$U=\sum_{s=1}^{n}q_s(p_s-\sin p_s\cos p_s)+f(p_s)\quad(6)$$

将(6)代入(5)，得

$$2q_s\sin^2 p_s+\frac{\partial f}{\partial p_s}=2q_s\sin^2 p_s$$

因此 $f=\text{const}$。于是母函数为

$$U=\sum_{s=1}^{n}q_s(p_s-\sin p_s\cos p_s)$$

例7-21 试证变换

$$Q_s=\left(\frac{p_s}{a+1}\right)^{\frac{1}{a}}-q_s,\ P_s=-p_s\quad(s=1,2,\cdots,n)$$

是正则的，并求出母函数$U_1(q_s, Q_s)$。

[解] 我们有

$$\sum_{s=1}^{n}(p_s\mathrm{d}q_s-P_s\mathrm{d}Q_s)$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\left\{p_s\mathrm{d}q_s+p_s\left[\frac{1}{\alpha}\left(\frac{p_s}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1}{\alpha+1}\mathrm{d}p_s-\mathrm{d}q_s\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{\alpha(\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}}}\sum_{s=1}^{n}p_s^{\frac{1}{\alpha}}\mathrm{d}p_s$$

$$=\mathrm{d}\left(\frac{1}{(\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}+1}}\sum_{s=1}^{n}p_s^{\frac{1}{\alpha}+1}\right) \qquad (1)$$

因此，变换是正则的。母函数为

$$U=\frac{1}{(\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}+1}}\sum_{s=1}^{n}p_s^{\frac{1}{\alpha}+1} \qquad (2)$$

为得到$U_1(q_s, Q_s)$，只要将(2)中p_s用q_k，Q_k表示。由变换公式，解得

$$p_s=(q_s+Q_s)^{\alpha}(\alpha+1) \qquad (3)$$

将(3)代入(2)，得

$$U_1=\frac{1}{(\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}+1}}\sum_{s=1}^{n}(q_s+Q_s)^{\alpha\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}(\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}+1}$$

$$=\sum_{s=1}^{n}(q_s+Q_s)^{\alpha+1} \qquad (4)$$

这便是第一类母函数。

例7-22 已知第一类正则变换的母函数为

$$U_1=\sum_{s=1}^{n}\sin(q_s t+Q_s)$$

试写出正则变换公式。

解：按(7-24)，我们有

$$p_s=\frac{\partial U_1}{\partial q_s}=t\cos(q_s t+Q_s) \tag{1}$$

$$P_s=-\frac{\partial U_1}{\partial Q_s}=-\cos(q_s t+Q_s) \tag{2}$$

由(1)解出Q_s

$$Q_s=\cos^{-1}\frac{p_s}{t}-q_s t \tag{3}$$

将(3)代入(2)，得到

$$P_s=-\frac{p_s}{t} \tag{4}$$

(3)、(4)即为所求正则变换式。

例7-23 试证变换

$$Q_s=q_s+\ln p_s-e^{p_s},\ P_s=p_s\quad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

是正则的，并求出第二类变换的母函数$F_2(q_s,\ P_s)$。

[解] 我们有

$$\sum_{s=1}^{n}(p_s\mathrm{d}q_s-P_s\mathrm{d}Q_s)$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\left\{p_s\mathrm{d}q_s-p_s\left(\mathrm{d}q_s+\frac{1}{p_s}\mathrm{d}p_s-\mathrm{e}^{p_s}\mathrm{d}p_s\right)\right\}$$

$$=\sum_{s=1}^{n}(-\mathrm{d}p_s+p_s\mathrm{e}^{p_s}\mathrm{d}p_s)=\mathrm{d}\sum_{s=1}^{n}(-p_s+p_s\mathrm{e}^{p_s}-\mathrm{e}^{p_s})$$

因此，变换是正则的，其母函数为

$$U=\sum_{s=1}^{n}(-p_s+p_se^{p_s}-e^{p_s}) \tag{1}$$

由(7-25)知第二类母函数为

$$F_2(q_s,\ P_s)=U_2+\sum_{s=1}^{n}Q_sP_s \tag{2}$$

将$U=U_2$代入(2)，得

$$F_2(q_s,\ P_s)=\sum_{s=1}^{n}(-p_s+p_se^{p_s}-e^{p_s})+\sum_{s=1}^{n}Q_sP_s \tag{3}$$

必须将(3)的右边表为q_s，P_s的函数。由给出的变换，得到

$$p_s=P_s,\ Q_s=q_s+\ln p_s-e^{P_s} \tag{4}$$

将(4)代入(3)得到

$$\begin{aligned}F_2(q_s,\ P_s)&=\sum_{s=1}^{n}(-P_s+P_se^{P_s}-e^{P_s})\\&\quad+\sum_{s=1}^{n}(q_s+\ln P_s-e^{P_s})P_s\\&=\sum_{s=1}^{n}[P_s(q_s-1+\ln P_s)-e^{P_s}]\end{aligned} \tag{5}$$

例7-24 已知第二类变换的母函数

$$F_2(q_s,\ P_s)=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\cos(q_st)\sin(P_kt) \tag{1}$$

其中a_{sk}为常数，试列写出正则变换式。

[解] 利用公式(7-26)，我们有

$$p_s=\frac{\partial F_2}{\partial q_s}=-\sum_{k=1}^{n}a_{sk}t\sin(q_s t)\sin(P_k t) \tag{2}$$

$$Q_s=\frac{\partial F_2}{\partial P_s}=\sum_{k=1}^{n}a_{ks}t\cos(q_k t)\cos(P_s t) \tag{3}$$

由(2)解出P_s

$$P_s=-\frac{1}{t}\sin^{-1}\left\{\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k b_{sk}}{\sin(q_k t)}\right\} \tag{4}$$

其中
$$\sum_{k=1}^{n}b_{sk}a_{km}=\delta_{sm} \tag{5}$$

将(4)代入(3)，得

$$Q_s=t\sum_{k=1}^{n}a_{ks}\cos(q_k t)\left[1-\frac{1}{t^2}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{p_m b_{sm}}{\sin(q_m t)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

(4)、(6)即为所求正则变换。

例7-25　试证变换

$$\left.\begin{aligned}Q_1&=\frac{1}{2p_1p_2^2-q_1}-p_1,\quad P_1=q_1-2p_1p_2^2\\ Q_2&=\frac{1}{2p_1^2p_2-q_2}-p_2,\quad P_2=q_2-2p_1^2p_2\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

是正则的，并求出第三类变换的母函数$F_3(p_s,\ Q_s,\ t)$。

[解]　我们有

$$\sum_{s=1}^{2}p_s\mathrm{d}q_s-\sum_{s=1}^{2}P_s\mathrm{d}Q_s=p_1\mathrm{d}q_1+p_2\mathrm{d}q_2$$

$$-(q_1-2p_1p_2^2)\left[\frac{-1}{(2p_1p_2^2-q_1)^2}(2p_2^2\mathrm{d}p_1\right.$$

$$+4p_1p_2\mathrm{d}p_2-\mathrm{d}q_1)-\mathrm{d}p_1]-(q_2-2p_1^2p_2)$$

$$\cdot\left[\frac{-1}{(2p_1^2p_2-q_2)^2}(2p_1^2\mathrm{d}p_2+4p_1p_2\mathrm{d}p_1\right.$$

$$-\mathrm{d}q_2)-\mathrm{d}p_2]=(p_1\mathrm{d}q_1+q_1\mathrm{d}p_1)+(p_2\mathrm{d}q_2$$

$$+q_2\mathrm{d}p_2)-(2p_1p_2^2\mathrm{d}p_1+2p_1^2p_2\mathrm{d}p_2)$$

$$-\frac{\mathrm{d}(2p_1p_2^2-q_1)}{2p_1p_2^2-q_1}-\frac{\mathrm{d}(2p_1^2p_2-q_2)}{2p_1^2p_2-q_2}$$

$$=\mathrm{d}[p_1q_1+p_2q_2-p_1^2p_2^2-\ln(2p_1p_2^2-q_1)$$

$$-\ln(2p_1^2p_2-q_2)] \qquad (2)$$

因此，变换是正则的，其母函数为

$$U_3=p_1q_1+p_2q_2-p_1^2p_2^2-\ln(2p_1p_2^2-q_1)$$

$$-\ln(2p_1^2p_2-q_2) \qquad (3)$$

下面求F_3。利用公式(7-27)，有

$$F_3(p_s,\ Q_s,\ t)=U_3-\sum_{s=1}^{n}p_sq_s$$

$$=-p_1^2p_2^2-\ln(2p_1p_2^2-q_1)-\ln(2p_1^2p_2-q_2) \qquad (4)$$

利用变换(1)，将(4)右边表为p_s，Q_s的函数，我们有

$$(2p_1p_2^2-q_1)^{-1}=Q_1+p_1,\ (2p_1^2p_2-q_2)^{-1}=Q_2+p_2 \qquad (5)$$

将(5)代入(4)，最终得到

$$F_3(p_s,\ Q_s,\ t)=-p_1^2p_2^2+\ln(Q_1+p_1)+\ln(Q_2+p_2) \qquad (6)$$

解毕。

例7-26 试解例7-25的逆问题，即已知第三类变换的母函数

$$F_3(p_s, Q_s, t) = -p_1^2 p_2^2 + \ln(Q_1 + p_1) + \ln(Q_2 + p_2) \tag{1}$$

求正则变换公式。

解：首先利用公式(7-28)，求出P_s，q_s。(7-28)给出

$$P_1 = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_1} = -\frac{1}{Q_1 + p_1} \tag{2}$$

$$P_2 = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_2} = -\frac{1}{Q_2 + p_2} \tag{3}$$

$$q_1 = -\frac{\partial F_3}{\partial p_1} = 2p_1 p_2^2 - \frac{1}{Q_1 + p_1} \tag{4}$$

$$q_2 = -\frac{\partial F_3}{\partial p_2} = 2p_1^2 p_2 - \frac{1}{Q_2 + p_2} \tag{5}$$

其次，由(4)、(5)解出Q_1，Q_2，有

$$Q_1 = \frac{1}{2p_1 p_2^2 - q_1} - p_1, \quad Q_2 = \frac{1}{2p_1^2 p_2 - q_2} - p_2 \tag{6}$$

最后，将(6)、(7)分别代入(2)、(3)，得到

$$P_1 = q_1 - 2p_1 p_2^2, \quad P_2 = q_2 - 2p_1^2 p_2 \tag{7}$$

于是，(6)、(7)即为所求正则变换。

例7-27 试证变换

$$Q_s = -q_s p_s, \quad P_s = \ln\left[\left(\frac{1}{\alpha}\right) p_s^\alpha q_s^{\alpha+1}\right] \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

是正则的，并求出第四类变换的母函数$F_4(p_s, P_s, t)$。

［解］ 我们有

$$\sum_{s=1}^{n}(p_s\mathrm{d}q_s-P_s\mathrm{d}Q_s)=\sum_{s=1}^{n}\left[p_s\mathrm{d}q_s-\ln\left(\frac{1}{\alpha}p_s^{\alpha}q_s^{\alpha+1}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot(-p_s\mathrm{d}q_s-q_s\mathrm{d}p_s)\right]$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\left[p_s+p_s\ln\left(\frac{1}{\alpha}p_s^{\alpha}q_s^{\alpha+1}\right)\right]\mathrm{d}q_s+\sum_{s=1}^{n}q_s\ln\left(\frac{1}{\alpha}p_s^{\alpha}q_s^{\alpha+1}\right) \tag{2}$$

令母函数为U，则有

$$\frac{\partial U}{\partial q_s}=p_s+p_s\ln\left(\frac{1}{\alpha}p_s^{\alpha}q_s^{\alpha+1}\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial p_s}=q_s\ln\left(\frac{1}{\alpha}p_s^{\alpha}q_s^{\alpha+1}\right) \tag{4}$$

由(3)积分得

$$U=\sum_{s=1}^{n}\left[p_sq_s+p_sq_s\ln\left(\frac{1}{\alpha}p_s^{\alpha}\right)+p_s(\alpha+1)\int\ln q_s\mathrm{d}q_s\right.$$

$$\left.+f(p_s)\right]$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\left[p_sq_s+p_sq_s\ln\left(\frac{1}{\alpha}p_s^{\alpha}\right)+p_s(\alpha+1)(q_s\ln q_s\right.$$

$$\left.-q_s)+f(p_s)\right] \tag{5}$$

将(5)代入(4)，得

$$q_s+q_s\ln\left(\frac{1}{\alpha}p_s^{\alpha}\right)+p_sq_s\frac{\alpha}{p_s^{\alpha}}\frac{1}{\alpha}\alpha p_s^{\alpha-1}+(\alpha+1)$$

$$\cdot(q_s\ln q_s-q_s)+\frac{\partial f}{\partial p_s}=q_s\ln\left(\frac{1}{\alpha}p_s^{\alpha}q_s^{\alpha+1}\right)$$

因此 $\frac{\partial f}{\partial p_s}=0$。于是得到母函数，

$$U=U_4=\sum_{s=1}^{n}[p_sq_s+p_sq_s\ln\left(\frac{1}{\alpha}p_s^{\alpha}\right)+p_s(\alpha+1)\cdot(q_s\ln q_s-q_s)] \tag{6}$$

为得到第四类母函数，利用公式(7-29)，有

$$F_4(p_s,\ P_s,\ t)=U_4-\sum_{s=1}^{n}p_sq_s+\sum_{s=1}^{n}P_sQ_s$$

$$=\sum_{s=1}^{n}[p_sq_s\ln\left(\frac{1}{\alpha}p_s^{\alpha}\right)+p_s(\alpha+1)(q_s\ln q_s-q_s)]+\sum_{s=1}^{n}P_sQ_s=\sum_{s=1}^{n}[p_sq_s\ln\left(\frac{1}{\alpha}p_s^{\alpha}q_s^{\alpha+1}\right)-p_sq_s(\alpha+1)]-\sum_{s=1}^{n}\cdot p_sq_s\ln\left(\frac{1}{\alpha}p_s^{\alpha}q_s^{\alpha+1}\right)=-(\alpha+1)\sum_{s=1}^{n}p_sq_s \tag{7}$$

由变换(1)第二组解得

$$q_s=(\alpha e^{p_s}p_s^{-\alpha})^{\frac{1}{\alpha+1}} \tag{8}$$

将(8)代入(7)，得到第四类母函数

$$F_4=-(\alpha+1)\sum_{s=1}^{n}p_s(\alpha e^{p_s}p_s^{-\alpha})^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

$$=-(\alpha+1)\cdot\sum_{s=1}^{n}(\alpha e^{p_s}p_s)^{\frac{1}{\alpha+1}} \tag{9}$$

例7-28 试解例7-27的逆问题。

[解] 已知第四类母函数

$$F_4(p_s, P_s, t) = -(a+1)\sum_{s=1}^{n}(ae^{P_s}p_s)^{\frac{1}{a+1}} \tag{1}$$

按公式(7-32)，得

$$q_s = -\frac{\partial F_4}{\partial p_s} = (a+1)(ae^{P_s})^{\frac{1}{a+1}} \cdot \frac{1}{a+1}p_s^{\frac{1}{a+1}-1}$$

$$= (ae^{P_s})^{\frac{1}{a+1}}p_s^{-\frac{a}{a+1}} \tag{2}$$

$$Q_s = \frac{\partial F_4}{\partial P_s} = -(a+1)(ap_s)^{\frac{1}{a+1}}\frac{1}{a+1}(e^{P_s})^{\frac{1}{a+1}-1}e^{P_s}$$

$$= -(ap_s)^{\frac{1}{a+1}}(e^{P_s})^{\frac{1}{a+1}} \tag{3}$$

由(2)解出P_s，得

$$Ps = \ln\left(\frac{1}{a}p_s^a q_s^{a+1}\right) \tag{4}$$

将(4)代入(3)，得

$$Qs = -(ap_s)^{\frac{1}{a+1}}\left(\frac{1}{a}p_s^a q_s^{a+1}\right)^{\frac{1}{a+1}} = -p_s q_s \tag{5}$$

(4)、(5)即为所求正则变换。

例7-29 质量为m的质点在势能$V=ky$的作用下在xy平面内运动。试就齐次点变换

$$Q_1 = xy, \quad Q_2 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \tag{1}$$

求P_1和P_2的表达式以及第二类母函数$F_2(q_s, P_s)$。试问新的哈密顿函数H^*是什么样的函数？

［解］　首先求P_1和P_2。系统的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-ky \tag{2}$$

广义动量为

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x},\quad p_y=\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=m\dot{y} \tag{3}$$

由(1)解出x，y，得到

$$x=\left[(Q_1^2+Q_2^2)^{\frac{1}{2}}+Q_2\right]^{\frac{1}{2}},\quad y=\left[(Q_1^2+Q_2^2)^{\frac{1}{2}}-Q_2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

将(1)两边对t求导数，得

$$\dot{Q}_1=\dot{x}y+x\dot{y},\quad \dot{Q}_2=x\dot{x}-y\dot{y}$$

由此解出

$$\dot{x}=\frac{y\dot{Q}_1+x\dot{Q}_2}{x^2+y^2},\qquad \dot{y}=\frac{x\dot{Q}_1-y\dot{Q}_2}{x^2+y^2} \tag{5}$$

令新的拉格朗日函数为L^*，则

$$P_1=\frac{\partial L^*}{\partial \dot{Q}_1}=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{Q}_1}+\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{Q}_1}=p_x\cdot\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$+p_y\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$P_2=\frac{\partial L^*}{\partial \dot{Q}_2}=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{Q}_2}+\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{Q}_2}=p_x\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$-p_y\frac{y}{x^2+y^2} \tag{6}$$

其次，求第二类母函数$F_2(q_s,P_s)$。我们有

$$dU=p_x dx+p_y dy-P_1 dQ_1-P_2 dQ_2$$

$$=p_x\mathrm{d}x+p_y\mathrm{d}y-\frac{1}{x^2+y^2}(yp_x+xp_y)(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x)$$

$$-\frac{1}{x^2+y^2}(xp_x-yp_y)(x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y)$$

$$=\left[p_x-\frac{y(yp_x+xp_y)}{x^2+y^2}-\frac{x(xp_x-yp_y)}{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$+\left[p_y-\frac{x(yp_x+xp_y)}{x^2+y^2}+\frac{y(xp_x-yp_y)}{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}y=0 \tag{7}$$

故$U=U_2=0$。由(7-25)得

$$F_2(q_s,\ P_s)=U_2+\sum_{s=1}^{2}Q_sP_s=Q_1P_1+Q_2P_2 \tag{8}$$

将(1)代入(8)，得到

$$F_2(q_s,\ P_s)=xyP_1+\frac{1}{2}(x^2-y^2)P_2 \tag{9}$$

最后，求新的哈密顿函数H^*。原哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2)-ky \tag{10}$$

由(6)解出

$$p_x=P_1y+P_2x,\quad p_y=P_1x-P_2y \tag{11}$$

将(11)代入(10)，得到

$$H^*=\frac{1}{2m}(x^2+y^2)(P_1^2+P_2^2)-ky$$

再将(4)代入上式，最后得到

$$H^*=\frac{1}{m}(Q_1^2+Q_2^2)^{\frac{1}{2}}(P_1^2+P_2^2)-k[(Q_1^2+Q_2^2)^{\frac{1}{2}}-Q_2]^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

例7-30 变换

$$x_1=\sqrt{\xi\eta}\cos\varphi,\ x_2=\sqrt{\xi\eta}\sin\varphi,\ x_3=\frac{1}{2}(\xi-\eta) \tag{1}$$

实现了由直角坐标向广义坐标的过渡，求广义动量的变换公式

$$p_{x_i}=p_{x_i}(\xi,\ \eta,\ \varphi,\ p_\xi,\ p_\eta,\ p_\varphi,\ t)$$

确定变换的正则性，并求出母函数U。

［解］ 首先求$p_{x_i}(\zeta,\ \eta,\ \varphi,\ p_\zeta,\ p_\eta,\ p_\varphi,\ t)$。将(1)各式两端对时间$t$求导数，得到

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1&=\frac{\xi\dot{\eta}+\eta\dot{\xi}}{2\sqrt{\xi\eta}}\cos\varphi-\sqrt{\xi\eta}\,\dot{\varphi}\sin\varphi\\
\dot{x}_2&=\frac{\xi\dot{\eta}+\eta\dot{\xi}}{2\sqrt{\xi\eta}}\sin\varphi+\sqrt{\xi\eta}\,\dot{\varphi}\cos\varphi\\
\dot{x}_3&=\frac{1}{2}(\dot{\xi}-\dot{\eta})
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

设新变量下的拉格朗日函数为L^*，则有

$$\left.\begin{aligned}
p_\xi&=\frac{\partial L^*}{\partial\dot{\xi}}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\dot{\xi}}=p_{x_1}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\cos\varphi\\
&\quad+p_{x_2}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\sin\varphi+p_{x_3}\frac{1}{2}\\
p_\eta&=\frac{\partial L^*}{\partial\dot{\eta}}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\dot{\eta}}=p_{x_1}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\cos\varphi\\
&\quad+p_{x_2}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\sin\varphi-p_{x_3}\frac{1}{2}
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L^*}{\partial\dot\varphi}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial \dot x_i}\frac{\partial \dot x_i}{\partial\dot\varphi}=-p_{x_1}\sqrt{\xi\eta}\sin\varphi$$
$$+p_{x_2}\sqrt{\xi\eta}\cos\varphi$$

由(3)解出p_{x_i}，得

$$\left.\begin{aligned}
p_{x_1}&=\frac{2\sqrt{\xi\eta}}{\xi+\eta}(p_\xi+p_\eta)\cos\varphi-\frac{p_\varphi}{\sqrt{\xi\eta}}\sin\varphi\\
p_{x_2}&=\frac{2\sqrt{\xi\eta}}{\xi+\eta}(p_\xi+p_\eta)\sin\varphi+\frac{p_\varphi}{\sqrt{\xi\eta}}\cos\varphi\\
p_{x_3}&=\frac{2(\xi p_\xi-\eta p_\eta)}{\xi+\eta}
\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

其次求变换的母函数。我们有

$$p_{x_1}\mathrm{d}x_1+p_{x_2}\mathrm{d}x_2+p_{x_3}\mathrm{d}x_3-p_\xi\mathrm{d}\xi-p_\eta\mathrm{d}\eta-p_\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\left[\frac{2\sqrt{\xi\eta}}{\xi+\eta}(p_\xi+p_\eta)\cos\varphi-\frac{p_\varphi}{\sqrt{\xi\eta}}\sin\varphi\right]$$
$$\cdot\left(\frac{\xi\mathrm{d}\eta+\eta\mathrm{d}\xi}{2\sqrt{\xi\eta}}\cos\varphi-\sqrt{\xi\eta}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\right)$$
$$+\left[\frac{2\sqrt{\xi\eta}}{\xi+\eta}(p_\xi+p_\eta)\sin\varphi+\frac{p_\varphi}{\sqrt{\xi\eta}}\cos\varphi\right]$$
$$\cdot\left(\frac{\xi\mathrm{d}\eta+\eta\mathrm{d}\xi}{2\sqrt{\xi\eta}}\sin\varphi+\sqrt{\xi\eta}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\right)$$
$$+\frac{2(\xi p_\xi-\eta p_\eta)}{\xi+\eta}\frac{1}{2}(\mathrm{d}\xi-\mathrm{d}\eta)-p_\xi\mathrm{d}\xi-p_\eta\mathrm{d}\eta$$
$$-p_\varphi\mathrm{d}\varphi=0$$

故变换的母函数为零。

例7-31 对哈密顿函数$H=\frac{pq^3}{2t}$的方程组加以变换

$$Q=\frac{1}{q^2}+\ln(tpq^3),\quad P=pq^3(1+te^{\frac{1}{q^2}}) \tag{1}$$

试验证变换肯定是正则变换。求变换后方程组的哈密顿函数。

[解] 利用(7-4)，得到原正则方程为

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{q^3}{2t},\quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}=-\frac{3pq^2}{2t} \tag{2}$$

欲求新的方程组，可将(1)两边对时间求导数。并利用(2)，得到

$$\dot{Q}=-2q^{-3}\dot{q}+\frac{1}{tpq^3}(pq^3+t\dot{p}q^3+3tpq^2\dot{q})$$

$$=-2q^3\cdot\frac{q^3}{2t}+\frac{1}{tpq^3}\left[pq^3+tq^3\left(-\frac{3pq^2}{2t}\right)\right.$$

$$\left.+3tpq^2\cdot\frac{q^3}{2t}\right]=0$$

$$\dot{p}=(\dot{p}q^3+3pq^2\dot{q})(1+te^{\frac{1}{q^2}})+pq^3[e^{\frac{1}{q^2}}+te^{\frac{1}{q^2}}(-2)q^{-3}\dot{q}]$$

$$=\left(-\frac{3pq^2}{2t}q^3+3pq^2\frac{q^3}{2t}\right)(1+te^{\frac{1}{q^2}})+pq^3e^{\frac{1}{q^2}}$$

$$\cdot\left(1-\frac{2t}{q^3}\frac{q^3}{2t}\right)=0$$

因此，显然变换是正则的，并且新的哈密顿函数

$$H^*=0 \tag{3}$$

三、习 题

7-1 已知力学系统的拉格朗日函数为

$$L=\frac{3}{2}\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2-q_1^2-\frac{1}{2}q_2^2-q_1q_2$$

试求系统的哈密顿函数H。

答：$H=\frac{1}{6}p_1^2+\frac{1}{2}p_2^2+q_1^2+\frac{1}{2}q_2^2+q_1q_2$

7-2 已知力学系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{1}{4}(\dot{q}_1+\dot{q}_3)^2+\frac{1}{4}(\dot{q}_2+\dot{q}_4)^2$$

势能为

$$V=2(q_1^2+q_2^2-q_1q_2)+\frac{1}{4}(q_3^2+q_4^2)$$

试求系统的哈密顿函数H。

答：$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2+3p_3^2+3p_4^2-2p_1p_3-2p_2p_4)$

$$+2(q_1^2+q_2^2-q_1q_2)+\frac{1}{4}(q_3^2+q_4^2)$$

7-3 已知某二自由度系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}[(\dot{q}_1-\dot{q}_2)^2+a\dot{q}_1^2t^2]$$

其中a为常数，势能为

$$V=a\cos q_2$$

试求该系统的哈密顿函数H。

答：$H=\frac{1}{2at^2}(p_1+p_2)^2+\frac{1}{2}p_2^2+a\cos q_2$

7-4 已知某力学系统的拉格朗日函数为

$$L=a\dot{q}_1^2+(c^2+b^2\cos^2 q_1)\dot{q}_2^2$$

其中a、b与c为常数，试求该系统的哈密顿函数H。

答：$H=\frac{1}{4a}p_1^2+\frac{p_2^2}{4(c^2+b^2\cos^2 q_1)}$

7-5 已知某三自由度系统的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{q_1 q_2}(\dot{q}_1 q_2+q_1\dot{q}_2)^2+(\dot{q}_1-\dot{q}_2)^2+4q_1 q_2\dot{q}_3^2\right]$$
$$+a(q_1+q_2)^{-1}-b(q_1-q_2)$$

其中a、b为常数，试求该系统的哈密顿函数H。

答：$H=\frac{2}{q_1+q_2}(q_1 p_1^2+q_2 p_2^2)+\frac{p_3^2}{2q_1 q_2}-\frac{a}{q_1+q_2}$
$+b(q_1-q_2)$

7-6 已知力学系统的哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+\frac{a}{4}(q_1-q_2)^2+\frac{b}{4}(q_1+q_2)^2$$

其中a，b为常数，试求力学系统的拉格朗日函数L。

答：$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\frac{a}{4}(q_1-q_2)^2-\frac{b}{4}(q_1+q_2)^2$

7-7 已知某二自由度系统的哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2}\left(p_1^2+\frac{p_2^2}{\sin^2 q_1}\right)-a\cos q_1$$

其中a为常数，试求该系统的拉格朗日函数L。

答：$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2\sin^2 q_1)+a\cos q_1$

7-8　已知力学系统的哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2}\frac{p_1^2+p_2^2}{q_1^2+q_2^2}+a(q_1^2+q_2^2)$$

其中a为常数，试求该系统的拉格朗日函数L。

答：$L=\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2-2a)$

7-9　已知某二自由度系统的哈密顿函数为

$$H=p_1p_2+q_1q_2$$

试求该系统的拉格朗日函数L。

答：$L=\dot{q}_1\dot{q}_2-q_1q_2$

7-10　质量为m的小球沿着以匀角速度ω绕铅垂轴转动的光滑水平管运动。不计小球的大小，试建立和求解其相对运动的正则方程。

答：设x为小球的相对坐标，正则方程为

$\dot{x}=\frac{p_x}{m}$，$\dot{p}_x=m\omega^2x$，解为$x=Ae^{-\omega t}+Be^{\omega t}$，其中$A$，$B$为积分常数。

7-11　求平面数学摆运动的哈密顿函数，并建立正则方程。

答：设摆的质量为m，摆长为l，摆与铅垂线夹角为φ，则哈密顿函数为

$$H=\frac{p_\varphi^2}{2ml^2}-mgl\cos\varphi$$

正则方程为

$$\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{ml^2},\quad \dot{p}_\varphi=-mgl\sin\varphi$$

7-12　试建立自由质点在均匀重力场中运动的正则方

程。

答：$\dot{x}=\dfrac{p_x}{m}$，$\dot{p}_x=0$，$\dot{y}=\dfrac{p_y}{m}$，$\dot{p}_y=0$，$\dot{z}=\dfrac{p_z}{m}$，

$$\dot{p}_z=-mg$$

7-13 质量为m的质点在引向固定中心的引力场中运动。如果引力为质点距中心的距离的函数，试建立质点运动的正则方程。

答：取球坐标r，θ(纬度的余角)，φ(经度)为广义坐标：

$$\dot{r}=\frac{p_r}{m},\quad \dot{p}_r=\frac{1}{mr^3}\left(p_\theta^2+\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right)-\frac{\partial v}{\partial r}$$

$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2},\quad \dot{p}_\theta=-\frac{p_\varphi^2\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta}$$

$$\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta},\quad \dot{p}_\varphi=0$$

7-14 求三原子分子线性模型的哈密顿函数，并建立正则方程。三原子分子可当作光滑水平杆上的用刚度为c_1和c_2的弹簧联结的三个点质量m_1，m_2，m_3。

答：设三点质量的坐标为x_1，x_2，x_3，哈密顿函数为

$$H=\frac{p_1^2}{2m_1}+\frac{p_2^2}{2m_2}+\frac{p_3^2}{2m_3}+\frac{1}{2}c_1(x_2-x_1)^2$$

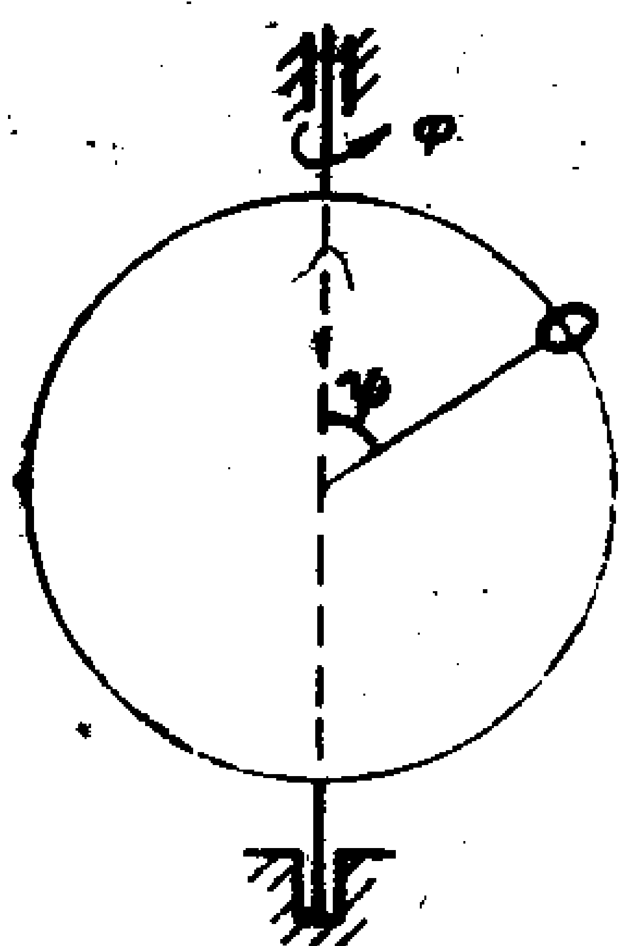
$$+\frac{1}{2}c_2(x_3-x_2)^2$$

正则方程为

$$\dot{x}_1=\frac{p_1}{m_1},\quad \dot{p}_1=c_1(x_2-x_1)$$

$$\dot{x}_2=\frac{p_2}{m_2},\quad \dot{p}_2=-c_1(x_2-x_1)+c_2(x_3-x_2)$$

$$\dot{x}_3=\frac{p_3}{m_3},\quad \dot{p}_3=-c_2(x_3-x_2)$$



题7-15图

7-15 质量为m的小重环沿质量为M、半径为R的光滑金属丝圆周滑动，圆周绕其铅垂轴转动。求哈密顿函数，建立并求解(用积分形式)系统运动的正则方程。

答：哈密顿函数为

$$H=\frac{p_\psi^2}{2mR^2}+\frac{p_\varphi^2}{2mR^2\sin^2\psi}+mgR\cos\psi$$

正则方程为

$$\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\psi},\quad \dot{p}_\varphi=0$$

$$\dot{\psi}=\frac{p_\psi}{mR^2},\quad \dot{p}_\psi=\frac{p_\varphi^2\cos\psi}{mR^2\sin^3\psi}+mgR\sin\psi$$

解为

$$p_\varphi=p_{\varphi 0},\qquad p_\psi=\Big(p_{\psi 0}^2-\frac{p_{\varphi 0}^2}{\sin^2\psi}+\frac{p_{\varphi 0}^2}{\sin^2\psi_0}+$$

$$+2m^2gR^3\cos\psi-2m^2gR^3\cos\psi_0\Big)^{\frac{1}{2}},$$

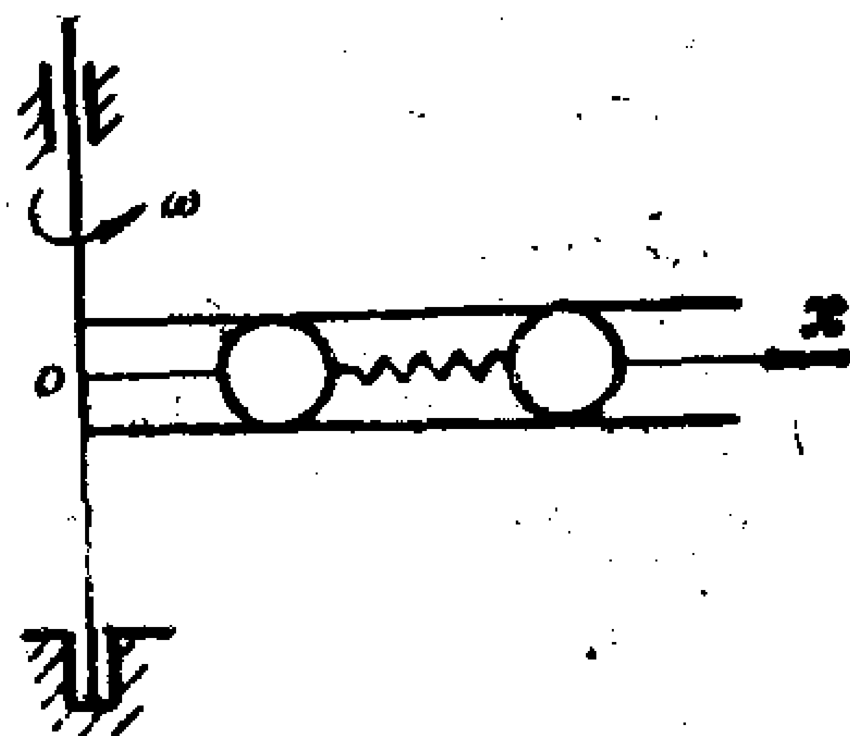
$$t-t_0=mR^2\int\Big(p_{\psi 0}^2-\frac{p_{\varphi 0}^2}{\sin^2\psi}+\frac{p_{\varphi 0}^2}{\sin^2\psi_0}+2m^2gR^3\cos\psi$$

$$-2m^2gR^3\cos\psi_0\Big)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\psi$$

$$\varphi-\varphi_0=p_{\varphi 0}\int\frac{1}{\sin^2\psi}\Big(p_{\psi 0}^2-\frac{p_{\varphi 0}^2}{\sin^2\psi}+\frac{p_{\varphi 0}^2}{\sin^2\psi_0}$$

$$+2m^2gR^3\cos\psi-2m^2gR^3\cos\psi_0\Big)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\psi$$

7-16 质量均为m的两个相同小球彼此之间用刚度为c的弹簧(弹簧在未变形状态时等于l_0)联结，可无摩擦地沿管子滑动。管以匀角速度ω绕铅垂轴转动。不计小球大小，试求系统的哈密顿函数，建立两小球相对运动的正则方程。



题7-16图

答：$$H=\frac{1}{2m}(p_1^2+p_2^2)-\frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2+x_2^2)+\frac{1}{2}c(x_2-x_1-l_0)^2$$

$$\dot{x}_1=\frac{p_1}{m},\quad \dot{p}_1=m\omega^2x_1+c(x_2-x_1-l_0)$$

$$\dot{x}_2=\frac{p_2}{m},\quad \dot{p}_2=m\omega^2x_2-c(x_2-x_1-l_0)$$

7-17 相对论力学中具有静止质量m_0的粒子在无力场下的拉格朗日函数为

$$L=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}$$

其中c为光速。试证它的哈密顿函数为

$$H=c\sqrt{m_0^2c^2+p_x^2+p_y^2+p_z^2}$$

其中当$v=0$时，$H=m_0c^2$。试建立正则方程并求出粒子的运动规律。

答：正则方程为

$$\dot{x}=cp_x(m_0^2c^2+p_x^2+p_y^2+p_z^2)^{-\frac{1}{2}},\quad \dot{p}_x=0$$

$$\dot{y}=cp_y(m_0^2c^2+p_x^2+p_y^2+p_z^2)^{-\frac{1}{2}},\dot{p}_y=0$$

$$\dot{z}=cp_z(m_0^2c^2+p_x^2+p_y^2+p_z^2)^{-\frac{1}{2}},\ \dot{p}_z=0$$

运动规律为

$$p_x=p_{x0},\ p_y=p_{y0},\ p_z=p_{z0}$$

$$x=cp_{x0}(m_0^2c^2+p_{x0}^2+p_{y0}^2+p_{z0}^2)^{-\frac{1}{2}}t+x_0$$

$$y=cp_{y0}(m_0^2c^2+p_{x0}^2+p_{y0}^2+p_{z0}^2)^{-\frac{1}{2}}t+y_0$$

$$z=cp_{z0}(m_0^2c^2+p_{x0}^2+p_{y0}^2+p_{z0}^2)^{-\frac{1}{2}}t+z_0$$

7-18 相对论性粒子在引力场作用下在球坐标中的拉格朗日函数为

$$L=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)}+\frac{\gamma}{r}$$

其中m_0为粒子的静止质量，c为光速。求粒子的哈密顿函数。

答：$H=c\sqrt{m_0^2c^2+p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}}-\frac{\gamma}{r}$

7-19 质量为m的质点在均匀重力场中沿半径为R的光滑球面运动(球面摆)，试求哈密顿函数并建立质点运动的正则方程。

答：$H=\frac{p_\theta^2}{2mR^2}+\frac{p_\varphi^2}{2mR^2\sin^2\theta}+mgR\cos\theta$

$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mR^2},\quad \dot{p}_\theta=\frac{p_\varphi^2\cos\theta}{mR^2\sin^3\theta}+mgR\sin\theta$$

$$\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta},\ \dot{p}_\varphi=0$$

7-20　质量为m_1和m_2的质点用刚度为c的弹性杆联结，位于光滑的水平面上；杆不弯曲，不扭转，在未伸长状态下长为a，杆的质量略去不计。试建立系统运动的正则方程。

答：系统质心坐标$(x,\ y)$，杆长r，杆与ox轴夹角θ为广义坐标，则

$$H=\frac{1}{2(m_1+m_2)}(p_x^2+p_y^2)+\frac{1}{2\mu}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}c(r-a)^2$$

其中 $\mu=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$

7-21　求按万有引力定律相互作用的两个质点所组成系统的哈密顿函数并建立正则方程。取系统质点坐标x，y，z，两点间距离r和角φ，ψ(纬度和经度)作为广义坐标。

答：$$H=\frac{1}{2(m_1+m_2)}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+\frac{1}{2\mu}\left(p_r^2\right.$$

$$\left.+\frac{p_\varphi^2}{r^2}+\frac{p_\psi^2}{r^2\cos^2\varphi}\right)-\frac{\gamma m_1m_2}{r}$$

其中 $\mu=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$。

7-22　具有固定支点的对称陀螺($A=B\neq C$)在均匀重力场中运动。陀螺重心位于动力对称轴上，距支点距离为a。试建立陀螺运动的正则方程。

答：取欧拉角ψ，θ，φ为广义坐标，正则方程为

$$\dot{\psi}=\frac{p_\psi-p_\varphi\cos\theta}{A\sin^2\theta},\quad \dot{p}_\psi=0$$

$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{A},\quad \dot{p}_\theta=\frac{(p_\psi-p_\varphi\cos\theta)(p_\psi\cos\theta-p_\varphi)}{A\sin^3\theta}$$

$$+mga\sin\theta$$

$$\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{c}-\frac{(p_\psi-p_\varphi\cos\theta)\cos\theta}{A\sin^2\theta},\quad \dot{p}_\varphi=0$$

7-23 如果质量为m的自由刚体的主中心惯性矩等于A、B、C，试求该刚体在均匀重力场中的哈密顿函数。

答：取刚体质心坐标x，y，z及欧拉角ψ，θ，φ为广义坐标，则哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+\frac{p_\varphi^2}{2c}+\frac{1}{2AB\sin^2\theta}\Big\{A[p_\theta^2$$

$$\times\sin^2\theta+(p_\psi-p_\varphi\cos\theta)^2]+(B-A)[p_\theta\sin\theta\cos\varphi$$

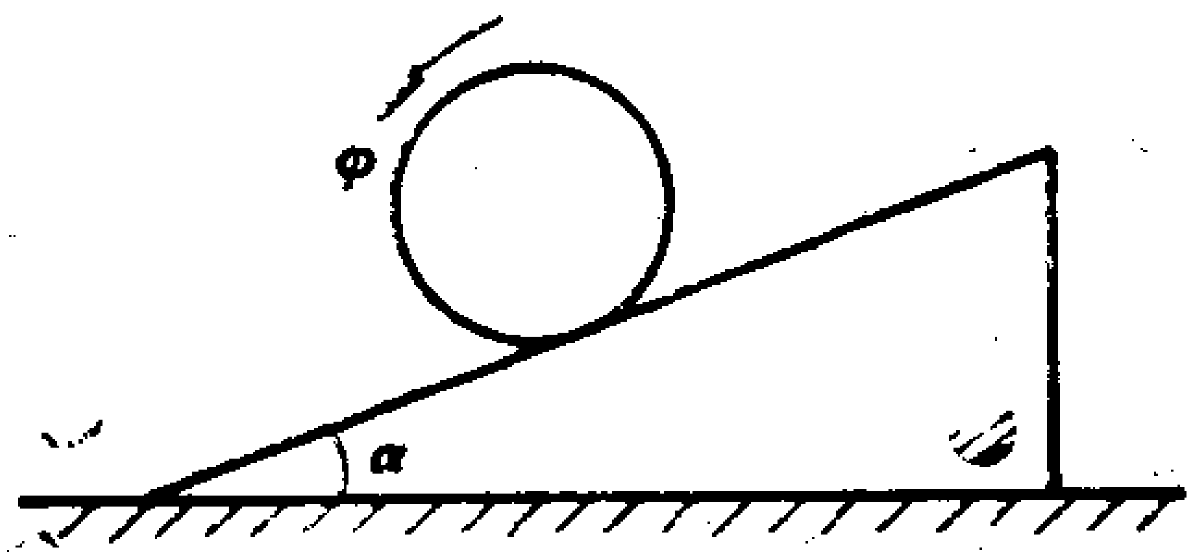
$$+(p_\psi-p_\varphi\cos\theta)\sin\varphi]^2\Big\}$$

7-24 质量为M的三棱柱可沿光滑的水平面滑动。半径为r、质量为m的均质圆柱可沿与水平成α角的棱柱侧面无滑动地滚动。试求系统的哈密顿函数，建立运动的正则方程并求其解。

答：取棱柱位移x，圆柱相对棱柱转角φ为广义坐标，则哈密顿函数为

$$H=\frac{3mr^2p_x^2+2(M+m)p_\varphi^2-4mrp_xp_\varphi\cos\alpha}{2mr^2[3M+m(1+2\sin^2\alpha)]}$$

$-mgr\varphi\sin\alpha$



题7-24图

正则方程为

$$\dot{x}=\frac{3p_x r-2p_\varphi\cos\alpha}{r[3M+m(1+2\sin^2\alpha)]},\quad \dot{p}_x=0$$

$$\dot{\varphi}=\frac{2(M+m)p_\varphi-2mp_x r\cos\alpha}{mr^2[3M+m(1+2\sin^2\alpha)]},\quad \dot{p}_\varphi=mgr\sin\alpha$$

其解为

$$p_x=p_{x_0},\quad p_\varphi=p_{\varphi_0}+mgrt\sin\alpha$$

$$x=x_0+\frac{(3p_{x0}r-2p_{\varphi 0}\cos\alpha)t-mgrt^2\sin\alpha\cos\alpha}{r[3M+m(1+2\sin^2\alpha)]}$$

$$\varphi=\varphi_0+\frac{2(M+m)\left(p_{\varphi 0}t+\frac{1}{2}mgrt^2\sin\alpha\right)-2mp_{x0}rt\cos\alpha}{mr^2[3M+m(1+2\sin^2\alpha)]}$$

7-25 试求双摆的哈密顿函数，并建立正则方程。双摆由质量为m长度为l的两个相同的均质杆组成。

答：取两杆与铅垂线夹角φ，ψ为广义坐标，则系统的哈密顿函数为

$$H=\frac{6[p_\varphi^2+4p_\psi^2-3p_\varphi p_\psi\cos(\psi-\varphi)]}{ml^2[7+9\sin^2(\psi-\varphi)]}-\frac{3}{2}mgl\cos\varphi$$

$$-\frac{1}{2}mgl\cos\psi$$

7-26 力学系统的拉格朗日函数为 $L=L_2+L_1+L_0$，其中

$$L_2=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}(q,\ t)\dot{q}_s\dot{q}_k \quad (a_{sk}=a_{ks})$$

$$L_1=\sum_{s=1}^{n}b_s(q,\ t)\dot{q}_s,\ L_0=L_0(q,\ t)$$

求该系统的哈密顿函数。

答：$$H=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\rho_{sk}p_sp_k-\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\rho_{sk}b_kp_s$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\rho_{sk}b_sb_k-L_0(q_s,\ t)$$

其中ρ_{sk}为矩阵$\|a_{sk}\|$的逆矩阵元素。

7-27 试建立有n个自由度保守系统微振动的正则方程。在线性化后，保守系统的动能和势能均为常系数的正定二次型

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\dot{q}_s\dot{q}_k$$

$$V=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_{sk}q_sq_k \quad (a_{sk}=a_{ks},\ c_{sk}=c_{ks})。$$

答：$$\dot{q}_s=\sum_{k=1}^{n}\rho_{sk}p_k,\ \dot{p}_s=-\sum_{k=1}^{n}c_{sk}q_k$$

其中ρ_{sk}为矩阵$\|a_{sk}\|$的逆矩阵的元素。

7-28 系统的拉格朗日函数等于

$$L=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\dot{q}_s\dot{q}_k+\sum_{s=1}^{n}b_s(t)q_s$$

其中$a_{sk}=a_{ks}$是常量。试求该系统的哈密顿函数，建立运动的正则方程并求其解。

答：哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\rho_{sk}p_s p_k-\sum_{s=1}^{n}b_s q_s$$

正则方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_s&=\sum_{k=1}^{n}\rho_{sk}p_k\\ \dot{p}_s&=b_s\qquad(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\end{aligned}\right\}$$

其解为

$$\left.\begin{aligned}p_s&=\int_{t_0}^{t}b_s(\tau)\mathrm{d}\tau+p_{s0}\\ q_s&=\sum_{k=1}^{n}\rho_{sk}\int_{t_0}^{t}p_k(\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}\right\}$$

其中ρ_{sk}为矩阵$\|a_{sk}\|$的逆矩阵元素。

7-29 在直角坐标中三维各向异性振子的哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+\frac{1}{2}(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)$$

求振子在柱坐标和球坐标中的哈密顿函数。

答：柱坐标中的哈密顿函数

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}+p_z^2\right)+\frac{1}{2}\left(\alpha r^2\cos^2\varphi+\beta r^2\sin^2\varphi+\right.$$

$$\left.+\gamma z^2\right)$$

球坐标中的哈密顿函数

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+\frac{1}{2}(\alpha r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi$$

$$+\beta r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+\gamma r^2\cos^2\theta)$$

7-30 在直角坐标中相对论性的质点在引力场中的哈密顿函数为

$$H=c\sqrt{m_0^2c^2+p_x^2+p_y^2+p_z^2}-\frac{\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

其中m_0是静止质量，c 是光速，γ 是引力常数。求质点在球坐标中的哈密顿函数。

答：$H=c\sqrt{m_0^2c^2+p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}}-\frac{\gamma}{r}$

7-31 已知系统的哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}(p_s^2+\omega_s^2q_s^2)$$

用直接积分正则方程的方法求系统的运动。

答：$q_s=A_s\sin(\omega_st+\alpha_s)$

$p_s=A_s\omega_s\cos(\omega_st+\alpha_s)\qquad(s=1,2,\cdots,n)$

7-32 已知某二自由度系统的哈密顿函数为

$$H=\frac{p_1^2+q_1^2}{p_2^2+q_2^2}$$

试建立系统的正则方程，并用直接积分方法求解运动。

答：$q_1=\alpha_1\sin\left(\frac{2}{\alpha_2^2}t+\beta_1\right)$，　$q_2=\alpha_2\sin\left(\frac{2\alpha_1^2}{\alpha_2^4}t+\beta_2\right)$

$$p_1=\alpha_1\cos\left(\frac{2}{\alpha_2^2}t+\beta_1\right)$$

$$p_2=-\alpha_2\cos\left(\frac{2\alpha_1^2}{\alpha_2^4}t+\beta_2\right)$$

其中α_1，β_1，α_2，β_2为积分常数。

7-33　试计算泊松括号(K_j, p_i)，(K_i, K_j)，(x_i, K_j)，$(K^2, K_j)(i,j=1, 2, 3)$，式中x_1，x_2，x_3，p_1，p_2，p_3是点的直角坐标和动量分量，K_1，K_2，K_3是相对坐标原点的动量矩分量，而$K^2=K_1^2+K_2^2+K_3^2$。

答：$(K_j, p_j)=(K_j, K_j)=(x_j, K_3)=0$，$(K_1, p_2)=-(K_2, p_1)=p_3$，$(K_3, p_1)=-(K_1, p_3)=p_2$，$(K_2, p_3)=-(K_3, p_2)=p_1$，$(x_1, K_2)=-(x_2, K_1)=x_3$，$(x_3, K_1)=-(x_1, K_3)=x_2$，$(x_2, K_3)=-(x_3, K_2)=x_1$，$(K_1, K_2)=K_3$，$(K_2, K_3)=K_1$，$(K_3, K_1)=K_2$，$(K^2, K_j)=0$。

7-34　已知$\varphi=q^2+p^2$，$\psi=\mathrm{tg}^{-1}\frac{p}{q}$，试计算泊松括号$(\varphi, \psi)$。

答：$(\varphi, \psi)=2$

7-35　已知$\varphi=q_s$，$\psi=\psi(q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n, t)$，试计算泊松括号$(\varphi, \psi)$。

答：$(\varphi, \psi)=\frac{\partial\psi}{\partial p_s}$

7-36　已知$\varphi=q_s$，$\psi=p_k(s, k=1, 2, \cdots, n)$，试计算泊松括号$(\varphi, \psi)$。

答：$(\varphi, \psi)=\delta_{sk}=\begin{cases}1 & s=k\\0 & s\neq k\end{cases}$

7-37 已知$\varphi=\varphi(q_1, p_1)$，$\psi=F[\varphi(q_1, p_1), q_2, \cdots, q_n, p_2, \cdots, p_n, t]$试计算泊松括号$(\varphi, \psi)$。

答：$(\varphi, \psi)=0$

7-38 已知$\varphi=\cos\left[\sum_{s=1}^{n}(p_s^2+q_s^2)\right]$，$\psi=\sin\left[\sum_{s=1}^{n}(p_s^2+q_s^2)\right]$，试求泊松括号$(\varphi, \psi)$。

答：$(\varphi, \psi)=0$

7-39 已知$\varphi=f_1(g(q_s, p_s))$，$\psi=f_2(g(q_s, p_s))$，试计算泊松括号(φ, ψ)。

答：$(\varphi, \psi)=0$

7-40 已知$\varphi=\varphi\left[\sum_{s=1}^{n}(p_s^2+q_s^3)\right]$，$\psi=\psi\left[\sum_{s=1}^{n}(p_s^2+q_s^3)\right]$，试求泊松括号$(\varphi, \psi)$。

答：$(\varphi, \psi)=0$

7-41 函数$\varphi(q, p, t)$是循环坐标为q_k的哈密顿方程组的第一积分。试证函数$\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}$，$\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_k^2}$，…，$\frac{\partial^n\varphi}{\partial q_k^n}$也是该方程组的积分。

7-42 在具有n个自由度的哈密顿方程组中坐标q_1是循环坐标。试证方程组的$2n$个独立的第一积分可表成$w_1=q_1-F_1(q_j, p_s, t)$，$w_i=F_i(q_j, p_s, t)$ $(i=2, 3, \cdots,$

$2n$; $s=1, 2, \cdots, n$; $j=2, \cdots, n$)，其中函数 $F_k(q_j, p_s, t)$ ($k=1, 2, \cdots, 2n$)不依赖于循环坐标 q_1。

7-43 试证对哈密顿函数为

$$H=H[f(q_1, q_2, \cdots, q_m, p_1, p_2, \cdots, p_m), q_{m+1}, \cdots, q_n, p_{m+1}, \cdots, p_n, t]$$

的方程组来说函数 $f(q_1, q_2, \cdots, q_m, p_1, p_2, \cdots, p_m)$ 是第一积分。

7-44 试证对哈密顿函数为

$$H=H[\varphi_1(q_1, p_1), \cdots, \varphi_n(q_n, p_n), t]$$

的方程组来说，函数 $\varphi_s(q_s, p_s)$ ($s=1, 2, \cdots, n$)是第一积分。

7-45 试证对哈密顿函数为

$$H=f(t)\frac{\sum_{s=1}^{n}\gamma_s\varphi_s(q_s, p_s)}{\sum_{s=1}^{n}\delta_s\varphi_s(q_s p_s)}$$

(其中 γ_s 和 δ_s 是常量)的方程组来说，函数 $\varphi_s(q_s, p_s)$ 是第一积分。

7-46 给定两个函数 $w(q_s, p_s, t)$ 和 $\varphi(q_s, p_s, t)$，两者满足关系

$$\frac{\partial w}{\partial t}+(w, H)\equiv\frac{\partial \varphi}{\partial t}+(\varphi, H)$$

试利用函数 $w(q_s, p_s, t)$ 和 $\varphi(q_s, p_s, t)$ 构造哈密顿函数为 $H(q_s, p_s, t)$ 的正则方程的第一积分。

答： $w(q_s, p_s, t)-\varphi(q_s, p_s, t)$

7-47 函数 $w(q_s, p_s, t)$ 满足关系

$$\frac{\partial w}{\partial t}+(w,\ H)\equiv f(t)$$

试利用函数$w(q_s,\ p_s,\ t)$和$f(t)$构造哈密顿函数为$H(q_s,\ p_s,\ t)$的正则方程的第一积分。

提示：利用布洼松条件(7-7)解习题7-41～7-47。

答：$w(q_s,\ p_s,\ t)-\int f(t)\,\mathrm{d}t$

7-48 已知力学系统的哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2}\left(p_1^2+\frac{p_2^2}{\cos^2 q_1}\right)+\sin q_1$$

试建立该系统的哈密顿-雅科比方程，并求其全积分。

答：全积分有

$$S=-\alpha_1 t+\alpha_2 q_2+\int\sqrt{2\alpha_1-2\sin q_1-\frac{\alpha_2^2}{\cos^2 q_1}}\,\mathrm{d}q_1$$

7-49 已知某二自由度系统的哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+q_1^2\cos q_1)\,q_2^2+\frac{1}{2}p_2^2\cos q_2$$

试建立系统的哈密顿-雅科比方程，并求其全积分。

答：全积分为

$$S=-\alpha_2 t+\int\sqrt{\alpha_1^2-q_1^2\cos q_1}\,\mathrm{d}q_1+\int\sqrt{\frac{2\alpha_2-\alpha_1 q_2^2}{\cos q_2}}\,\mathrm{d}q_2$$

7-50 已知某三自由度系统的哈密顿函数为

$$H=p_1^2+\sin q_1+\frac{(p_2+p_3\cos q_2)^2}{q_2^2}$$

试建立系统的哈密顿-雅科比方程，并求其全积分。

答：全积分为

$$S=-(\alpha_1+\alpha_2^2)t+\int\sqrt{\alpha_1-\sin q_1}\,\mathrm{d}q_1+\frac{1}{2}\alpha_2 q_2^2$$

$$+\alpha_3 q_3-\alpha_3\sin q_2$$

7-51 已知某三自由度系统的哈密顿函数为

$$H=p_1^2+q_1^2+\frac{p_2^2+p_3^2}{q_2^2+q_3^2}$$

试建立系统的哈密顿-雅科比方程，并求其全积分。

答：全积分为

$$S=-ht+\frac{1}{2}\left[q_1\sqrt{h-c_1^2-q_1^2}+(h-c_1^2)\arcsin\frac{q_1}{\sqrt{h+c_1^2}}\right]+\frac{1}{2}c_1\left[q_2\sqrt{q_2^2+\frac{c_2}{c_1^2}}+\frac{c_2}{c_1^2}\operatorname{arsh}\frac{q_2c_1}{\sqrt{c_2}}+q_3\sqrt{q_3^2-\frac{c_2}{c_1^2}}-\frac{c_2}{c_1^2}\operatorname{arch}\frac{q_3c_1}{\sqrt{c_2}}\right]$$

其中h，c_1，c_2为任意常数。

7-52 已知某力学系统的哈密顿函数为

$$H=\frac{p_1^2}{q_1^2}+\frac{1}{q_1^2}\left(\frac{p_2^2}{q_2^2}+\frac{p_3^2}{q_2^2q_3^2}\right)$$

试建立此系统的哈密顿-雅科比方程，并求其全积分。

答：$$S=-ht+\frac{\sqrt{h}}{2}\left[q_1\sqrt{q_1^2-\frac{a_2}{h}}-\frac{a_2}{h}\operatorname{arch}\frac{q_1\sqrt{h}}{\sqrt{a_2}}\right]+\frac{\sqrt{a_2}}{2}\left[q_2\sqrt{q_2^2-\frac{a_3}{a_2}}-\frac{a_3}{a_2}\operatorname{arch}\frac{q_2\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_3}}\right]+\frac{1}{2}\sqrt{a_3}\,q_3^2$$

其中h，a_2，a_3为任意常数。

7-53　已知力学系统的哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2}\left[\frac{p_1^2+p_2^2}{q_1-q_2}+\left(p_3^2+\frac{1}{q_3^2}\right)(q_1+q_2)\right]$$

试建立此系统的哈密顿-雅科比方程，并求其全积分。

答：$S=-ht+\int\sqrt{2hq_1-\alpha_3q_1^2-\alpha_2}\,\mathrm{d}q_1$

$$+\int\sqrt{\alpha_2-2hq_2+\alpha_3q_2^2}\,\mathrm{d}q_2+\int\sqrt{\alpha_3-\frac{1}{q_3^2}}\,\mathrm{d}q_3$$

其中h，α_1，α_2为任意常数。

7-54　已知某二自由度系统的哈密顿函数为

$$H=\frac{p_1^2+\sin^2q_1+p_2^2+\cos^2q_2}{p_1^2-\sin^2q_1+p_2^2-\cos^2q_2}$$

试建立问题的哈密顿-雅科比方程，并求其全积分。

答：$S=-ht+\int\sqrt{\frac{\alpha_1-(1+h)\sin^2q_1}{1-h}}\,\mathrm{d}q_1$

$$+\int\sqrt{\frac{-\alpha_1-(1+h)\cos^2q_2}{1-h}}\,\mathrm{d}q_2$$

其中h，α_1为任意常数。

7-55　已知力学系统的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2+\frac{q_1^2}{q_2^2}\dot{q}_2^2\right)$$

试建立此系统的哈密顿-雅科比方程，并求其全积分。

答：$S=-ht+\sqrt{\alpha_1}\ln q_2+\int\frac{\sqrt{2hq_1^2-\alpha_1}}{q_1}\mathrm{d}q_1$

其中h，α_1为任意常数。

7-56　已知某二自由度系统的拉格朗日函数为

$$L=\frac{\dot{q}_1^2}{4q_2^2}+\frac{\dot{q}_2^2}{4q_1^2}-3q_1^2q_2^2+f(q_2)$$

其中 f 是任意连续函数，试建立此系统的哈密顿-雅科比方程，并求其全积分。

答：$S=-ht+\int\sqrt{\alpha_2-3q_1^2}\,\mathrm{d}q_1+\int\sqrt{h+f_2(q_2)-\alpha_2q_2^2}\times\frac{\mathrm{d}q_2}{q_2}$

7-57　某力学系统的拉格朗日函数在球坐标中为

$$L=\frac{1}{2}m[\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta]-af_1(\theta)\dot{\varphi}$$

$$-bf_2(\theta)\dot{\theta}-\frac{\beta}{r^2}f_3(\theta)-f_4(r)$$

其中a，b，β为常数，f_1，f_2，f_3，f_4是任意连续函数。试建立系统的哈密顿-雅科比方程，并求该方程的全积分。

答：$S=-ht+\alpha_\varphi\varphi+$

$$\int\left[\sqrt{2m[\alpha_\theta-\beta f_3(\theta)]-\frac{[\alpha_\varphi+af_1(\theta)]^2}{\sin^2\theta}}\right.$$

$$\left.-bf_2(\theta)\right]\mathrm{d}\theta++\int\sqrt{2m\left[h-f_4(r)-\frac{\alpha_\theta}{r^2}\right]}\,\mathrm{d}r$$

其中h，α_φ，α_θ为任意常数。

7-58　某系统的哈密顿函数为

$$H=\frac{p^2}{2m}e^{-\frac{q}{a}}$$

其中a为常数。试建立系统的哈密顿-雅科比方程并求解，证明H为常数。

答：哈密顿-雅科比方程为

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial s}{\partial q}\right)^2 e^{-\frac{q}{a}}=0$$

其全积分为

$$S=-ht+2a\sqrt{2mh}\,e^{\frac{q}{2a}}$$

解为

$$p=\sqrt{2mh}\,e^{\frac{q}{2a}},\quad q=2a\ln\frac{\sqrt{h}\,(t+\beta)}{\sqrt{2m}\,a}$$

哈密顿函数为$H=h$。

7-59 试用哈密顿-雅科比方程求抛射体在真空中运动的轨道方程。

答：$x=\beta_x+\dfrac{a_x}{m}t$，$y=\beta_y+\dfrac{a_y}{m}t$

$$z=\frac{a_z}{mg}-\frac{g}{2}(\beta_z+t)^2$$

7-60 试用哈密顿-雅科比方程求质量为m、长度为l的数学摆的运动规律(用积分形式)。

答：$\beta+t=l\sqrt{\dfrac{m}{2}}\displaystyle\int\frac{d\varphi}{\sqrt{h+mgl\cos\varphi}}$，

$$q=l\sqrt{2m(h+mgl\cos\varphi)}$$

其中h，β为积分常数，φ为摆与铅垂线夹角。

7-61 两个质量为m和M的质点被一条不可伸长的软线连接。质点m在光滑的水平桌面上运动，而质点M位于从桌面上小孔穿过的线的悬挂端上。假设质点M只能做铅垂运动，求系统的哈密顿-雅科比方程的全积分。

答：取质点m的极坐标r，θ为广义坐标，全积分为

$$S=-ht+\alpha\theta+\int\sqrt{2(M+m)\left[h-\frac{\alpha^2}{2mr^2}-Mgr\right]}\,dr$$

其中 h，α 为常数。

7-62　试建立质量为m、长度为$2l$ 的均质杆在均匀重力场中的哈密顿–雅科比方程并求其全积分。

答：取杆质心坐标x，y，z及欧拉角ψ，θ为广义坐标，哈密顿–雅科比方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$+\frac{3}{2ml^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2+\frac{3}{2ml^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \psi}\right)^2+mgz=0$$

其全积分为

$$S=-ht+\alpha_x x+\alpha_y y+\alpha_\psi\psi+\int\sqrt{\frac{2}{3}ml^2\alpha_\theta^2-\frac{\partial_\psi^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta$$

$$-\frac{1}{3m^2g}(2mh-2m\alpha_\theta^2-\alpha_x^2-\alpha_y^2-2m^2gz)^{\frac{3}{2}}$$

其中α_x，α_y，α_θ，α_ψ，h为积分常数。

7-63　质量为m、长度为l 的均质杆在光滑铅垂平面内运动。平面以匀角速度ω绕固定铅垂轴转动。试用哈密顿–雅科比方法求杆的相对运动。

答：取杆质心的相对坐标ξ，η及杆与水平轴夹角θ为广义坐标，则哈密顿–雅科比方程的全积分为

$$S=-ht+\int\sqrt{2m\left(h-\alpha_\xi+\frac{1}{2}m\omega^2\xi^2\right)}\,d\xi+\int\sqrt{2m(\alpha_\theta+}$$

$$\sqrt{+\alpha_\eta-mg\eta)}\,d\eta+\int\sqrt{\frac{m^2l^2}{144}\omega^2\cos^2\theta-\frac{ml^2}{6}\alpha_\theta}\,d\theta$$

其中h，α_ξ，α_η，α_θ为常数。

7-64 具有固定点的对称刚体做惯性运动(欧拉情形)，试用哈密顿-雅科比方法求刚体运动规律(用积分形式)。

答：取欧拉角ψ，θ，φ为广义坐标，哈密顿-雅科比方程的全积分为

$$S=-ht+\alpha_\psi\psi+\alpha_\varphi\varphi+$$

$$+\int\sqrt{2Ah-\frac{A}{c}\alpha_\varphi^2-\frac{1}{\sin^2\theta}(\alpha_\psi-\alpha_\varphi\cos\theta)^2}\,d\theta$$

由此可以求刚体运动规律。

7-65 已知某力学系统的哈密顿-雅科比方程的全积分为

$$S=-\alpha_n\int f(t)\,dt+\int\sqrt{\frac{-\sum_{s=1}^{n-1}\alpha_s}{f_n(q_n)-\alpha_n\psi_n(q_n)}}\,dq_n$$

$$+\sum_{s=1}^{n-1}\sqrt{\frac{\alpha_s}{f_s(q_s)-\alpha_n\psi_s(q_s)}}\,dq_s$$

试求该系统的哈密顿函数H。

答：$$H=f(t)\frac{\sum_{s=1}^{n}p_s^2f_s(q_s)}{\sum_{s=1}^{n}p_s^2\psi_s(q_s)}$$

7-66 已知力学系统哈密顿-雅科比方程的全积分为

$$S=-\alpha_n\int f(t)\,dt+\int\sqrt{-\sum_{s=1}^{n-1}\alpha_s-f_n(q_n)+\alpha_n\psi_n(q_n)}\,dq_n$$

$$+\sum_{s=1}^{n-1}\int\sqrt{\alpha_s-f_s(q_s)+\alpha_n\psi_s(q_s)}\,\mathrm{d}q_s$$

试求系统的哈密顿函数H。

答：
$$H=f(t)\frac{\sum_{s=1}^{n}[p_s^2+f_s(q_s)]}{\sum_{s=1}^{n}\psi_s(q_s)}$$

7-67　已知某系统哈密顿-雅科比方程的全积分为

$$S=-\alpha_1\int f(t)\,\mathrm{d}t+\int\sqrt{\alpha_n f_n(q_n)}\,\mathrm{d}q_n$$

$$+\sum_{s=1}^{n-1}\int\sqrt{\alpha_s f_s(q_s)-\alpha_{s+1}\psi_s(q_s)}\,\mathrm{d}q_s$$

试求此系统的哈密顿函数H。

答：
$$H=f(t)\sum_{s=1}^{n}\frac{p_s^2}{\psi_s(q_s)}\prod_{k=1}^{s}\frac{\psi_k(q_k)}{f_k(q_k)}$$

7-68　已知力学系统的哈密顿-雅科比方程的全积分为

$$S=-\alpha_1\int f(t)\,\mathrm{d}t+\int\sqrt{\alpha_n f_n(q_n)}\,\mathrm{d}q_n$$

$$+\sum_{s=1}^{n-1}\int\sqrt{\frac{\alpha_s}{\alpha_{s+1}}f_s(q_s)}\,\mathrm{d}q_s$$

试求该系统的哈密顿函数H。

答：$H=f(t)\prod_{s=1}^{n}\frac{p_s^2}{f_s(q_s)}$

7-69　已知某系统哈密顿-雅科比方程的全积分为

$$S=-\sum_{s=1}^{n} q_s f_s(t)+\sum_{s=1}^{n} \alpha_s q_s-\sum_{s=1}^{n}\int[f_s(t)-\alpha_s]^2\mathrm{d}t$$

试求该系统的哈密顿函数H。

答：
$$H=\sum_{s=1}^{n}\left(p_s^2+q_s\frac{\partial f_s(t)}{\partial t}\right)$$

7-70　已知力学系统哈密顿-雅科比方程的全积分为

$$S=-ht+\alpha_x x+\alpha_y y+\alpha_\psi \psi+\int\sqrt{\frac{2}{3}ml^2\alpha_\theta^2-\frac{\alpha_\psi^2}{\sin^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$

$$-\frac{1}{3m^2 g}(2mh-2m\alpha_\theta^2-\alpha_x^2-\alpha_y^2-2m^2 gz)^{\frac{3}{2}}$$

试求该系统的哈密顿函数H。

答：$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+\frac{3}{2ml^2}p_\theta^2+\frac{3}{2ml^2}$

$\cdot\frac{p_\psi^2}{\sin^2\theta}+mgz$

7-71　试证变换

$$Q=Pe^q,\ P=q+e^{-q}+\ln p$$

是正则变换，并求变换的母函数U。

答：
$$U=p[e^q(1-q-\ln p)-1]$$

7-72　试证变换

$$Q=\frac{1}{2}(q^2+p^2),\ p=-\mathrm{tg}^{-1}\frac{q}{p}$$

是正则的。

7-73　试证变换

$$Q=\sqrt{2q}\,e^t\cos p,\ P=\sqrt{2q}\,e^{-t}\sin p$$

是正则的，并求母函数U。

答：$U=qp-q\sin p\cos p$

7-74 如利用下列关系把变量 q，p 变换为 Q，P：$q=\varphi_1(Q, P)$，$p=\varphi_2(Q, P)$，则当$\frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)}=1$时，这种变换是一正则变换。

7-75 试证变换

$$Q=p^2+q, \quad P=p+t$$

是正则变换，并求母函数U。

答：$$U=-qt-\frac{2}{3}p^3-p^2t+g(t)$$

其中$g(t)$为任意函数。

7-76 试证变换

$$Q=q^2+\frac{p^2}{n^2}, \qquad P=\frac{n}{2}\mathrm{tg}^{-1}\frac{p}{nq}$$

(其中n为常数)是正则的。

7-77 试证变换

$$Q=q+te^p, \quad P=p$$

是一正则变换，并求母函数U。

答：$$U=te^p$$

7-78 试证变换

$$Q_1=p_1^2, \quad P_1=-\frac{1}{2}\left(\frac{q_1}{p_1}\right)+t$$

$$Q_2=p_2^2+q_2, \quad P_2=p_2+t$$

是一正则变换。

7-79 试证变换

$$Q=\ln(1+\sqrt{q}\cos p), \quad P=2(1+\sqrt{q}\cos p)\sqrt{q}\sin p$$

是一正则变换。

7-80 试证变换

$$Q_1=q_1q_2,\quad Q_2=\frac{1}{2}(q_1^2-q_2^2)$$

$$P_1=\frac{q_2p_1+q_1p_2}{q_1^2+q_2^2},\quad P_2=\frac{q_1p_1-q_2p_2}{q_1^2+q_2^2}$$

是正则的。

7-81 已知正则变换

$$Q_1=\frac{1}{2}[\ln(p_1+9q_2)-q_1],\quad P_1=-2(p_1+2q_1)$$

$$Q_2=\frac{1}{2}[\ln(p_2+9q_1)-3q_2],\quad P_2=-\frac{2}{3}(p_2+9q_2)$$

试求第一类变换的母函数$U_1(q,\ Q,\ t)$。

答：$U_1=e^{2Q_1+q_1}-9q_1q_2+\frac{1}{3}e^{2Q_2+3q_2}$

7-82 已知正则变换

$$Q_s=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{p_s}}\right)-q_s,P_s=-p_s\quad(s=1,2,\cdots,n)$$

试求第一类变换的母函数$U_1(q,\ Q,\ t)$。

答：$$U_1=\sum_{s=1}^{n}\operatorname{tg}(Q_s+q_s)$$

7-83 已知正则变换

$$Q_s=\ln p_s-q_s,\ P_s=-p_s\qquad(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

试求第一类变换的母函数$U_1(q,\ Q,\ t)$。

答：$$U_1=\sum_{s=1}^{n}e(Q_s+q_s)$$

7-84 试证变换

$$Q_1=\ln\frac{p_1+4q_2}{4}-2q_1, \qquad P_1=-\frac{1}{2}(p_1+4q_2)$$

$$Q_2=\frac{1}{2}\ln\frac{4q_1+p_2}{4}-\frac{1}{2}q_2, \quad P_2=-2(p_2+4q_1)$$

是一正则变换，并求出第一类变换的母函数$U_1(q, Q, t)$。

答：　　$U_1=-4q_1q_2+2e^{Q_1+2q_1}+4e^{2Q_2+q_2}$

7-85 对某一正则变换，已知

$$Q=\sqrt{q^2+p^2}, \qquad U=\frac{1}{2}(q^2+p^2)\operatorname{tg}^{-1}\frac{q}{p}+\frac{1}{2}qp$$

试求$P(q, p)$以及第一类变换的母函数$U_1(q, Q)$。

答：$P=-\sqrt{q^2+p^2}\operatorname{tg}^{-1}\frac{q}{p}$.

$$U_1=\frac{1}{2}Q^2\sin^{-1}\frac{q}{Q}+\frac{1}{2}q\sqrt{Q^2-q^2}$$

7-86 已知第一类变换的母函数

$$U_1=\sum_{s=1}^{n}\varphi_s(t)q_s^{\alpha}Q_s^{\beta}$$

试求正则变换公式。

答：　$Q_s=\left(\frac{1}{\alpha\varphi_s(t)}p_sq_s^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}$

$$P_s=-\beta\left[\varphi_s(t)\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\beta-1}p_s^{\beta-1}q_s^{\alpha+\beta-1}\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

$(s=1, 2, \cdots, n)$

7-87 已知第一类变换的母函数

$$U_1=\sum_{s=1}^{n}\cos(Q_s t+q_s)$$

试求正则变换公式。

答：$Q_s=-\frac{1}{t}(\sin^{-1}p_s+q_s)$

$P_s=-p_s t \quad (s=1,2,\cdots,n)$

7-88　已知第一类变换的母函数

$$U_1=\sum_{s=1}^{n}Q_s^{\alpha}[\ln(q_s t)-t]$$

试求正则变换的公式。

答：$Q_s=(p_s q_s)^{\frac{1}{\alpha}}$

$P_s=-\alpha[\ln(q_s t)-t](p_s q_s)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}},(s=1,2,\cdots n)$

7-89　已知第一类变换的母函数为

$$U_1=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}q_s Q_k$$

试求正则变换公式。

答：$Q_s=\sum_{k=1}^{n}\rho_{sk}p_k$，　$P_s=-\sum_{s=1}^{n}a_{ks}q_k$

$(s=1,2\cdots,n)$

其中ρ_{sk}为矩阵$\|a_{sk}\|$的逆矩阵的元素。

7-90　已知第一类变换的母函数为

$$U_1=-4q_1q_2+2e^{Q_1+2q_1}+4e^{2Q_2+q_2}$$

试求正则变换公式。

答：$Q_1=\ln\frac{p_1+4q_2}{4}-2q_1$，　$P_1=-\frac{1}{2}(p_1+4q_2)$

$$Q_2=\frac{1}{2}\ln\frac{p_2+4q_1}{4}-\frac{1}{2}q_2,\quad P_2=-2(p_2+4q_1)$$

7-91 已知正则变换

$$Q_s=p_s^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}q_s^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}},\ P_s=p_s^{\frac{1}{\alpha}}q_s^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

$$(s=1,2,\cdots,n)$$

试求第二类变换的母函数$F_2(q,P)$

答： $F_2=\frac{1}{\alpha}\sum_{s=1}^{n}q_s^{\alpha}P_s^{\alpha}$

7-92 已知正则变换

$Q_s=\ln(-p_sq_s^2)$，$P_s=q_sp_s$ $(s=1,2,\cdots,n)$

试求第二类变换的母函数$F_2(q,P)$。

答： $F_2=-\sum_{s=1}^{n}P_s+\sum_{s=1}^{n}P_s\ln(-q_sP_s)$

7-93 已知正则变换

$Q_s=\ln q_s$，$P_s=p_sq_s$ $(s=1,2,\cdots,n)$

试求第二类变换的母函数$F_2(q,p)$。

答： $F_2=\sum_{s=1}^{n}p_s\ln q_s$

7-94 已知第二类变换母函数

$$F_2=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}(t)q_s^{\alpha}P_k^{\beta}$$

试求正则变换公式。

答：$Q_s=\beta\sum_{k=1}^{n}a_{ks}(t)\,q_k^{\alpha}\left[\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}b_{sm}(t)p_mq_m^{1-\alpha}\right]^{1-\frac{k}{\beta}}$

$$P_s=\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}b_{sk}(t)p_k q_k^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{\beta}} \quad (s=1,2,\cdots,n)$$

其中b_{sk}是矩阵$\|a_{ks}\|$的逆矩阵元素。

7-95 已知第二类变换的母函数为

$$F_2=\sum_{s=1}^{n}[a_s(t)q_s+b_{s+1}(t)P_{s+1}]^l$$

其中$P_{n+1}=P_1$，$b_{n+1}=b_1$，试求正则变换的公式。

答：$Q_{s+1}=\dfrac{b_{s+1}(t)}{a_s(t)}p_s$，$P_{s+1}=\dfrac{1}{b_{s+1}(t)}\left\{\left[\dfrac{p_s}{la_s(t)}\right]^{\frac{1}{l-1}}\right.$

$$\left.-a_s(t)q_s\right\}$$

7-96 已知第二类变换的母函数为

$$F_2=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\ln(q_s t)e^{a_k(t)p_k}$$

试求正则变换公式。

$$答：Q_s=a_s(t)\sum_{k=1}^{n}a_{ks}\ln(q_k t)\sum_{m=1}^{n}b_{sm}q_m p_m$$

$$P_s=\frac{1}{a_s(t)}\ln\left(\sum_{m=1}^{n}b_{sm}q_m p_m\right)$$

其中b_{sm}是矩阵$\|a_{ms}\|$的逆矩阵元素。

7-97 已知第二类变换的母函数为

$$F_2=\sum_{s=1}^{n} q_s \ln P_s$$

试求正则变换公式。

答：$Q_s=q_s e^{-p_s}$，$P_s=e^{p_s}$

7-98 试证变换

$$Q_s=p_s+e^{-q_s},\quad p_s=-q_s \quad (s=1,\ 2,\ \cdots n)$$

是正则变换，并求第三类变换的母函数$F_3(P,\ Q)$。

答：$F_3=\sum_{s=1}^{n}(Q_s-p_s)[1-\ln(Q_s-p_s)]$

7-99 试证变换

$$Q_s=e^{-\frac{q_s}{a_s p_s^{a-1}}},\quad P_s=-p_s^{a_s} e^{\frac{q_s}{a_s p_s^{a-1}}}$$

$$(s=1,\ 2,\ \cdots n)$$

是正则的，并求第三类变换的母函数$F_3(p,\ Q)$。

答：$F_3=\sum_{s=1}^{n} p_s^{a_s} \ln Q_s$

7-100 已知第三类变换的母函数为

$$F_3=\sum_{s=1}^{n}(Q_s-p_s)[1-\ln(Q_s-p_s)],$$

试求正则变换公式。

答：$Q_s=p_s+e^{-q_s}$，$P_s=-q_s$ $(s=1,\ 2,\ \cdots n)$

7-101 已知第三类变换的母函数为

$$F_3=\sum_{s=1}^{n} p_s^{a_s} \ln Q_s$$

答：$Q_s = e^{-\frac{q_s}{\alpha_s p_s^{\alpha-1}}}$，$P_s = -p_s^{\alpha_s} e^{\frac{q_s}{\alpha_s p_s^{\alpha-1}}}$
$(s=1, 2, \cdots, n)$

7-102 试证变换

$$Q_s = -q_s^{1-\alpha_s} p_s^{2-\alpha_s}, \quad P_s = q\alpha_s p_s^{\alpha_s - 1} (s=1, 2, \cdots n)$$

是正则变换，并求第四类变换的母函数$F_4(p, P)$。

$$答：F_4 = -\sum_{s=1}^{n} \alpha_s (p_s P_s)^{\frac{1}{\alpha_s}}$$

7-103 试证变换

$$Q_s = -p_s e^{-q_s}, \quad P_s = e^{q_s} \quad (s=1, 2, \cdots n)$$

是正则的，并求第四类变换的母函数$F_4(p, P)$。

$$答：F_4 = -\sum_{s=1}^{n} p_s \ln P_s$$

7-104 试证变换

$$Q_s = -\frac{1}{2} p_s \sin 2q_s, \quad P_s = \ln \operatorname{tg} q_s \quad (s=1, 2, \cdots, n)$$

是正则的，并求第四类变换的母函数$F_4(p, P)$。

$$答：F_4 = -\sum_{s=1}^{n} p_s \operatorname{tg}^{-1} e^{p_s}$$

7-105 试证变换

$$Q_s = q_s, \quad P_s = p_s + e^{-q_s - 1} \quad (s=1, 2, \cdots n,)$$

是正则变换，并求第四类变换的母函数$F_4(p, P)$。

$$答：F_4 = -\sum_{s=1}^{n} (P_s - p_s) \ln (P_s - p_s)$$

7-106 已知第四类变换的母函数为

$$F_4=-\sum_{s=1}^{n}a_s(p_sP_s)^{\frac{1}{a_s}}$$

试求正则变换公式。

答： $Q_s=-q_s^{1-a_s}p_s^{2-a_2}$，$P_s=q_s^{a_s}p_s^{a_s-1}$

$(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

7-107 已知第四类变换的母函数为

$$F_4=-\sum_{s=1}^{n}p_s\,\mathrm{tg}^{-1}e^{p_s}$$

试求正则变换公式。

答： $Q_s=-\frac{1}{2}p_s\sin 2q_s$，$P_s=\ln\mathrm{tg}\,q_s$

$(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

7-108 已知第四类变换的母函数为

$$F_4=-\sum_{s=1}^{n}(P_s-p_s)\ln(P_s-p_s)$$

试求正则变换公式。

答：$Q_s=q_s$，$P_s=p_s+e^{-q_s-1}$ $(s=1,2,\cdots,\ n)$

7-109 振子的哈密顿函数为

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2q^2$$

试证存在正则变换 $Q=Q(q,\ p)$，$P=P(q,p)$使新的哈密顿函数为

$$H^*=\frac{1}{2}(P^2+\omega^2Q^2)$$

7-110 某系统的哈密顿函数为

$$H=q+te^p$$

取正则变换

$$Q=q+te^{p},\ P=p$$

试求变量Q，P下的哈密顿函数H^{*}。

答：$H^{*}=Q+e^{P}$

7-111 已知系统的哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2}(q^{2}+p^{2})$$

采用正则变换

$$Q=\sqrt{2q}\,e^{t}\cos p,\ P=\sqrt{2q}\,e^{-t}\sin p$$

试求变量Q，P下的哈密顿函数H^{*}及新的正则方程。

$$答：H^{*}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}(Q^{2}e^{-2t}+P^{2}e^{2t})^{2}+\left[\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{P}{Q}e^{2t}\right)\right]^{2}\right\}+PQ$$

7-112 试证变换

$$q=(2Q)^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}}\cos P,\ p=(2Q)^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}\sin P$$

为一正则变换，并将正则方程

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p},\qquad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}$$

过渡到

$$\dot{Q}=\frac{\partial H^{*}}{\partial P},\qquad \dot{P}=-\frac{\partial H^{*}}{\partial Q}$$

式中$H=\frac{1}{2}(p^{2}+k^{2}q^{2})$，$H^{*}=kQ$。

7-113 变换

$$x_{1}=\rho\cos\varphi,\ x_{2}=\rho\sin\varphi,\ x_{3}=z$$

实现了由直角坐标向柱坐标的过渡，求广义动量的变换公式

$$p_{x_i}=p_{x_i}(\rho,\ \varphi,\ z,\ p_\rho,\ p_\varphi,\ p_z)$$
确定变换的正则性，并求母函数U。

答：$p_{x_1}=p_\rho\cos\varphi-\dfrac{p_\varphi}{\rho}\sin\varphi$，$p_{x_2}=p_\rho\sin\varphi+\dfrac{p_\varphi}{\rho}\cos\varphi$

$$p_{x_3}=p_z,\ U=0$$

7-114 变换

$$x_1=r\sin\theta\cos\varphi,\ x_2=r\sin\theta\sin\varphi,\ x_3=r\cos\theta$$

实现了由直角坐标向球坐标的过渡，求广义动量的变换公式

$$p_{x_i}=p_{x_i}(r,\ \theta,\ \varphi,\ p_r,\ p_\theta,\ p_\varphi)$$

确定变换的正则性，并求母函数U。

答：$p_{x_1}=p_r\sin\theta\cos\varphi+\dfrac{p_\theta}{r}\cos\theta\cos\varphi-\dfrac{p_\varphi}{r\sin\theta}\sin\varphi$

$p_{x_2}=p_r\sin\theta\sin\varphi+\dfrac{p_\theta}{r}\cos\theta\sin\varphi+\dfrac{p_\varphi}{r\sin\theta}\cos\varphi$

$p_{x_3}=p_r\cos\theta-\dfrac{p_\theta}{r}\sin\theta$

$U=0$

7-115 对拉格朗日函数为$L(x_i,\ \dot{x}_i,\ t)$的系统，作坐标变换

$$x_1=\sigma\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\cos\varphi,$$

$$x_2=\sigma\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\sin\varphi,\ x_3=\sigma\xi\eta(\sigma=\text{const}).$$

试确定广义动量变换式

$$p_{x_i}=p_{x_i}(\xi,\ \eta,\ \varphi,\ p_\xi,\ p_\eta,\ p_\varphi)$$

并证明变换是正则的。

答：$p_{x_1}=\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}{\xi^2-\eta^2}(\xi p_\xi-\eta p_\eta)\cos\varphi$

$$-\frac{p_\varphi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}\sin\varphi$$

$$p_{x_2}=\frac{1}{\sigma}\frac{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}{\xi^2-\eta^2}(\xi p_\xi-\eta p_\eta)\sin\varphi$$

$$+\frac{p_\varphi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}\cos\varphi$$

$$p_{x_3}=\frac{\eta(\xi^2-1)p_\xi+\xi(1-\eta^2)p_\eta}{\sigma(\xi^2-\eta^2)}$$

7-116 将变换$Q=q$，$P=p^3/6$用于具有下列哈密顿函数的正则方程组上：

(1) $H_1=\frac{p^2}{2}$，(2) $H_2=\frac{1}{2}(q^2+p^2)$，

(3) $H_3=qe^{pt}$，(4) $H_4=e^{pt}$。

试建立新变量中的运动方程，并说明所得出的方程组是否为正则方程组？

答：(1) $\dot{Q}=(6P)^{\frac{1}{3}}$，$\dot{P}=0$，$H^*=2^{-\frac{5}{3}}(3P)^{\frac{4}{3}}$；

(2) $\dot{Q}=(6P)^{\frac{1}{3}}$，$\dot{P}=-\frac{1}{2}(6P)^{\frac{2}{3}}Q$，非正则；

(3) $\dot{Q}=tQe^{t(6P)^{\frac{1}{3}}}$，$\dot{P}=-\frac{1}{2}(6P)^{\frac{2}{3}}e^{t(6P)^{\frac{1}{3}}}$，

非正则；

(4) $\dot{Q}=te^{t(6P)^{\frac{1}{3}}}$，$\dot{P}=0$．$H^*=t\int e^{t(6P)^{\frac{1}{3}}}dP$。

7-117 给定变换

$$Q=\frac{1}{2}p^2,\quad P=q$$

和两个哈密顿函数为$H_1=p$和$H_2=(p^2+q^2)/2$的正则方程

组。试证所给变换可将前一方程组变成正则方程组，而将后一方程组变成非正则方程组。

7-118　对哈密顿函数为

$$H=(p+q)^2 e^{2(p+q)^2}+2(p^2-q^2)e^{(q+q)^2}+2(p^2+q^2)$$

的方程加以变换

$$Q=p+q,\ P=2p(e^{(p+q)^2}+1)+2q(e^{(p+q)^2}-1)$$

试验证变换是正则变换，并求变换后的哈密顿函数H^*。

答：　$H^*=P^2+4Q^2$

7-119　对哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{n} q_s\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{1}{2q_s}}-p_s\right)$$

的方程组加以正则变换

$$Q_s=\frac{1}{t}\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{1}{2q_s}}-p_s\right),\ P_s=2q_s t$$

$$(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

求变换后的方程组的哈密顿函数H^*。

答：　$H^*=0$

7-120　试证由于变量$Q_s=q_s e^{-\beta t}$，$P_s=p_s e^{-\gamma t}$的替换，方程组

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s}+\beta q_s,\qquad \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}+\gamma p_s$$

将成为哈密顿方程组。求变换后方程组的哈密顿函数$H^*(Q_s,\ P_s,t)$。

答：$H^*(Q_s,\ P_s,\ t)=H(Q_s e^{\beta t},\ P_s e^{\gamma t},\ t)e^{-(\beta+\gamma)t}$

第八章　力学的变分原理

一、基本理论与公式

1．微分变分原理

（1）虚位移原理

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \qquad (8\text{-}1)$$

（2）达朗伯-拉格朗日原理

$$\sum_{i=1}^{N} (-m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i + \boldsymbol{F}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \qquad (8\text{-}2)$$

（3）茹尔当(Jourdain)原理

$$\sum_{i=1}^{N} (-m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i + \boldsymbol{F}_i) \cdot \delta \dot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \qquad (8\text{-}3)$$

或者写成

$$\delta' \sum_{i=1}^{N} (-m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i + \boldsymbol{F}_i) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \qquad (8\text{-}4)$$

（4）高斯(Gauss)原理

$$\sum_{i=1}^{N} (-m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i + \boldsymbol{F}_i) \cdot \delta \ddot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \qquad (8\text{-}5)$$

或者写成

$$\delta Z_w = 0 \qquad (8-6)$$

其中

$$Z_w = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{1}{2} (a_i^* - a_i)^2$$

为拘束，$a_i^* = F_i / m_i$表示质点M_i在主动力F_i作用下而不加约束时所具有的加速度，a_i表示质点M_i实际运动的加速度。

(5) 万有达朗伯原理

$$\sum_{i=1}^{N} (-m_i \ddot{r}_i + F_i) \cdot \overset{(k)}{\delta} r_i = 0 \quad (k=0, 1, 2, \cdots) \tag{8-7}$$

2. 积分变分原理

(1) 哈密顿最小作用量原理

1° 完整保守系统

$$\delta S = 0 \tag{8-8}$$

其中

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_s, \dot{q}_s, t) \mathrm{d}t$$

为哈密顿作用量，L为拉格朗日函数。

2° 完整非保守系统

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta' A) \mathrm{d}t = 0 \tag{8-9}$$

其中

$$\delta' A = \sum_{s=1}^{n} Q_s \delta q_s$$

为主动力的虚功之和，Q_s为对应于广义坐标q_s的广义力，T为系统的动能。

3° 非完整系统。一般形式

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\delta T+\delta' A+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_s-\delta \dot{q}_s\right)\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{8-10}$$

霍尔德(Hölder)形式

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta T+\delta' A)\mathrm{d}t=0 \tag{8-11}$$

苏斯洛夫(Суслов)形式

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\delta T+\delta' A+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_{\sigma}^{\varepsilon+\beta}\delta q_{\sigma}\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{8-12}$$

其中

$$T_{\sigma}^{\varepsilon+\beta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial \dot{q}_{\sigma}}-\frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial q_{\sigma}}-\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\gamma}}\frac{\partial \varphi_{\gamma}}{\partial \dot{q}_{\sigma}}$$

而约束方程为

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_{\beta}(q_s,\ \dot{q}_{\sigma},\ t)\qquad \begin{pmatrix}\beta=1,\ \cdots,\ g;\ \varepsilon=n-g;\\ \sigma=1,\ \cdots\varepsilon;\ s=1,\ \cdots,\ n\end{pmatrix}$$

(2) 拉格朗日最小作用量原理

$$\Delta A=0 \tag{8-13}$$

其中

$$A=\int_{t_1}^{t_2}2T\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N}m_i\,\dot{r}_i^2\,\mathrm{d}t$$

为拉格朗日作用量，Δ 为全变分记号。

二、范　　例

例8-1　试用万有达朗伯原理(8-7)推导Mangeron方程

$$\frac{1}{m}\left\{\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}-(m+1)\frac{\partial T}{\partial q_s}\right\}=Q_s$$

$$(s=1,\cdots n;\ m=1,2,\cdots)$$

[解]　在(8-7)中取$k=m$，我们有

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{r}_i \cdot \delta \overset{(m)}{r_i}=\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{r}_i \cdot \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \overset{(m)}{r_i}}{\partial \overset{(m)}{q_s}} \delta \overset{(m)}{q_s} \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \delta \overset{(m)}{r_i}=\sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \overset{(m)}{r_i}}{\partial \overset{(m)}{q_s}} \delta \overset{(m)}{q_s} \tag{2}$$

于是(8-7)成为

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial \overset{(m)}{r_i}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}+\sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \frac{\partial \overset{(m)}{r_i}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\right) \delta \overset{(m)}{q_s}=0 \tag{3}$$

由$\delta \overset{(m)}{q_s}$是彼此独立的，我们得到

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial \overset{(m)}{r_i}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}=\sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \frac{\partial \overset{(m)}{r_i}}{\partial \overset{(m)}{q_s}} \quad (s=1,\cdots,\ n) \tag{4}$$

将点的矢径r_i对时间t求m次导数，有

$$\overset{(m)}{r}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial r_i}{\partial q_s}\overset{(m)}{q}_s+m\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 r_i}{\partial q_s\partial q_k}\overset{(m-1)}{q}_s\dot{q}_k\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 r_i}{\partial q_s\partial t}\overset{(m-1)}{q}_s\right)+\cdots \tag{5}$$

其中未写出之项不含 $\overset{(m)}{q}_s$，$\overset{(m-1)}{q}_s$。由(5)得

$$\frac{\partial \overset{(m)}{r}_i}{\partial \overset{(m)}{q}_s}=\frac{\partial r_i}{\partial q_s} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \overset{(m)}{r}_i}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s}=m\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_s} \tag{7}$$

将T对t求m次导数，有

$$\overset{(m)}{T}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{r}_i\cdot\overset{(m+1)}{r}_i+m\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{r}_i\cdot\overset{(m)}{r}_i+\cdots \tag{8}$$

于是

$$\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{r}_i\cdot\frac{\partial \overset{(m+1)}{r}_i}{\partial \overset{(m)}{q}_s}+m\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{r}_i\cdot\frac{\partial \overset{(m)}{r}_i}{\partial \overset{(m)}{q}_s} \tag{9}$$

将(7)代入(9)，并注意到

$$\frac{\partial T}{\partial q_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{r}_i\cdot\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_s}$$

则有

$$\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}=(m+1)\frac{\partial T}{\partial q_s}+m\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{r}_i\cdot\frac{\partial \overset{(m)}{r_i}}{\partial \overset{(m)}{q_s}} \tag{10}$$

最后，将(10)和(6)代入(4)，便得

$$\frac{1}{m}\left\{\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}-(m+1)\frac{\partial T}{\partial q_s}\right\}=Q_s \quad (s=1,\cdots,n) \tag{11}$$

其中

$$Q_s=\sum_{i=1}^{N}F_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_s}$$

例8-2 质点的动能$T=m\dot{q}^2/2$，势能$V=cq^2/2$(m，c为常数，$m>0$；$c>0$)，试建立哈密顿作用量S的表达式，并利用运动微分方程$\ddot{q}+\omega^2q=0$($\omega^2=c/m$)来证明$\delta S=0$。

[解] 质点的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}cq^2=\frac{1}{2}m(\dot{q}^2-\omega^2q^2) \tag{1}$$

哈密顿作用量为

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t=\frac{1}{2}m\int_{t_1}^{t_2}(\dot{q}^2-\omega^2q^2)\mathrm{d}t \tag{2}$$

于是

$$\delta S=m\int_{t_1}^{t_2}(\dot{q}\delta\dot{q}-\omega^2q\delta q)\mathrm{d}t \tag{3}$$

因 $\delta\dot{q}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q$，故

$$\dot{q}\delta\dot{q}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{q}\delta q)-\ddot{q}\delta q \tag{4}$$

将(4)代入(3)，得

$$\delta S = m\left\{\dot{q}\delta q \left|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} (\ddot{q}+\omega^2 q)\delta q \mathrm{d}t\right.\right\}$$

考虑到端点条件

$$\delta q|_{t_1} = \delta q|_{t_2} = 0$$

于是有

$$\delta S = -m\int_{t_1}^{t_2}(\ddot{q}+\omega^2 q)\delta q \mathrm{d}t \tag{5}$$

将方程 $\ddot{q}+\omega^2 q=0$ 代入(5)，便得 $\delta S=0$。

例8-3 一粗糙圆柱体质量为 m，半径为 r，在一空心圆柱体内表面上无滑动地滚动。这空心圆柱的质量是 M，半径是 R，能绕本身水平轴 O 转动。两圆柱对其自身轴的转动惯量分别为 MR^2 及 $mr^2/2$。试用哈密顿原理写出系统的运动方程。

[**解**] 系统有两个自由度，取空心圆柱转角 θ 和两柱心联线的转角 φ 为广义坐标。设小圆柱滚动角速度为 ω。两圆柱接触点 D 的速度

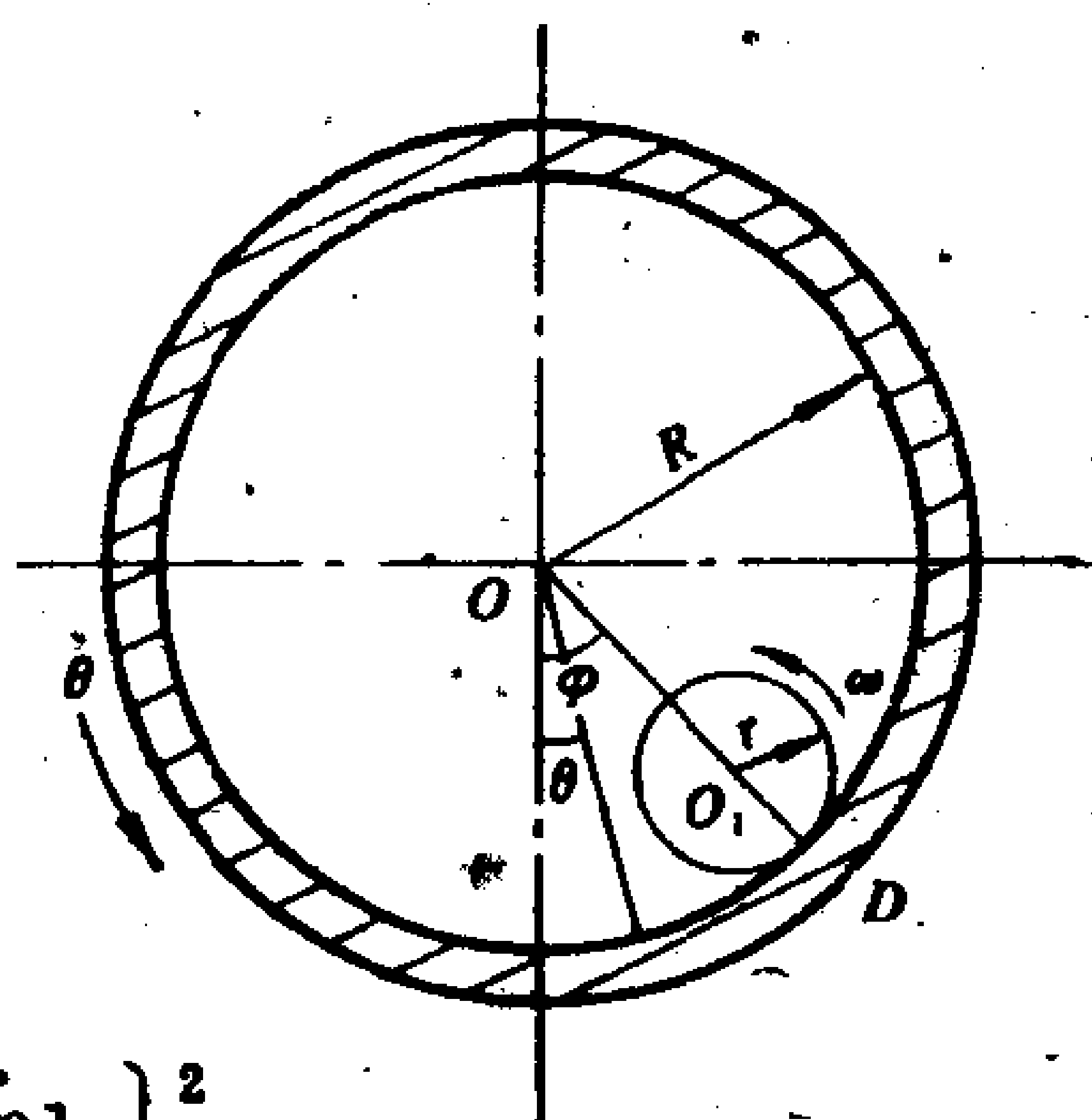
$$V_D = R\dot{\theta} = r\omega + (R-r)\dot{\varphi}$$

由此得

$$\omega = \frac{1}{r}[R\dot{\theta} - (R-r)\dot{\varphi}]$$

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}mr^2\left\{\frac{1}{r}[R\dot{\theta} - (R-r)\dot{\varphi}]\right\}^2$$



例8-3图

系统的势能为

$$V = -mg(R-r)\cos\varphi$$

拉格朗日函数为

$$
\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\varphi}^2 \\
&\quad + \frac{1}{4} m [R\dot{\theta} - (R-r)\dot{\varphi}]^2 + mg(R-r)\cos\varphi
\end{aligned}
\tag{1}
$$

哈密顿原理为

$$
\begin{aligned}
0 = \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ M R^2 \dot{\theta} \delta \dot{\theta} + m (R-r)^2 \dot{\varphi} \delta \dot{\varphi} + \frac{1}{2} m [R\dot{\theta} \\
&\quad - (R-r)\dot{\varphi}][R\delta\dot{\theta} - (R-r)\delta\dot{\varphi}] \\
&\quad - mg(R-r)\sin\varphi \delta\varphi \Big\} \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \Big(M + \frac{1}{2} m\Big) R^2 \dot{\theta} \delta \dot{\theta} + \frac{3}{2} m (R-r)^2 \dot{\varphi} \delta \dot{\varphi} \\
&\quad - \frac{1}{2} m R (R-r) (\dot{\theta} \delta \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \delta \dot{\theta}) - mg(R-r)\sin\varphi \delta\varphi \Big\} \mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{2}
$$

又

$$
\dot{\theta}\delta\dot{\theta} = \dot{\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\theta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\theta}\delta\theta) - \ddot{\theta}\delta\theta
$$

$$
\dot{\theta}\delta\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\theta}\delta\varphi) - \ddot{\theta}\delta\varphi
$$

$$
\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\varphi}\delta\varphi) - \ddot{\varphi}\delta\varphi
$$

$$
\dot{\varphi}\delta\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\varphi}\delta\theta) - \ddot{\varphi}\delta\theta
$$

将以上诸式代入(2)中，得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left[\frac{1}{2}mR(R-r)\ddot{\varphi}-\left(M+\frac{1}{2}m\right)R^2\ddot{\theta}\right]\delta\theta\right.$$

$$+\left[\frac{1}{2}mR(R-r)\ddot{\theta}-\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\varphi}\right.$$

$$\left.\left.-mg(R-r)\sin\varphi\right]\delta\varphi\right\}\mathrm{d}t+\left(M+\frac{1}{2}m\right)R^2\dot{\theta}\delta\theta\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$+\frac{3}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi}\delta\varphi\Big|_{t_1}^{t_2}-\frac{1}{2}mR(R-r)\dot{\theta}\delta\varphi\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$-\frac{1}{2}mR(R-r)\dot{\varphi}\delta\theta\Big|_{t_1}^{t_2}=0 \qquad (3)$$

因

$$\delta\theta|_{t_1}=\delta\theta|_{t_2}=0,\ \delta\varphi|_{t_1}=\delta\varphi|_{t_2}=0$$

于是(3)成为

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left[\frac{1}{2}mR(R-r)\ddot{\varphi}-\left(M+\frac{1}{2}m\right)R^2\ddot{\varphi}\right]\delta\theta\right.$$

$$+\left[\frac{1}{2}mR(R-r)\ddot{\theta}-\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\varphi}\right.$$

$$\left.\left.-mg(R-r)\sin\varphi\right]\delta\varphi\right\}\mathrm{d}t=0 \qquad (4)$$

因$(t_1,\ t_2)$是任意的，故(4)中被积函数为零，即

$$\left[\frac{1}{2}mR(R-r)\ddot{\varphi}-\left(M+\frac{1}{2}m\right)R^2\ddot{\theta}\right]\delta\theta$$

$$+\left[\frac{1}{2}mR(R-r)\ddot{\theta}-\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\varphi}\right.$$

$$-mg(R-r)\sin\varphi\Big]\delta\varphi=0 \tag{5}$$

因(5)中$\delta\theta$，$\delta\varphi$彼此独立，故得

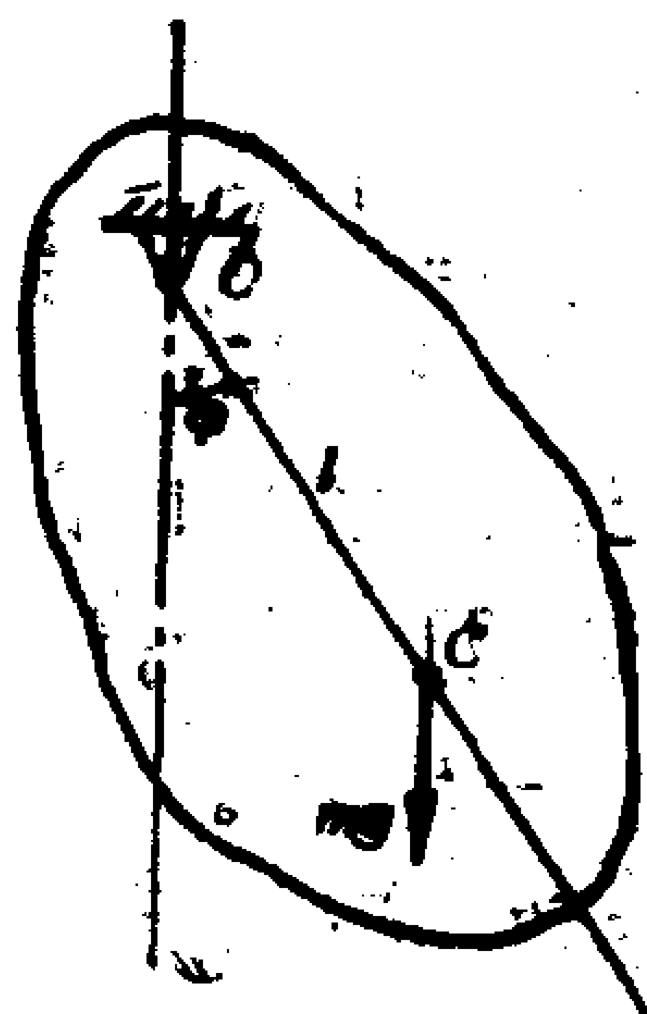
$$\frac{1}{2}mR(R-r)\ddot{\varphi}-\left(M+\frac{1}{2}m\right)R^2\ddot{\theta}=0$$

$$\frac{1}{2}mR(R-r)\ddot{\theta}-\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\varphi}-mg(R-r)\sin\varphi=0$$

简化后得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}m(R-r)\ddot{\varphi}-\left(M+\frac{1}{2}m\right)R\ddot{\theta}=0\\&\frac{1}{2}R\ddot{\theta}-\frac{3}{2}(R-r)\ddot{\varphi}-g\sin\varphi=0\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

例8-4 试用哈密顿原理求复摆微振动的周期。



例 8-4 图

[解] 取角φ为广义坐标，设复摆质量为m，对悬挂轴的转动惯量为J_0，$OC=l$。复摆的动能为$T=J_0\dot{\varphi}^2/2$，势能为$V=-mgl\cos\varphi$。拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}J_0\dot{\varphi}^2+mgl\cos\varphi \tag{1}$$

哈密顿原理为

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t=0 \tag{2}$$

而

$$\delta L=J_0\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi}-mgl\sin\varphi\delta\varphi$$

$$=J_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\varphi}\delta\varphi)-(J_0\ddot{\varphi}+mgl\sin\varphi)\delta\varphi \qquad (3)$$

将(3)代入(2)，并考虑到$\delta\varphi|_{t_1}=\delta\varphi|_{t_2}=0$，得到

$$\int_{t_1}^{t_2}(J_0\ddot{\varphi}+mgl\sin\varphi)\delta\varphi\mathrm{d}t=0$$

由(t_1, t_2)的任意性，且$\delta\varphi\neq0$，得到复摆的运动方程

$$J_0\ddot{\varphi}+mgl\sin\varphi=0$$

对微振动，有$\sin\varphi\approx\varphi$，(5)成为

$$\ddot{\varphi}+\frac{mgl}{J_0}\varphi=0$$

故周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J_0}{mgl}}$$

例8-5 试证对于拉格朗日函数

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i^2\dot{q}_i^2+b_i^2q_i^2) \qquad (a_i=\mathrm{const}, b_i=\mathrm{const})$$

的系统，正路上的哈密顿作用量具有全局极小值。

[证明] 设$q_i(t)$为真实运动，$q_i(t_1)=q_{i1}$，$q_i(t_2)=q_{i2}$，$t_2-t_1>0$。设$q_i'(t)$是满足同样条件的与真实运动相比较的运动，因此有

$$q_i'(t)=q_i(t)+\alpha_i(t) \qquad (1)$$

其中$\alpha_i(t)$为任意函数，但有$\alpha_i(t_1)=\alpha_i(t_2)=0$。用$S$及$S'$表记对真实运动和比较运动的哈密顿作用量，我们有

$$S'-S=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[a_i^2(\dot{q}_i+\dot{\alpha}_i)^2+b_i^2(q_i+\alpha_i)^2]\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i^2\dot{q}_i^2+b_i^2q_i^2)\right\}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}(a_i^2\dot{q}_i\dot{\alpha}_i+b_i^2q_i\alpha_i)\,\mathrm{d}t$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i^2\dot{\alpha}_i^2+b_i^2\alpha_i^2)\,\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\dot{q}_i\alpha_i\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}(-a_i^2\ddot{q}_i+b_i^2q_i)\alpha_i\,\mathrm{d}t$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i^2\dot{\alpha}_i^2+b_i^2\alpha_i^2)\,\mathrm{d}t \qquad (2)$$

由假设，有

$$\alpha_i|_{t_1}=\alpha_i|_{t_2}=0 \qquad (3)$$

由拉格朗日函数L，知运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

即

$$a_i^2\ddot{q}_i-b_i^2q_i=0 \qquad (4)$$

将(3)和(4)代入(2)，得

$$S'-S=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}(a_i^2\dot{\alpha}_i^2+b_i^2\alpha_i^2)\,\mathrm{d}t>0 \qquad (5)$$

这说明系统正路上的哈密顿作用量具有全局极小值。

例8-6 拉格朗日函数为$L(q_i,\ \dot{q}_i,\ t)$的系统，其正路$q_i=q_i(t)$ $(i=1,\ \cdots,\ n)$经过$(n+1)$维增广坐标空间中的点$A\{q_i(0),\ t_0\}$和$B\{q_i(1),\ t_1\}$。对于经过点A和B的单参数曲线族$q_i(t,\ \alpha)=q_i(t)+\alpha\varphi_i(t)$，$\varphi_i(t_0)=\varphi_i(t_1)=0$

$(i=1, \cdots, n)$，求出哈密顿作用量$S=\int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$的二次变分表达式$\delta^2 S(\alpha)$，正路对应于$\alpha=0$。

［解］ 因

$$q_i(t, \alpha)=q_i(t)+\alpha\varphi_i(t)$$

故

$$\delta q_i=\frac{\partial q_i(t,\alpha)}{\partial \alpha}\delta\alpha=\varphi_i(t)\delta\alpha \qquad (1)$$

$$\delta \dot{q}_i=\frac{\partial^2 q_i(t, \alpha)}{\partial \alpha \partial t}\delta\alpha=\dot{\varphi}_i(t)\delta\alpha \qquad (2)$$

哈密顿作用量的一次变分为

$$\delta S(\alpha)=\delta\int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right)\mathrm{d}t$$

二次变分为

$$\delta^2 S(\alpha)=\frac{1}{2}\delta(\delta S(\alpha))$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_i\partial q_k}\delta q_i\delta q_k\right.$$

$$+\frac{\partial^2 L}{\partial q_i\partial \dot{q}_k}\delta q_i\delta \dot{q}_k+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\partial q_k}\delta \dot{q}_i\delta q_k$$

$$\left.+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_i\delta \dot{q}_k\right)\mathrm{d}t \qquad (3)$$

又

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_i\partial \dot{q}_k}\delta q_i\delta \dot{q}_k+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\partial q_k}\delta \dot{q}_i\delta q_k=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_i\partial \dot{q}_k}\delta q_i\delta q_k\right)$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_k}\right)\delta q_i \delta q_k \tag{4}$$

将(4)代入(3)，得

$$\delta^2 S(\alpha)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_k}\delta q_i \delta q_k - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_k}\right)\delta q_i \delta q_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_i \delta \dot{q}_k\right]\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_k}\delta q_i \delta q_k \Big|_{t_0}^{t_1} \tag{5}$$

由于$\delta q_i|_{t_0}=\delta q_i|_{t_1}=0$，故(5)中最后一项为零。将(1)和(2)代入(5)，便得

$$\delta^2 S(\alpha)=\frac{(\delta\alpha)^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_k}\right)\right]\times \varphi_i(t)\varphi_k(t)+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\dot{\varphi}_i(t)\dot{\varphi}_k(t)\right\}dt$$

例8-7 质量为m的质点，受有非完整约束

$$\dot{z}^2=\frac{b^2}{a^2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) \qquad (a,\ b\text{为常量})$$

在重力场内运动，试用哈密顿原理导出它的运动微分方程。

[解] 研究$\dot{z}>0$的情形，约束方程写成

$$\dot{z}=\frac{b}{a}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2} \tag{1}$$

按照虚位移的Четаев定义，约束(1)加在虚位移上的条件为

$$\delta z=\frac{b}{a}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-1/2}(\dot{x}\delta x+\dot{y}\delta y) \qquad (2)$$

系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz$$

因此，考虑到(2)，有

$$\delta L=m(\dot{x}\delta\dot{x}+\dot{y}\delta\dot{y}+\dot{z}\delta\dot{z})-mg\delta z$$

$$=m(\dot{x}\delta\dot{x}+\dot{y}\delta\dot{y}+\dot{z}\delta\dot{z})-mg\frac{b}{a}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-1/2}(\dot{x}\delta x+\dot{y}\delta y) \qquad (3)$$

按照霍尔德观点，微分运算与变分运算是可交换的，则有

$$\delta\dot{x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x,\ \delta\dot{y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta y \qquad (4)$$

$$\delta\dot{z}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta z=\frac{b}{a}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-3/2}\{(\dot{y}\ddot{x}-\dot{x}\ddot{y})(\dot{y}\delta x-\dot{x}\delta y)$$
$$+(\dot{x}^2+\dot{y}^2)(\dot{x}\delta\dot{x}+\dot{y}\delta\dot{y})\} \qquad (5)$$

将(5)代入(3)，得

$$\delta L=m\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)(\dot{x}\delta\dot{x}+\dot{y}\delta\dot{y})+m\frac{b^2(\dot{y}\ddot{x}-\dot{x}\ddot{y})}{a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}(\dot{y}\delta x-\dot{x}\delta y)$$
$$-mg\frac{b}{a}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-1/2}(\dot{x}\delta x+\dot{y}\delta y) \qquad (6)$$

因

$$\dot{x}\delta\dot{x}+\dot{y}\delta\dot{y}=\dot{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x+\dot{y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta y$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}\delta x+\dot{y}\delta y)-(\ddot{x}\delta x+\ddot{y}\delta y)$$

故

$$\delta L=m\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}\delta x+\dot{y}\delta y)$$

$$-\left[m\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\ddot{x}-m\frac{b^2(\dot{y}\ddot{x}-\dot{x}\ddot{y})}{a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}\dot{y}+mg\frac{b\dot{x}}{a(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2}}\right]\delta x$$

$$-\left[m\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\ddot{y}+m\frac{b^2(\dot{y}\ddot{x}-\dot{x}\ddot{y})}{a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}\dot{x}+mg\frac{b\dot{y}}{a(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2}}\right]\delta y$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\dot{x}\delta x\right]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\dot{y}\delta y\right]$$

$$-\left[m\ddot{x}+m\frac{b^2\dot{x}(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})}{a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}+\frac{mgb\dot{x}}{a(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2}}\right]\delta x$$

$$-\left[m\ddot{y}+m\frac{b^2\dot{y}(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})}{a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}+\frac{mgb\dot{y}}{a(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2}}\right]\delta y \qquad (7)$$

霍尔德形式的哈密顿原理为(8.11)，即

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta L\mathrm{d}t=0 \qquad (8)$$

将(7)代入(8)，得

$$m\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\dot{x}\delta x\Big|_{t_0}^{t_1}+m\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\dot{y}\delta y\Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left\{\left[m\ddot{x}+\frac{mb^2\dot{x}(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})}{a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}+\frac{mgb\dot{x}}{a(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2}}\right]\delta x\right.$$

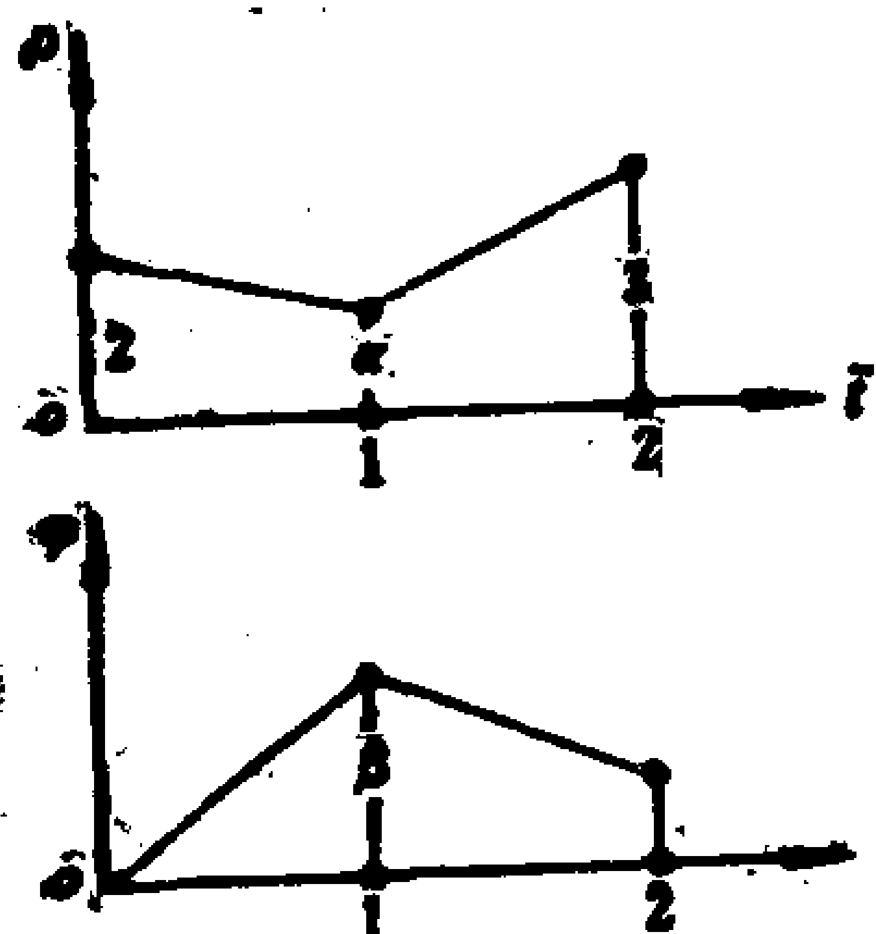
$$\left.+\left[m\ddot{y}+\frac{mb^2\dot{y}(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})}{a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}+\frac{mgb\dot{y}}{a(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2}}\right]\delta y\right\}\mathrm{d}t=0 \qquad (9)$$

因 $\delta x|_{t_0}=\delta x|_{t_1}=\delta y|_{t_0}=\delta y|_{t_1}=0$，故(9)中前两项为零。由于($t_0$，$t_1$)是任意假设的，因此(9)中被积式子为零；而

δx，δy 彼此独立，它们前面的系数分别为零，于是有

$$\ddot{x}+\frac{b^2\dot{x}(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})}{a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}=-\frac{gb\dot{x}}{a(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2}}$$

$$\ddot{y}+\frac{b^2\dot{y}(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})}{a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}=-\frac{gb\dot{y}}{a(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2}}$$



例8-8 图

这就是所求运动微分方程。

例8-8 设质点运动的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2)$$

已知 $\rho(0)=2$，$\varphi(0)=0$，$\rho(2)=3$，$\varphi(2)=1$。试用李兹(*Ritz*)法求 $\rho(1)$，$\varphi(1)$。采用图中折线变化的 $\rho(t)$ 和 $\varphi(t)$，求出 α，β 使哈密顿作用量

$$S=\int_0^2 L\mathrm{d}t$$

取得驻定值，并与精确解比较。

〔解〕 首先，用直角坐标求精确解。设 $x=\rho\cos\varphi$，$y=\rho\sin\varphi$，则 $\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2$，而 $L=(\dot{x}^2+\dot{y}^2)/2$，运动微分方程为

$$\ddot{x}=0,\quad \ddot{y}=0$$

积分后，得

$$x=c_1t+c_2,\quad y=c_3t+c_4 \tag{1}$$

由已给条件

$$\rho(0)=2,\ \varphi(0)=0,\ \rho(2)=3,\ \varphi(2)=1$$

知

$$x(0)=2,y(0)=0,x(2)=3\cos1,y(2)=3\sin1 \qquad (2)$$

将(2)代入(1)，得到积分常数

$$c_1=\frac{3}{2}\cos1-1,\ c_2=2,\ c_3=\frac{3}{2}\sin1,\ c_4=0$$

于是

$$x=\left(\frac{3}{2}\cos1-1\right)t+2,\ y=\left(\frac{3}{2}\sin1\right)t \qquad (3)$$

当$t=1$时，有

$$\rho(1)\cos\varphi(1)=\frac{3}{2}\cos1-1+2$$

$$\rho(1)\sin\varphi(1)=\frac{3}{2}\sin1$$

由此解得

$$\rho(1)=\left[\left(\frac{3}{2}\cos1+1\right)^2+\left(\frac{3}{2}\sin1\right)^2\right]^{1/2}$$

$$=\left(\frac{13}{4}+3\cos1\right)^{1/2}\doteq2.2070$$

$$\varphi(1)=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\frac{3}{2}\sin1}{\frac{3}{2}\cos1+1}=\mathrm{tg}^{-1}\frac{1.2623}{1.8104}\doteq0.6088 \qquad (4)$$

其次，用图中折线变化的$\rho(t)$和$\varphi(t)$求α，β。折线方程为

$$\left.\begin{array}{l}\rho=(\alpha-2)t+2\\ \varphi=\beta t\end{array}\right\}\quad(0\leqslant t\leqslant1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\rho=(3-\alpha)(t-1)+\alpha\\ \varphi=(1-\beta)(t-1)+\beta\end{array}\right\}\quad(1<t\leqslant2)$$

于是

$$\dot{\rho}=\alpha-2,\quad \dot{\varphi}=\beta \qquad (0\leqslant t\leqslant 1)$$
$$\dot{\rho}=3-\alpha,\quad \dot{\varphi}=1-\beta \qquad (1<t\leqslant 2) \tag{5}$$

哈密顿作用量为

$$S=\int_0^2 L\mathrm{d}t=\int_0^1 L\mathrm{d}t+\int_1^2 L\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{2}\{(\alpha-2)^2+[(\alpha-2)t+2]^2\beta^2\}\mathrm{d}t$$

$$+\int_1^2 \frac{1}{2}\{(3-\alpha)^2+[(3-\alpha)(t-1)$$

$$+\alpha]^2(1-\beta)^2\}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{3}\alpha^2\beta^2+\frac{5}{6}\alpha\beta^2-\frac{1}{3}\alpha^2\beta+\frac{7}{6}\alpha^2$$

$$+\frac{13}{6}\beta^2-\alpha\beta-\frac{9}{2}\alpha-3\beta+8 \tag{6}$$

求出 S 取驻定值的 α，β，即

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha}=0,\qquad \frac{\partial S}{\partial \beta}=0 \tag{7}$$

将(6)代入(7)，整理得

$$14\alpha-27-2\beta(3+2\alpha)+\beta^2(4\alpha+5)=0 \tag{8}$$

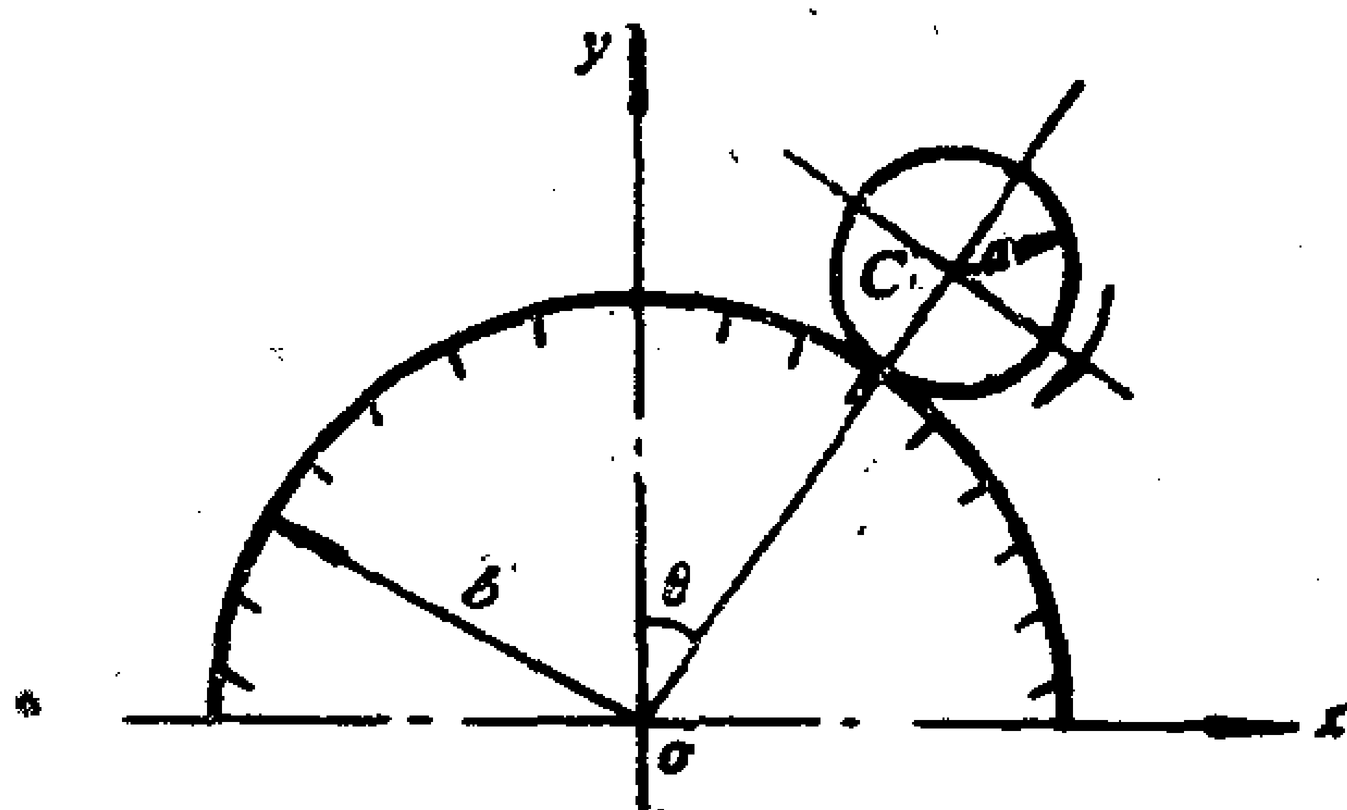
$$\beta(2\alpha^2+5\alpha+13)-(\alpha^2+3\alpha+9)=0 \tag{9}$$

用迭代法解方程(8)和(9)，求得

$$\alpha=2.2076,\quad \beta=0.6067 \tag{10}$$

近似法结果(10)与精确结果(4)相差甚微。

例8-9 一半径为 a 的匀质圆球，自半径为 b 的固定圆球顶端自由滚下。试用拉格朗日最小作用量原理求动球球心的加速度。



例 8-9图

[解] 系统有一个自由度，取球心联线与 y 轴的夹角 θ 为广义坐标。设动球的角速度为 ω，则有

$$v_c=(a+b)\dot{\theta}=a\omega$$

于是

$$\omega=\frac{a+b}{a}\dot{\theta}$$

动球的动能为

$$T=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}J_c\omega^2$$

$$=\frac{1}{2}m(a+b)^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}ma^2\left(\frac{a+b}{a}\right)^2\dot{\theta}^2$$

$$=\frac{7}{10}m(a+b)^2\dot{\theta}^2$$

势能为

$$V=mg(a+b)\cos\theta$$

拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{7}{10}m(a+b)^2\dot{\theta}^2-mg(a+b)\cos\theta \tag{1}$$

拉格朗日最小作用量原理为

$$0=\Delta A=\Delta\int_{t_1}^{t_2}2T\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\Delta(2T)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}2T\Delta(\mathrm{d}t)$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\Delta L\,\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}2T\Delta(\mathrm{d}t) \tag{2}$$

由(1)得

$$\Delta L=\frac{7}{5}m(a+b)^2\dot{\theta}\Delta\dot{\theta}+mg(a+b)\sin\theta\Delta\theta \tag{3}$$

又

$$\dot{\theta}\Delta\dot{\theta}=\dot{\theta}(\delta\dot{\theta}+\ddot{\theta}\,\Delta t)=\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\theta+\dot{\theta}\ddot{\theta}\Delta t$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\theta}\Delta\theta)-\ddot{\theta}\,\Delta\theta-\dot{\theta}^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta t \tag{4}$$

将(4)代入(3)，并积分，有

$$\int_{t_1}^{t_2}\Delta L\,\mathrm{d}t=\frac{7}{5}m(a+b)^2\dot{\theta}\Delta\theta\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\left\{-\frac{7}{5}m(a+b)^2\ddot{\theta}+mg(a+b)\sin\theta\right\}\Delta\theta\,\mathrm{d}t$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\left\{-\frac{7}{5}m(a+b)^2\dot{\theta}^2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t)\right\}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{7}{5}m(a+b)^2\dot{\theta}\Delta\theta\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\Big\{-\frac{7}{5}m(a+b)^2\ddot{\theta}$$

$$+mg(a+b)\sin\theta\Big\}\Delta\theta\mathrm{d}t-\int_{t_1}^{t_2}2T\mathrm{d}(\Delta t) \qquad (5)$$

因

$$(\Delta\theta)_{t_1}=(\Delta\theta)_{t_2}=0, \quad \mathrm{d}(\Delta t)=\Delta(\mathrm{d}t)$$

于是(5)成为

$$\int_{t_1}^{t_2}\Delta L\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}2T\Delta(\mathrm{d}t)=\int_{t_1}^{t_2}\Big\{-\frac{7}{5}m(a+b)^2\ddot{\theta}$$

$$+mg(a+b)\sin\theta\Big\}\Delta\theta\mathrm{d}t \qquad (6)$$

将(6)代入(2)，得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big\{-\frac{7}{5}m(a+b)^2\ddot{\theta}+mg(a+b)\sin\theta\Big\}\Delta\theta\mathrm{d}t=0 \qquad (7)$$

由于(t_1, t_2)是任意假设的，又$\Delta\theta\neq0$，由(7)得

$$-\frac{7}{5}m(a+b)^2\ddot{\theta}+mg(a+b)\sin\theta=0$$

由此得

$$\ddot{\theta}=\frac{5g\sin\theta}{7(a+b)} \qquad (8)$$

而球心加速度为

$$a_\tau=(a+b)\ddot{\theta}=\frac{7}{5}g\sin\theta \qquad (9)$$

三、习　题

8-1　试用茹尔当原理推导尼尔森方程。

8-2　试用高斯原理推导完整系统的拉格朗日方程。

8-3　试用高斯原理推导采诺夫(Ченов)方程

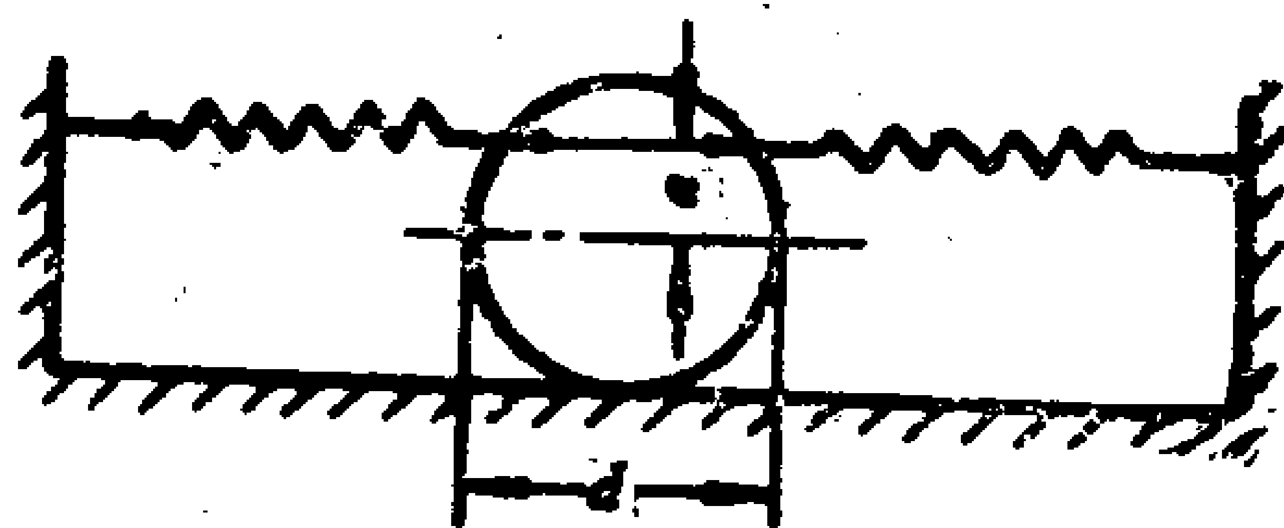
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_s}-3\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)=Q_s \quad (s=1,\ \cdots,\ n)$$

8-4　一质点的质量为 m，受重力作用，被限制在光滑曲面 $z=f(x,\ y)$上运动。试写出哈密顿原理的表达式。

答：$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\frac{m}{2}\left\{\left[\dot{x}^2+\dot{y}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}\right)^2\right]-2gf(x,\ y)\right\}\mathrm{d}t=0$$

8-5　一圆柱直径为 d，质量为m，可在水平面上滚而不滑。两刚性系数均为 c 的相同弹簧联结于圆柱上。联结点在圆柱长度的中点，离轴线为 a，两弹簧被固定。试用哈密顿原理求圆柱的振动周期。

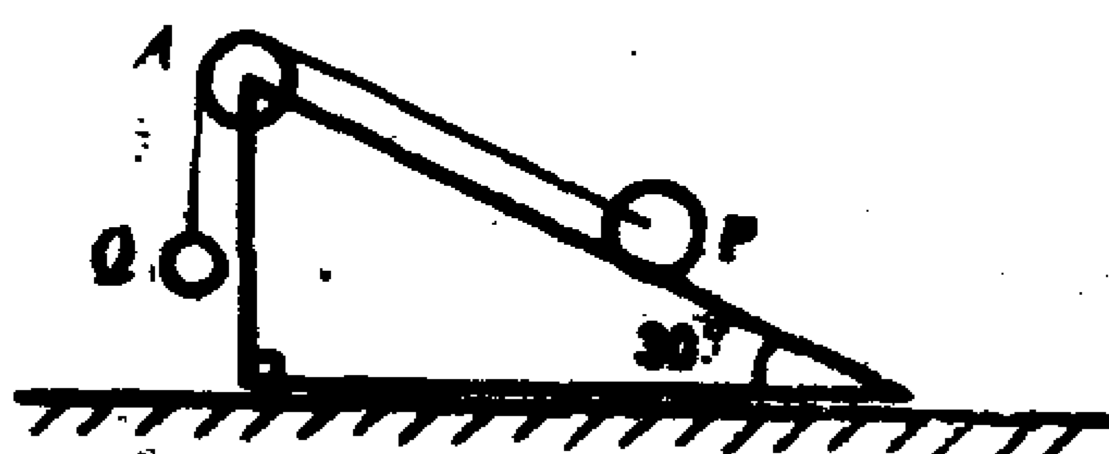
答：$$T=\frac{\pi\sqrt{3}}{1+\dfrac{2a}{d}}\sqrt{\frac{m}{c}}$$



题8-5图

8-6　图示质量为 $2m$ 的直角楔放在水平面上，质点P的质量为$3m$，质点Q的质量为m。所有接触都是光滑的，不计滑轮A和绳子的质量。试用哈密顿原理求楔的加速度。

答：$a=\dfrac{\sqrt{3}g}{23}$



题8-6图

8-7　半径为 r 的滑轮上挂有长为$2a+\pi r$的匀质链条，链条单位长度的重量为μ，滑轮的转动惯量是J_0，滑轮轴承处没有摩擦，滑轮与链条之间没有滑动。开始时两边悬空长度为$a-x_0$和$a+x_0$，初速为零。试用哈密顿原理求链条的运动方程。

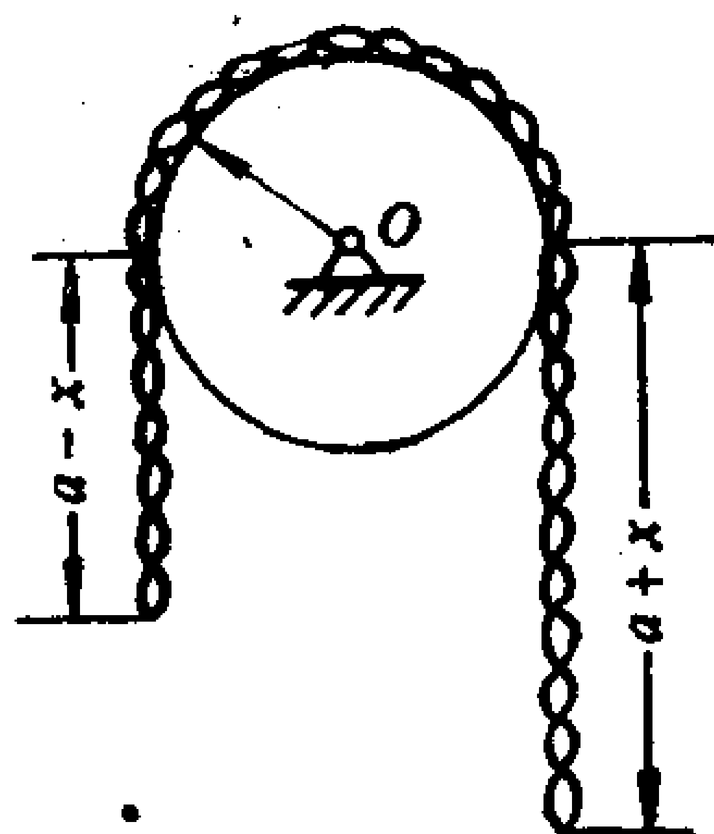
答：$x=x_0\operatorname{ch}kt$

其中

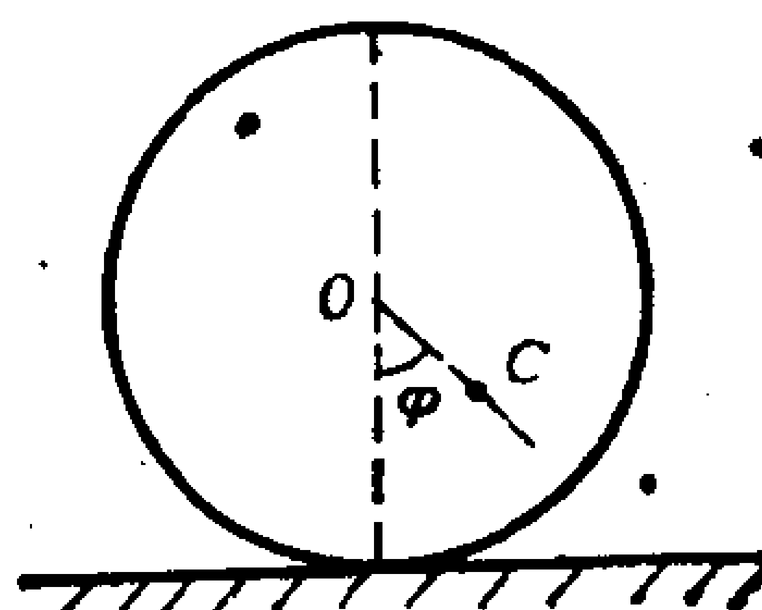
$$\frac{1}{k^2}=\frac{J_0g+\pi\mu r^3}{2g\mu r^2}+\frac{a}{g}$$

8-8　半径为 r 的圆柱体可在水平地面上无滑动地滚动。圆柱的重心在C点，它与几何中心O的距离$OC=a$。圆柱相对于过重心C且与几何轴平行的轴的回转半径为k。以角φ表示OC与向下竖直线的夹角。初始时，圆柱体静止，且$\varphi=\varphi_0$，然后释放。试用哈密顿原理求圆柱体的角速度(表成角φ的函数)。

答：$\omega=\left[\dfrac{2ag(\cos\varphi-\cos\varphi_0)}{r^2+a^2+k^2-2ar\cos\varphi}\right]^{1/2}$



题8-7图



题8-8图

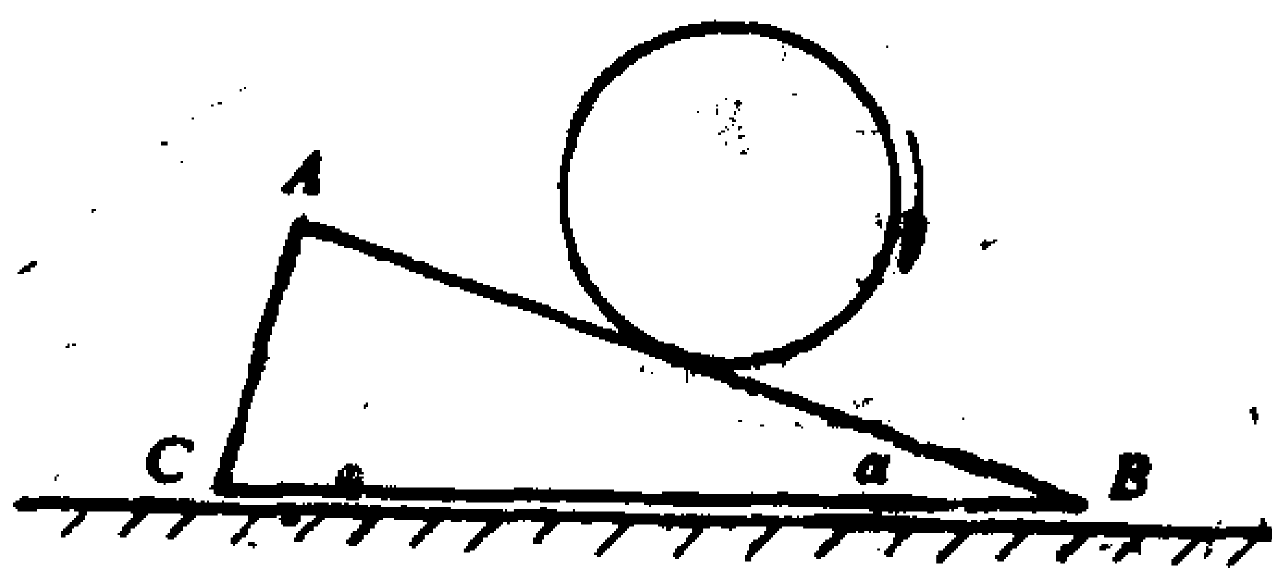
8-9 在光滑的水平面上放置一质量为M的三棱柱ABC，$\angle ABC=\alpha$。一质量为M，半径为r的匀质圆柱体沿斜面AB无滑动地滚下。试用哈密顿原理求三棱柱的运动加速度和圆柱的角加速度。

答：$a=\dfrac{mg\sin 2\alpha}{3(M+m)-2m\cos^2\alpha}$

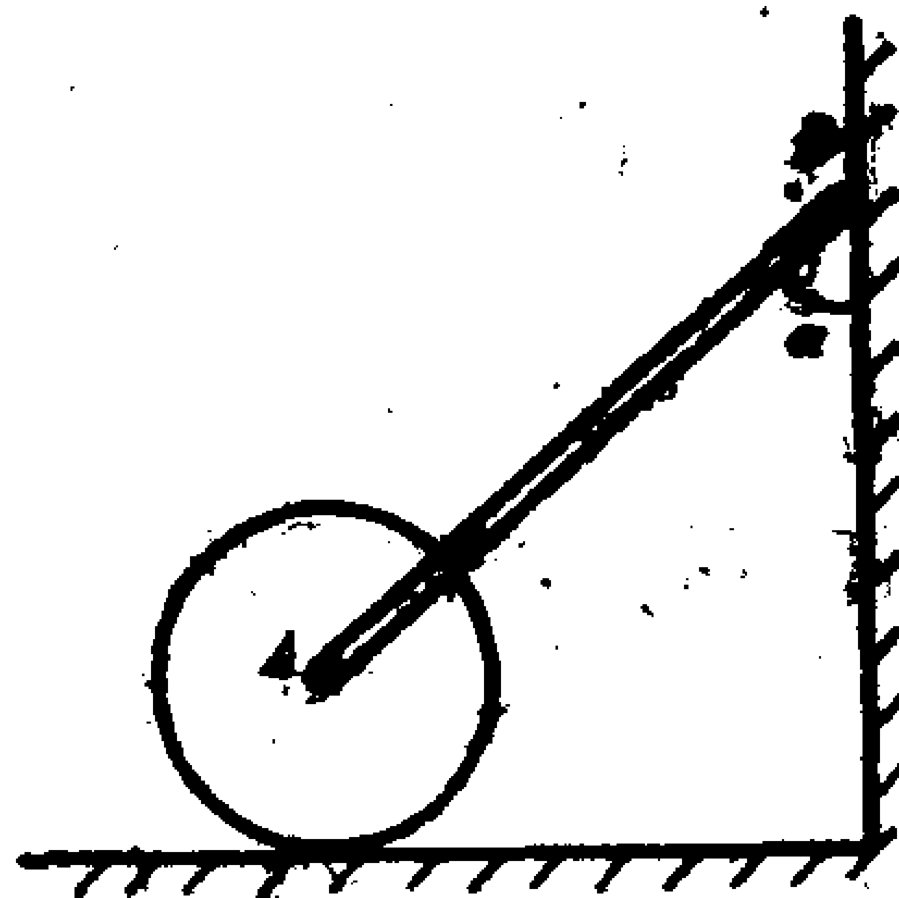
$\varepsilon=\dfrac{2(M+m)g\sin\alpha}{r[3(M+m)-2m\cos^2\alpha]}$

8-10 图示匀质圆柱A的半径为r，质量为M，匀质杆AB的长度为l，质量为m。铰A和墙B处都是光滑接触，地面相当粗糙，以致圆柱只滚不滑。初始时系统静止，且$\alpha=45°$，然后释放。试用哈密顿原理，求初始时刻A点和B点的运动加速度以及杆的角加速度。

答：$a_A=a_B=\dfrac{3mg}{(9M+4m)}$，　$\varepsilon=\dfrac{\sqrt{2}\,a_A}{l}$



题8-9图

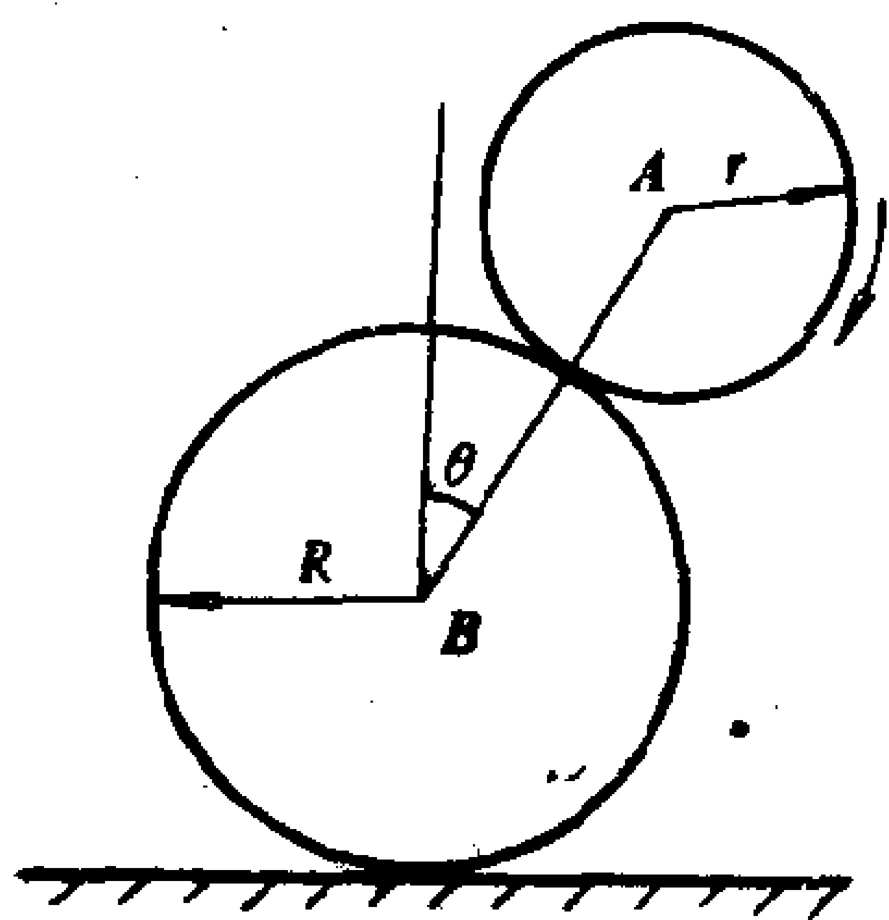


题8-10图

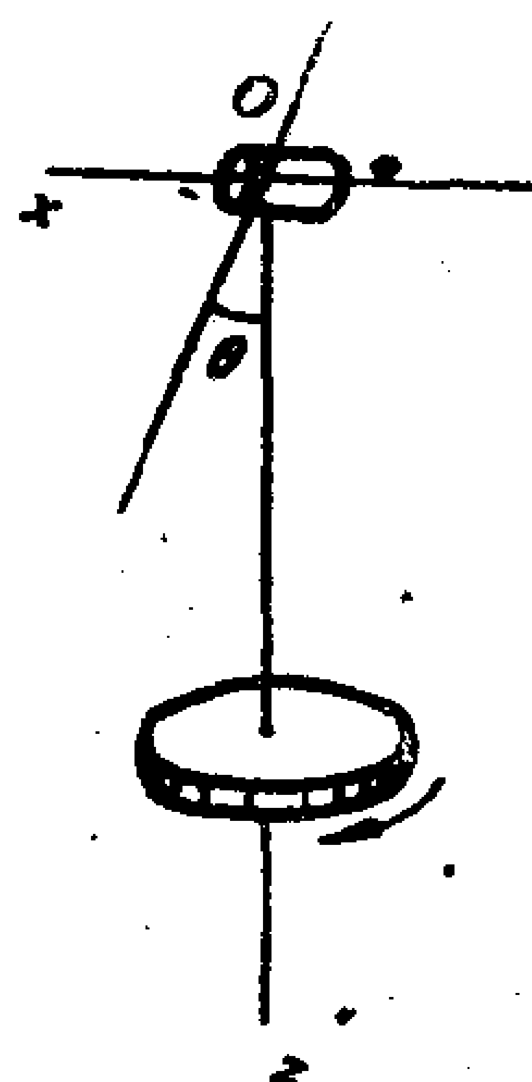
8-11 质量为m,半径为r的匀质圆柱体放在质量为M,半径为R的匀质圆柱体B上，而B放在水平面上。所有接触处的摩擦力足够大，使得圆柱体只滚不滑。两圆柱体的轴都是水平的，且重心都在同一竖直平面内，柱A从最高处自静止开始滚下。试用哈密顿原理写出在两个柱体脱开以前柱A中心的轨迹方程。

答：$x_A=(R+r)\dfrac{m\theta+(3M+m)\sin\theta}{3(M+m)}$

$y_A=(R+r)\cos\theta$



题8-11图



题8-12图

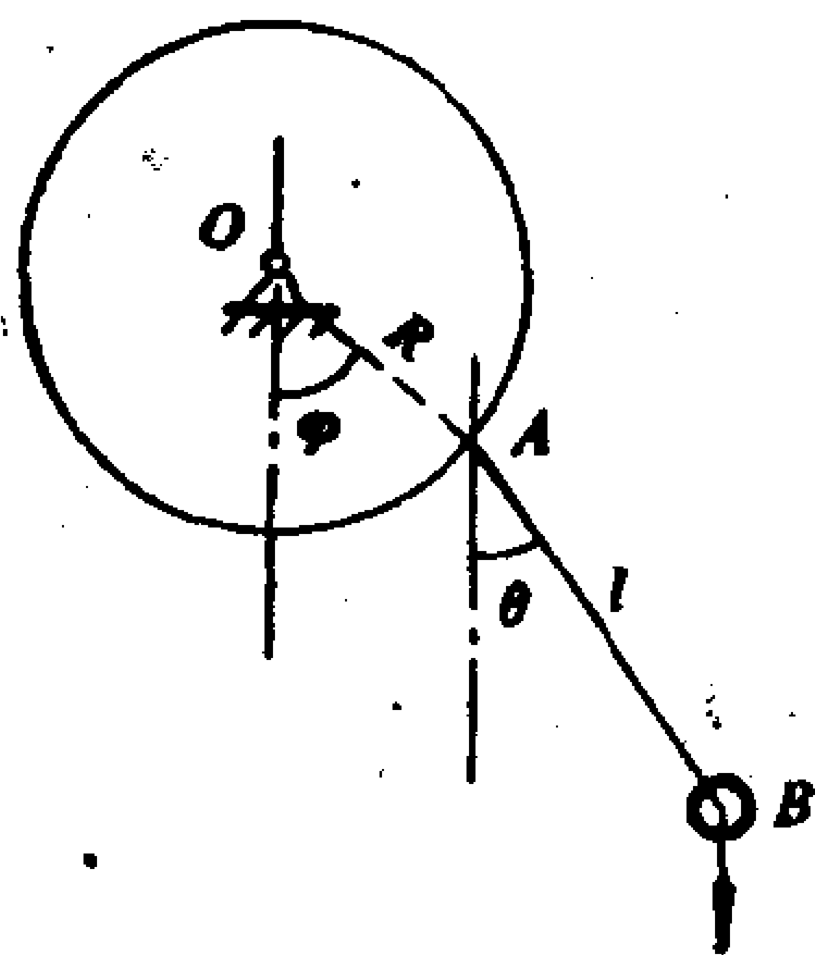
8-12 一匀质圆盘以角速度ω绕 oz 轴转动，oz 轴又绕水平轴ox摆动，不计摩擦和空气阻力。试用哈密顿原理证明这个圆盘的自转并不影响它的摆动周期。

8-13 一匀质圆盘，半径为R，质量为M，可以绕通过盘心的水平轴转动。在圆盘边缘一点 A 上悬挂一长为 l 的轻杆 AB，杆的 B 端固结一质量为m的质点。考虑重力的影响，试用哈密顿原理写出系统的运动微分方程。

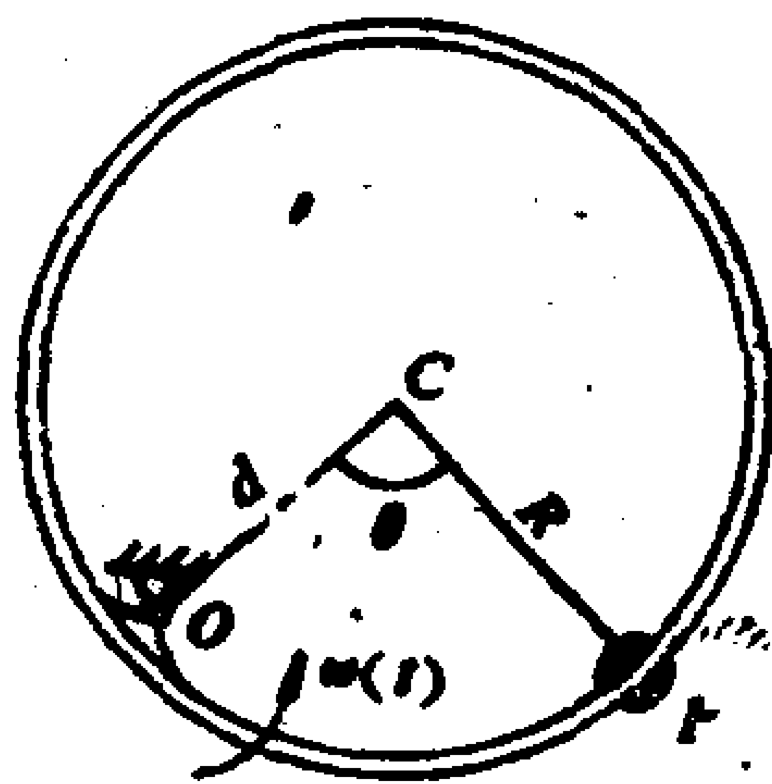
答：
$$\left(m+\frac{M}{2}\right)R^2\ddot{\varphi}+mRl\ddot{\theta}\cos(\varphi-\theta)+mRl\dot{\theta}^2\sin(\varphi-\theta)+mgR\sin\varphi=0$$
$$l\ddot{\theta}+R\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)-R\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\theta)+g\sin\theta=0$$

8-14 半径为 R 的水平金属环，可以绕通过O点的垂直于环平面的竖直轴转动，$OC=d$。金属环上有质点 P。已知圆环的转动角速度为$\omega(t)$，如果取$\angle OCP=\theta$ 为广义坐标，不计摩擦，试用哈密顿原理证明

$$R\ddot{\theta}+\dot{\omega}(R-d\cos\theta)=d\omega^2\sin\theta$$



题8-13图



题8-14图

8-15 利用哈密顿原理证明，具有拉格朗日函数$L(q_s, \dot{q}_s, t)$的和具有与之相差一个任意函数$\varphi(q_s, t)$的全导数的拉格朗日函数

$$L_1(q_s, \dot{q}_s, t)=L(q_s, \dot{q}_s, t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(q_s, t)$$

的系统运动方程是一致的。

8-16 已知物体下落的运动微分方程为

$$m\ddot{y}=-mg, \quad m\ddot{x}=0$$

运动的初始条件为$t=0$，$x=x_0$，$y=y_0$，$\dot{x}=\dot{x}_0$，$\dot{y}=\dot{y}_0$。在哈密顿作用量中取$t_1=0$，$t_2=t$，试证

$$S=m\left[\frac{1}{2t}(x-x_0)^2+\frac{1}{2t}(y-y_0)^2\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}gt(y+y_0)-\frac{1}{24}g^2t^3\right]$$

并证明此S满足哈密顿—雅科比方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right]+mgy=0$$

8-17 质点可在光滑铅垂面xz内运动，而平面以匀角速度ω绕z轴转动。试证，在真实运动$x(t)$，$z(t)$上的哈密顿作用量S和比较运动$x(t)+\delta x(t)$，$z(t)+\delta z(t)$上的哈密顿作用量S'，当$\delta x(0)=\delta x(T)=\delta z(0)=\delta z(T)=0$时，其关系可表为

$$S'=S+\frac{1}{2}\int_0^T[(\delta\dot{x})^2+\omega^2(\delta x)^2+(\delta\dot{z})^2]\mathrm{d}t$$

8-18 频率为ω的一维谐振子($T=\dot{q}^2/2, V=\omega^2q^2/2$)在$t=0$从位置$q_0$上无初速地开始运动。试计算时间$\tau$内形

式为$q(t)=at(t-\tau)+q_0$的比较运动上的作用量S'。试证存在这样一些参数a，使得(1)$S'>S$；(2)$S'=S$；(3)$S'<S$。

8-19　力学系统的拉格朗日函数是常系数为a_{ik}的速度正定二次型$L=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$.试用直接计算法证明，在联结增广坐标空间中的任意两点$(q_{i0},\ t_0)$和(q_{i1},t_1)，$t_1\neq t_0$的正路上哈密顿作用量与联结该两点的任何一条旁路上的作用量相比将为极小。

8-20　试证对于自然系统($L=L_2+L_1+L_0$，当$\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i^2>0$时，$L_2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k>0$)，正路上的哈密顿作用量与各旁路相比不可能为极大。

8-21　平面谐振子的拉格朗日函数是

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

已知$t=0$时点在(2，0)处，$t=1$时在(0，3)处，用李兹法求近似解，选取$x(t)$，$y(t)$为二次抛物线，而后令哈密顿作用量

$$S=\int_0^1 L\mathrm{d}t$$

取驻定值。比较$t=1/2$时精确解和近似解的值。

答：精确值为(1.1395，1.7092)；近似值为(1.1389，1.7083)。

8-22　试用拉格朗日最小作用量原理解下述问题：质量为m_1及m_2的两个砝码用不可伸长的无重量的绳子联结。

绳子跨过质量为M的定滑轮(当作匀质圆盘)。求砝码的加速度。

答：$a=\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2+\frac{1}{2}M}g$

第九章　非完整系统力学初步

一、基本理论与公式

1.　非完整系统的例子

非完整约束是加在系统中点的速度上的限制。根据运动学知识，可以列写具体的非完整约束方程。

2.　非完整约束加在虚位移上的条件

约束加在虚位移上的条件称为虚位移方程，有两种定义：

(1) 切塔耶夫定义

对于形如

$$\varphi_\beta(q_s, \dot{q}_s, t)=0 \quad (s=1,2,\cdots n;\ \beta=1,2\cdots,g) \qquad (9\text{-}1)$$

的非完整约束，切塔耶夫定义虚位移 δq_s 满足下列关系

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0 \quad (\beta=1,\ 2,\ \cdots,\ g) \qquad (9\text{-}2)$$

(2) 牛青萍定义

对于形如(9-1)的非完整约束，牛青萍定义速度空间的虚位移 $\delta\dot{q}_s$ 满足条件

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta \dot{q}_s=0 \quad (\beta=1,\ 2,\ \cdots,\ g) \qquad (9\text{-}3)$$

3. 非完整约束下实位移处于虚位移中的充要条件

在非完整约束下，实位移处于虚位移中的充要条件是约束方程相对速度的齐次性。在完整约束下，实位移处于虚位移中的充要条件是约束方程不包含时间 t。

4. 罗兹方程

设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1, 2, \cdots, n)$ 来确定，并受有形如(9-1)的非完整约束，则罗兹方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_s}\ (s=1, 2, \cdots, n) \tag{9-4}$$

由(9-1)和(9-4)可以解出 q_s 和 λ_β。

5. 查浦雷金方程

设由约束方程(9-1)可解出

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\dot{q}_{\varepsilon+\beta}(q_s, \dot{q}_\sigma, t)\begin{pmatrix}\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon;\ \varepsilon=n-g;\\ \beta=1,2,\cdots,g;\ s=1,2,\cdots,n\end{pmatrix} \tag{9-5}$$

则广义查浦雷金方程可写成如下两种形式：

诺沃谢洛夫形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma}\right.$$
$$\left.-\sum_{\nu=1}^{g}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_{\varepsilon+\nu}}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\nu}}{\partial \dot{q}_\nu}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}=\widetilde{Q}_\sigma$$

$$(\sigma=1, 2, \cdots \varepsilon) \qquad (9\text{-}6)$$

牛肯莽形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}=\tilde{Q}_\sigma \qquad (9\text{-}7)$$

其中$\tilde{T}$为T中借助关系(9-5)消去不独立的广义速度$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$所得表达式，而

$$\tilde{Q}_\sigma=Q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}Q_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma} \qquad (9\text{-}8)$$

利用查浦雷金方程时不仅要计算系统原始动能T(不计非完整约束时)，而且还要计算考虑到非完整约束消去不独立广义速度时的动能$\tilde{T}$。

6. 阿沛尔方程

阿沛尔方程在广义坐标下的表达式为

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_\sigma}=\tilde{Q}_\sigma \qquad (\sigma=1, 2, \cdots, \varepsilon) \qquad (9\text{-}10)$$

其中$\tilde{S}$为S中借助关系(9-5)消去与不独立的广义速度相应的广义加速度$\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}$所得表达式，即有

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \ddot{q}_\sigma}=\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma} \qquad (9\text{-}11)$$

列写阿沛尔方程的主要困难在于构造加速度能量S。

质点的加速度能量为

$$S=\frac{1}{2}m\ddot{r}^2=\frac{1}{2}m(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2) \tag{9-12}$$

质点系的加速度能量为

$$S=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\ddot{r}_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i(\ddot{x}_i^2+\ddot{y}_i^2+\ddot{z}_0^2) \tag{9-13}$$

刚体定点运动的加速度能量为

$$\begin{aligned}S=&\frac{1}{2}(J_1\dot{\omega}_1^2+J_2\dot{\omega}_2^2+J_3\dot{\omega}_3^2-2J_{23}\dot{\omega}_2\dot{\omega}_3\\&-2J_{31}\dot{\omega}_3 w_1-2J_{12}\dot{\omega}_1\dot{\omega}_2)+(\dot{\omega}_2\omega_3-\dot{\omega}_3\omega_2)(J_1\omega_1\\&-J_{12}\omega_2-J_{13}\omega_3)+(\dot{\omega}_3\omega_1-\dot{\omega}_1\omega_3)\\&\times(-J_{21}\omega_1+J_2\omega_2-J_{23}\omega_3)+(\dot{\omega}_1\omega_2\\&-\dot{\omega}_2\omega_1)(-J_{31}\omega_1-J_{32}\omega_2+J_3\omega_3)+\cdots\end{aligned} \tag{9-14}$$

其中未写出之项不含 $\dot{\omega}_1$，$\dot{\omega}_2$，$\dot{\omega}_3$；ω_1，ω_2，ω_3 为刚体角速度在与刚体相固联的轴上的投影；J_1，J_2，J_3为惯性矩，J_{12}，J_{23}，J_{31}为惯性积。特别地，如果与刚体相固联的轴为惯性主轴，则 $J_{12}=J_{23}=J_{31}=0$，这时有

$$\begin{aligned}S=&\frac{1}{2}(J_1\dot{\omega}^2+J_2\dot{\omega}_2^2+J_3\dot{\omega}_3^2)+\dot{\omega}_1\omega_2\omega_3(J_3\\&-J_2)+\dot{\omega}_2\omega_3\omega_1(J_1-J_3)+\dot{\omega}_3\omega_1\omega_2(J_2\\&-J_1)+\cdots\end{aligned} \tag{9-15}$$

在(9-15)情形下，刚体一般运动的加速度能量为

$$\begin{aligned}S=&\frac{1}{2}Ma^2_o+\frac{1}{2}(J_1\dot{\omega}_1^2+J_2\dot{\omega}_2^2+J_3\dot{\omega}_3^2)+\dot{\omega}_1\omega_2\omega_3\\&\times(J_3-J_2)+\dot{\omega}_2\omega_3\omega_1(J_1-J_3)\end{aligned}$$

$$+\dot{\omega}_3\omega_1\omega_2(J_2-J_1) \tag{9-16}$$

其中 a_c 为刚体质心的加速度。

7. 广义Nielsen方程

广义坐标下的广义 Nielsen 方程为

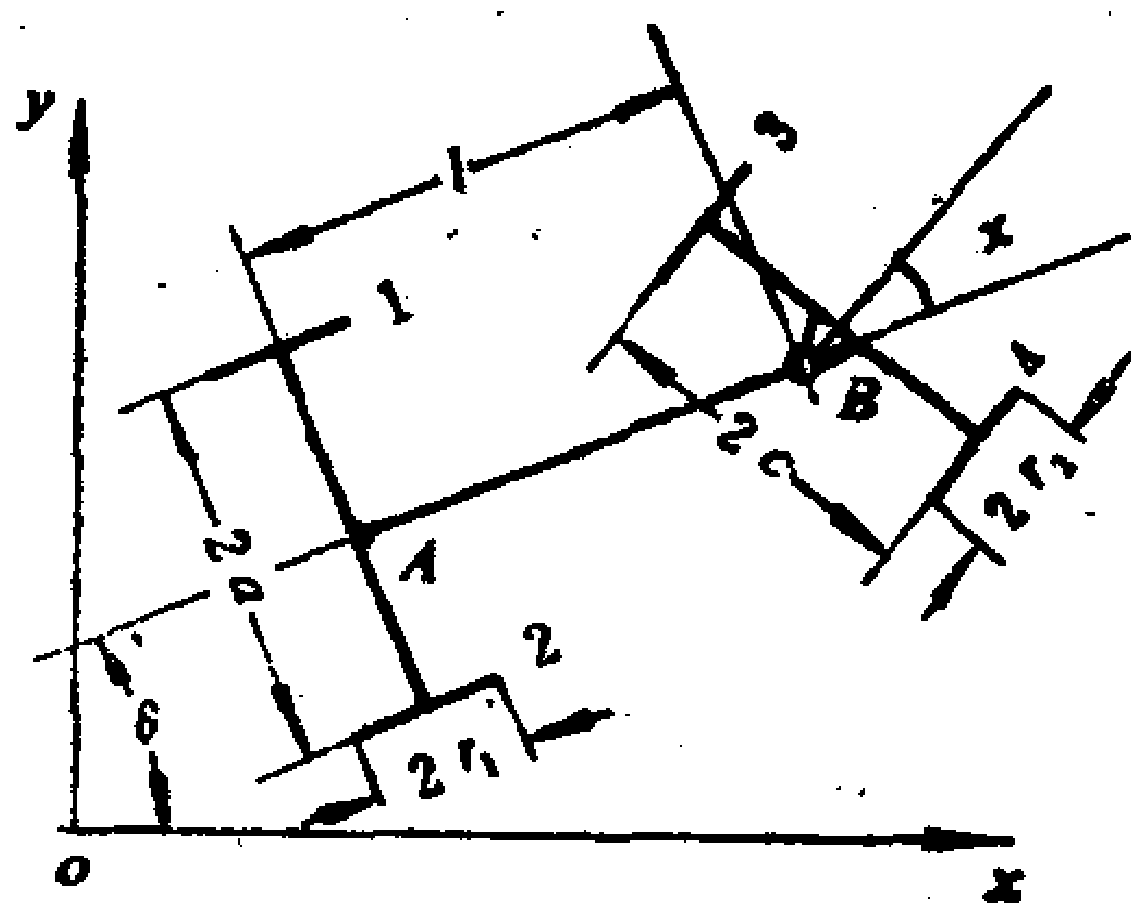
$$\frac{\partial\widetilde{\tilde{T}}}{\partial\dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\partial\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma}\right)$$

$$-2\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma}=\tilde{Q}_\sigma \qquad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon)$$

应用方程(9-17)时，需计算T，$\tilde{T}$和$\widetilde{\tilde{T}}$。

二、范　　例

例9-1　图示四轮小车的位置由八个参数确定：铰链B的坐标x，y；角θ，χ及轮子转角φ_1，φ_2，φ_3，φ_4。假设轮子与道路间不发生滑动，试列写运动的约束方程。



例9-1图

〔解〕 轮子不发生滑动是指轮子没有横向滑动，并且作纯滚动。前轮无横向滑动，即点 B 的速度沿前轴方向的投影为零，我们有

$$-\dot{x}\sin(\theta+\chi)+\dot{y}\cos(\theta+\chi)=0 \qquad (1)$$

后轮无横向滑动，即点 A 的速度沿后轴方向的投影为零，我们有

$$-\dot{x}\sin\theta+\dot{y}\cos\theta-l\dot{\theta}=0 \qquad (2)$$

轮 1 纯滚动的条件是它与地面相接触的点的速度为零，我们有

$$\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta-a\dot{\theta}-r_1\dot{\varphi}_1=0 \qquad (3)$$

轮 2 纯滚动的条件为

$$\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta+a\dot{\theta}-r_1\dot{\varphi}_2=0 \qquad (4)$$

轮 3 纯滚动的条件为

$$\dot{x}\cos(\theta+\chi)+\dot{y}\sin(\theta+\chi)-c(\dot{\theta}+\dot{\chi})-r_2\dot{\varphi}_3=0 \qquad (5)$$

轮 4 纯滚动的条件为

$$\dot{x}\cos(\theta+\chi)+\dot{y}\sin(\theta+\chi)+c(\dot{\theta}+\dot{\chi})-r_2\dot{\varphi}_4=0 \qquad (6)$$

条件(1)-(6)即为所求六个非完整约束方程。

例9-2 一球沿水平面纯滚动，它的质量按规律

$$m=m_0(1-\beta s) \qquad (1)$$

而减小，其中 m_0，β 为正的常数，s 为球与平面接触点走过的弧长。设球心坐标为 x，y，z，密度为 γ，试列写球运动时由质量变化而引起的约束方程。

〔解〕 当球沿水平面作纯滚动时，它与平面相接触的点的速度为零，这是一些非完整约束条件。这里要求的是由质量变化而引起的非完整约束条件。

球的质量为

$$m=\frac{4}{3}\pi\gamma z^3 \tag{2}$$

由(1)、(2)解出

$$S=\frac{1}{\beta}\left[1-\frac{4}{3m_0}\pi\gamma z^3\right] \tag{3}$$

我们有

$$\dot{s}^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2 \tag{4}$$

将(3)两端对时间 t 求导数，得

$$\dot{s}=-\frac{4\pi\gamma}{m_0\beta}z^2\dot{z} \tag{5}$$

将(5)代入(4)，得

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\frac{16\pi^2\gamma^2}{m_0^2\beta^2}z^4\dot{z}^2 \tag{6}$$

这就是由质量变化引起的非线性非完整约束条件。

例9-3 试用切塔耶夫定义和牛青萍定义给出阿沛尔例的虚位移方程。

〔解〕 阿沛尔例是一非线性非完整约束的典型例子，约束方程为

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2-\frac{a^2}{b^2}\dot{z}^2=0 \tag{1}$$

应用切塔耶夫定义(9-2)于(1)，得到

$$2\dot{x}\delta x+2\dot{y}\delta y-2\frac{a^2}{b^2}\dot{z}\delta z=0$$

或

$$\dot{x}\delta x+\dot{y}\delta y-\frac{a^2}{b^2}\dot{z}\delta z=0 \tag{2}$$

这就是所求虚位移方程，即虚位移 δx，δy，δz 应满足的方程。

应用牛青萍定义(9-3)于约束方程(1)，得到

$$\dot{x}\delta\dot{x}+\dot{y}\delta\dot{y}-\frac{a^2}{b^2}\dot{z}\delta\dot{z}=0 \qquad (3)$$

这就是牛青萍定义给出的速度空间虚位移$\delta\dot{x}$，$\delta\dot{y}$，$\delta\dot{z}$应满足的关系。

例9-4 质量为m的质点受有速度大小为常数的非完整约束$\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta=c^2=\cos st$ (1)

在牛顿中心引力场中运动的罗兹方程为

$$\left.\begin{aligned}&m\ddot{r}-mr\dot{\varphi}^2\cos^2\theta+mr\dot{\theta}_2=-\frac{mM\gamma}{r^2}\\&\qquad+2\lambda\dot{r}\\&m(r^2\ddot{\theta}+2r\dot{r}\dot{\theta})+mr^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\\&\qquad=2\lambda r^2\dot{\theta}\\&m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi}\cos^2\theta)=2\lambda r^2\dot{\varphi}\cos^2\theta\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

其中r，θ，φ为点的球坐标；m，M，γ为常数；λ为约束乘子。

试由方程(1)、(2)求出约束乘子λ作为广义坐 标、广义速度、时间、广义力以及与约束有关的系数的函数。

［解］ 为由(1)、(2)求出约束乘子λ，可先将(1)对时间求导数，再与(2)联合，消去$\ddot{r}$，$\ddot{\theta}$，$\ddot{\varphi}$。将(1)两端对时间t求导数，得

$$\begin{aligned}&\dot{r}\ddot{r}+r^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+r\dot{r}\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\cos^2\theta\\&+r\dot{r}\dot{\varphi}^2\cos^2\theta-r^2\dot{\varphi}^2\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta=0\end{aligned} \qquad (3)$$

由(2)解出$\ddot{r}$，$\ddot{\theta}$，$\ddot{\varphi}$得

$$
\left.\begin{aligned}
\ddot{r} &= r\dot{\varphi}^2\cos^2\theta - r\dot{\theta}^2 - \frac{M\gamma}{r^2} + 2\frac{\lambda}{m}\dot{r} \\
\ddot{\theta} &= -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} - \dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + \frac{2\lambda}{m}\dot{\theta}
\end{aligned}\right\} \qquad (4)
$$

$$
\ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r} + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}tg\theta + \frac{2\lambda}{m}\dot{\varphi}
$$

将(4)代入(3)，得到

$$
\dot{r}\left(r\dot{\varphi}^2\cos^2\theta - r\dot{\theta}^2 - \frac{M\gamma}{r^2} + 2\frac{\lambda}{m}\dot{r}\right) + r^2\dot{\theta}
$$

$$
\left(-\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} - \dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + \frac{2\lambda}{m}\dot{\theta}\right)
$$

$$
+ r^2\dot{\varphi}\cos^2\theta\left(-\frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r} + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}tg\theta + \frac{2\lambda}{m}\dot{\varphi}\right)
$$

$$
+ r\dot{r}\dot{\theta}^2 + r\dot{r}\dot{\varphi}^2\cos^2\theta - r^2\dot{\varphi}^2\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta = 0
$$

由此解得

$$
\lambda = \frac{m}{2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta)}\dot{r}\left(\frac{M\gamma}{r^2} + 2r\dot{\theta}^2\right) \qquad (5)
$$

考虑到约束方程(1)，则(5)可写成

$$
\lambda = \frac{m\dot{r}}{2c^2}\left(\frac{M\gamma}{r^2} + 2r\dot{\theta}^2\right) \qquad (6)
$$

此乘子分别与$2\dot{r}$，$2r^2\dot{\varphi}\cos^2\theta$，$2r^2\dot{\theta}$相乘便得分别对应于广义坐标$r$，$\varphi$，$\theta$的广义约束反力。

例9-5 试由罗兹方程(9-4)导出在什么条件下存在广义

能量积分。

［解］ 为由方程(9-4)导出存在广义能量积分的条件，我们将(9-4)改写成下述形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q''_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_s}$$

$$(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (1)$$

其中$L=T+U$，$Q'_s=\dfrac{\partial U}{\partial q_s}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial U}{\partial \dot{q}_s}$，$Q'_s+Q''_s=Q_s$，即将$Q_s$分成两部分：一部分是有势力$Q'_s$，一部分是无势的力$Q''_s$。

将(1)各式两端同时乘以$\dot{q}_s$并对S求和，得到

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\dot{q}_s$$

$$=\sum_{s=1}^{n}Q''_s\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s \qquad (2)$$

或者写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-L\right)=-\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$+\sum_{s=1}^{n}Q''_s\dot{q}_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s \qquad (3)$$

因此，如果满足下列条件

(1) 拉格朗日函数不显含时间t，即

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0 \qquad (4)$$

(2) 无势的力是陀螺力或不存在，即

$$\sum_{s=1}^{m} Q_s'\dot{q}_s=0 \tag{5}$$

(3) 约束方程对于广义速度是齐次的，即

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s=k\varphi_\beta \tag{6}$$

其中k为齐次性阶指数，那么存在广义能量积分

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L=\text{const} \tag{7}$$

条件(4)，(5)，(6)，即为非完整系统存在广义能量积分(7)的条件。

例9-6 试用牛青萍方程(9-7)建立半径为a的圆球沿水平面纯滚动问题的运动微分方程，设力函数为$U(x, y)$。

[解] 首先列写约束方程。取球心坐标x，y及三个欧拉角ψ，θ，φ为广义坐标，则表示纯滚动的非完整约束条件为

$$\boldsymbol{v}_p=\boldsymbol{v}_c+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{CP}=0 \tag{1}$$

其中C为球心，P为接触点，ω为球的角速度。设$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$为固定轴向单位矢量，则

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{v}_c=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}\\
&\boldsymbol{\omega}=(\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta+\dot{\theta}\cos\psi)\boldsymbol{i}+(-\dot{\varphi}\\
&\cos\psi\sin\theta+\dot{\theta}\sin\psi)\boldsymbol{j}+(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)\boldsymbol{k}\\
&\overline{cp}=-a\boldsymbol{k}
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

将(2)代入(1)，得到

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}+a(\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta-\dot{\theta}\sin\psi)=0\\ \dot{y}+a(\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta+\dot{\theta}\cos\psi)=0\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

这是两个线性非完整约束方程。

其次，列写圆球的动能。我们有

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}ma^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2+\dot{\psi}^2+2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta)\tag{4}$$

将(3)代入(4)，消去$\dot{x}$，$\dot{y}$，得到

$$\widetilde{T}=\frac{1}{2}ma^2\left\{\frac{7}{5}\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\frac{2}{5}(\dot{\varphi}^2+\dot{\psi}^2+2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta)\right\}\tag{5}$$

最后，按牛青萍方程(9-7)进行如下计算：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{\psi}}-\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\psi}=\frac{2}{5}ma^2(\ddot{\psi}+\ddot{\varphi}\cos\theta-\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\theta}=ma^2\left(\frac{7}{5}\ddot{\theta}-\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta+\frac{2}{5}\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\varphi}}-\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \varphi}=ma^2(\ddot{\varphi}\sin^2\theta+2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta$$

$$+\frac{2}{5}\ddot{\varphi}+\frac{2}{5}\ddot{\psi}\cos\theta-\frac{2}{5}\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\psi}}-\frac{\partial \dot{x}}{\partial \psi}\right)+\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\psi}}-\frac{\partial \dot{y}}{\partial \psi}\right)$$

$$=m\dot{x}a(-\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta-\dot{\theta}\cos\psi)+m\dot{y}a(\dot{\varphi}\cos\psi$$

$$\sin\theta-\dot{\theta}\sin\psi)=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial \dot{x}}{\partial \theta}\right)+\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial \dot{y}}{\partial \theta}\right)$$

$$=m\dot{x}(a\dot{\psi}\cos\psi+a\dot{\varphi}\cos\psi\cos\theta)$$

$$+m\dot{y}(a\dot{\psi}\sin\psi+a\dot{\varphi}\sin\psi\cos\theta)$$

$$=-ma^2\dot{\varphi}\sin\theta(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\varphi}}-\frac{\partial \dot{x}}{\partial \varphi}\right)+\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\varphi}}-\frac{\partial \dot{y}}{\partial \varphi}\right)$$

$$=m\dot{x}a(\dot{\psi}\sin\psi\sin\theta-\dot{\theta}\cos\psi\cos\theta)+m\dot{y}a$$

$$\times(-\dot{\psi}\cos\psi\sin\theta-\dot{\theta}\sin\psi\cos\theta)$$

$$=ma_2\dot{\theta}\sin\theta(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial T}{\partial y}=0$$

$$Q_x=\frac{\partial U}{\partial x},\ Q_y=\frac{\partial U}{\partial y},\ Q_\psi=Q_\theta=Q_\varphi=0$$

$$\tilde{Q}_\psi = Q_\psi + Q_x \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\psi}} + Q_y \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\psi}} = 0$$

$$\tilde{Q}_\theta = Q_\theta + Q_x \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\theta}} + Q_y \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial U}{\partial x} a \sin\psi - \frac{\partial U}{\partial y} a \cos\psi$$

$$\tilde{Q}_\varphi = Q_\varphi + Q_x \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\varphi}} + + Q_y \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\varphi}} = -\frac{\partial U}{\partial x} a \cos\psi \sin\theta - \frac{\partial U}{\partial y} a \sin\psi \sin\theta$$

将上列各式代入牛青萍方程(9-7)，最后得到

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{2}{5} m a^2 (\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta) = 0 \\
&\frac{7}{5} m a^2 (\ddot{\theta} + \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta) = a\left(\frac{\partial U}{\partial x} \times \sin\psi - \frac{\partial U}{\partial y}\cos\psi\right) \\
&m a^2 \left(\ddot{\varphi}\sin^2\theta + \frac{2}{5}\ddot{\varphi} + \frac{2}{5}\ddot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta - \frac{7}{5}\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\right) \\
&\quad = -a\sin\theta\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cos\psi + \frac{\partial U}{\partial y}\sin\psi\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

方程(6)即为所求运动微分方程。

例9-7 试由牛青萍方程(9-7)导出在什么条件下有广义能量积分存在。

[解] 为此将牛青萍方程(9-7)改写为下列形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial q_{s+\beta}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_{s+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \dot{q}_{s+\beta}}{\partial q_\sigma}\right)$$

$$-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial q_{s+\beta}}\frac{\partial \dot{q}_{s+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}=\tilde{Q}''_\sigma \qquad (1)$$

其中：$L=T+U$，$Q_s=Q'_s+Q''_s$，$Q'_s=\frac{\partial U}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_s}$

$$\tilde{Q}'_\sigma=Q'_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}Q'_{s+\beta}\frac{\partial \dot{q}_{s+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}$$

$$\tilde{Q}'_\sigma=Q''_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}Q'_{s+\beta}\frac{\partial \dot{q}_{s+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}$$

$$\tilde{L}=\tilde{T}+\tilde{U}$$

将(1)各式两端同时乘以$\dot{q}_\sigma$并对σ求和，得到

$$\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma-\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma-\sum_{\sigma=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{g}$$

$$\times\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_{s+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \dot{q}_{s+\beta}}{\partial q_\sigma}\right)\dot{q}_\sigma$$

$$-\sum_{\sigma=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial q_{s+\beta}}\frac{\partial \dot{q}_{s+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma=\sum_{\sigma=\beta}^{s}\tilde{Q}''_\sigma-\dot{q}_\sigma$$

或者写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma-\tilde{L}\right)=-\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_{s+\beta}}\dot{q}_{s+\beta}$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{s}\tilde{Q}''_\sigma\dot{q}_\sigma+\sum_{\beta=A}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{s+\beta}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial \dot{q}_{s+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma-\dot{q}_{s+\beta}\right)$$

$$
+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}}{\partial t}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\sigma=1}^{g}\frac{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}\dot q_{\varepsilon+\gamma}
$$

$$
+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot q_{\sigma}}\dot q_{\sigma}=-\frac{\partial L}{\partial t}+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}Q''_{\sigma}\dot q_{\sigma}
$$

$$
+\sum_{\beta=1}^{g}Q''_{\varepsilon+\beta}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot q_{\sigma}}\dot q_{\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}
$$

$$
\frac{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot q_{\sigma}}\dot q_{\sigma}-\dot q_{\varepsilon+\beta}\Big)+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\Big(\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot q_{\sigma}}\dot q_{\sigma}
$$

$$
-\dot q_{\varepsilon+\beta}\Big) \tag{2}
$$

于是，如果下述条件满足

（1）拉格朗日函数L不显含t，即

$$
\frac{\partial L}{\partial t}=0, \tag{3}
$$

（2）无势力为陀螺力或不存在，即

$$
\sum_{s=1}^{m}Q''_{s}\dot q_{s}=0 \tag{4}
$$

（3）$\dot q_{\varepsilon+\beta}$相对$\dot q_{\sigma}$是一阶齐次函数，即

$$
\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot q_{\sigma}}\dot q_{\sigma}=\dot q_{\varepsilon+\beta} \tag{5}
$$

则(2)成为

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial L}{\partial \dot q_{\sigma}}\dot q_{\sigma}-L\Big)=0
$$

由此得到非完整系统的广义能量积分

$$\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_{\sigma}}\dot{q}_{\sigma}-\tilde{L}=\text{const} \tag{6}$$

例9-8 已知动能表达式为

$$T=T_{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{m=1}^{n}A_{km}\dot{q}_{k}\dot{q}_{m} \tag{1}$$

其中

$$A_{km}=A_{mk}=\sum_{i=1}^{N}m_{i}\frac{\partial \boldsymbol{r}_{i}}{\partial q_{k}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_{0}}{\partial q_{m}} \tag{2}$$

试将加速度能量S用系数A_{km}及广义加速度 $\ddot{q}_{\sigma}$ 表示出来。

[解] 因 $\dot{\boldsymbol{r}}_{i}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_{i}}{\partial q_{s}}\dot{q}_{s}$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{i}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_{i}}{\partial q_{s}}\ddot{q}_{s}+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^{2}\boldsymbol{r}_{i}}{\partial q_{s}\partial q_{k}}\dot{q}_{s}\dot{q}_{k}$$

故

$$\begin{aligned}S&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_{i}\ddot{\boldsymbol{r}}_{i}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_{i}\\&=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\ddot{q}_{s}\ddot{q}_{k}\sum_{i=1}^{N}m_{i}\frac{\partial \boldsymbol{r}_{i}}{\partial q_{s}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_{i}}{\partial q_{k}}\\&+\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\ddot{q}_{r}\dot{q}_{s}\dot{q}_{k}\sum_{i=1}^{N}m_{i}\frac{\partial^{2}\boldsymbol{r}}{\partial q_{k}q_{s}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_{i}}{\partial q_{r}}\\&\quad\cdots\cdots\cdots\end{aligned} \tag{3}$$

其中未写出之项不含 $\ddot{q}_{s}$。又

$$\frac{\partial A_{sk}}{\partial q_r}=\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_r \partial q_s}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\cdot\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_r \partial q_k}\right)$$

$$\frac{\partial A_{kr}}{\partial q_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s \partial q_k}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_r}+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s \partial q_r}\right)$$

$$\frac{\partial A_{rs}}{\partial q_k}=\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k \partial q_r}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_r}\cdot\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k \partial q_s}\right)$$

故

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s \partial q_k}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_r}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{rs}}{\partial q_k}+\frac{\partial A_{kr}}{\partial q_s}-\frac{\partial A_{sk}}{\partial q_r}\right)\equiv[S,\ k,\ r] \tag{4}$$

是为第一类克里斯朵夫记号。

将(2)(4)代入(3)，使得

$$S=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\ddot{q}_s\ddot{q}_k+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}[s,\ k,\ r]\dot{q}_s\dot{q}_k\ddot{q}_r+\cdots \tag{5}$$

其中未写出之项不含$\ddot{q}_s$。因此只要知道系数A_{sk}便可按(5)构造加速度能量S。

例9-9 试用阿沛尔方程(9-10)解阿沛尔例。

[解] 阿沛尔例是一质量为m的质点受有非线性非完整约束

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2-\frac{a^2}{b^2}\dot{z}^2=0 \tag{1}$$

在重力作用下的运动问题。

加速度能量为

$$S=\frac{1}{2}m(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2) \tag{2}$$

将(1)两端对时间t求导数，得到

$$\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}-\frac{a^2}{b^2}\dot{z}\ddot{z}=0 \tag{3}$$

考虑到(1)，则(3)可写成

$$\ddot{z}=\pm\frac{b}{a\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}) \tag{4}$$

将(4)代入(2)消去$\ddot{z}$，得到

$$\tilde{S}=\frac{1}{2}m\left[\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\frac{b^2}{a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})^2\right]$$

按阿沛尔方程(9-10)作下列计算。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\ddot{x}}=m\left[\ddot{x}+\frac{b^2}{a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})\dot{x}\right]\\
&\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\ddot{y}}=m\left[\ddot{y}+\frac{b^2}{a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})\dot{y}\right]\\
&Q_x=Q_y=0,\ Q_z=-mg\\
&\tilde{Q}_x=Q_x+Q_z\frac{\partial\dot{z}}{\partial\dot{x}}=-mg\frac{b\dot{x}}{a\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\\
&\qquad(\text{令}\dot{z}>0)\\
&\tilde{Q}_y=Q_y+Q_z\frac{\partial\dot{z}}{\partial\dot{y}}=-mg\frac{b\dot{y}}{a\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

阿沛尔方程(9-10)给出

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \ddot{x}}=\tilde{Q}_x,\quad \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \ddot{y}}=\tilde{Q}_y \tag{7}$$

将(6)代入(7)，得到

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}+\frac{b^2\dot{x}}{a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})&=-\frac{gb\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\\ \ddot{y}+\frac{b^2\dot{y}}{a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})&=-\frac{gb\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

例9-10 对任意函数$f(q_s,\ \dot{q}_s,\ t)$，考虑到非完整约束(9-5)，令

$$\tilde{f}(q_s,\ \dot{q}_\sigma,\ t)=f(q_s,\ \dot{q}_\sigma,\ \dot{q}_{\varepsilon+\beta}(q_s,\ \dot{q}_\sigma,\ t),t) \tag{1}$$

我们定义尼尔森算子

$$N_\sigma=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\sigma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-2\frac{\partial}{\partial q_\sigma} \tag{2}$$

及欧拉算子

$$\varepsilon_\sigma=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial}{\partial q_\sigma} \tag{3}$$

则对任意函数$\tilde{f}$，有

$$N_\sigma(\tilde{f})=\varepsilon_\sigma(\tilde{f})+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\cdot\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma} \tag{4}$$

试证明关系(4)。

[证明] 按(2)，有

$$N_\sigma(\tilde{f})=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}\tilde{f}}{\mathrm{d}t}-2\frac{\partial \tilde{f}}{\partial q_\sigma}=\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}$$

$$
+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \dot f}{\partial q_{s+\beta}}\frac{\partial \ddot q_{s+\beta}}{\partial \dot q_\sigma}-2\frac{\partial f}{\partial q_\sigma}-2\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial f}{\partial \dot q_{s+\beta}}\frac{\partial \dot q_{s+\beta}}{\partial q_\sigma}
$$

$$
=\frac{\partial \dot f}{\partial \dot q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \dot f}{\partial \dot q_{s+\beta}}\frac{\partial \dot q_{s+\beta}}{\partial \dot q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \dot f}{\partial \ddot q_{s+\beta}}\frac{\partial \dot q_{s+\beta}}{\partial \dot q_\sigma}
$$

$$
-2\frac{\partial f}{\partial q_\sigma}-2\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial f}{\partial \dot q_{s+\beta}}\frac{\partial \dot q_{s+\beta}}{\partial q_\sigma} \tag{5}
$$

按(3)，有

$$
\varepsilon_\sigma(\bar f)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \bar f}{\partial \dot q_\sigma}-\frac{\partial \bar f}{\partial q_\sigma}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot q_{s+\beta}}\frac{\partial \dot q_{s+\beta}}{\partial \dot q_\sigma}
$$

$$
+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial f}{\partial \dot q_{s+\beta}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot q_{s+\beta}}{\partial \dot q_\sigma}-\frac{\partial f}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial f}{\partial \dot q_{s+\beta}}\frac{\partial \dot q_{s+\beta}}{\partial q_\sigma} \tag{6}
$$

容易证明，对任意函数$f(q_s,\ \dot q_s,\ t)$，有

$$
N_s(f)=\varepsilon_s(f) \tag{7}
$$

实际上，有

$$
N_s(f)=\frac{\partial}{\partial \dot q_s}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}-2\frac{\partial f}{\partial q_s}=\frac{\partial}{\partial \dot q_s}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot q_k
$$

$$
+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \dot q_k}\ddot q_k+\frac{\partial f}{\partial t}\Big)-2\frac{\partial f}{\partial q_s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial \dot q_s\partial q_k}\dot q_k
$$

$$
+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial \dot q_s\partial \dot q_k}\ddot q_k+\frac{\partial^2 f}{\partial \dot q_s\partial t}-\frac{\partial f}{\partial q_s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot q_s}
$$

$$
-\frac{\partial f}{\partial q_s}=\varepsilon_s(f)
$$

因此有

$$\frac{\partial f}{\partial q_s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial f}{\partial q_s} \tag{8}$$

由(5)、(6)，利用(8)，得到

$$N_\sigma(\tilde{f})=\varepsilon_\sigma(\tilde{f})+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial q_{s+\beta}}\frac{\partial \dot{q}_{s+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_{s+\beta}}$$

$$\times\left(\frac{\partial \ddot{q}_{s+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_{s+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \dot{q}_{s+\beta}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial \dot{q}_{s+\beta}}{\partial q_{s+\gamma}}\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial \dot{q}_{s+\gamma}}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) \tag{9}$$

容易直接证明下述关系

$$\frac{\partial \ddot{q}_{s+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_{s+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}+\frac{\partial \dot{q}_{s+\beta}}{\partial q_\sigma}+\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial \dot{q}_{s+\beta}}{\partial q_{s+\gamma}}\frac{\partial \dot{q}_{s+\gamma}}{\partial \dot{q}_\sigma} \tag{10}$$

将(10)代入(9)，便得

$$N_\sigma(\tilde{f})=\varepsilon_\sigma(\tilde{f})+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial q_{s+\beta}}\frac{\partial \dot{q}_{s+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}$$

三、习题

9-1 试列写两个轴相联结的轮子沿水平面滚动问题的约束方程。已知两轮半径皆为R，连杆长为$2a$，连杆垂直于轮面。系统运动时，轮面保持在铅垂面内，并且每个轮子可自由地绕其轴转动。设连杆中心坐标为(x, y, R)，轮与平

面接触点联线与轴ox的夹角为θ，两轮自转角为φ_1，φ_2。

答：取x，y，θ，φ_1，φ_2为广义坐标，约束方程为

$$-\dot{x}\sin\theta+\dot{y}\cos\theta+a\dot{\theta}+R\dot{\varphi}_1=0$$

$$-\dot{x}\sin\theta+\dot{y}\cos\theta-a\dot{\theta}+R\dot{\varphi}_2=0$$

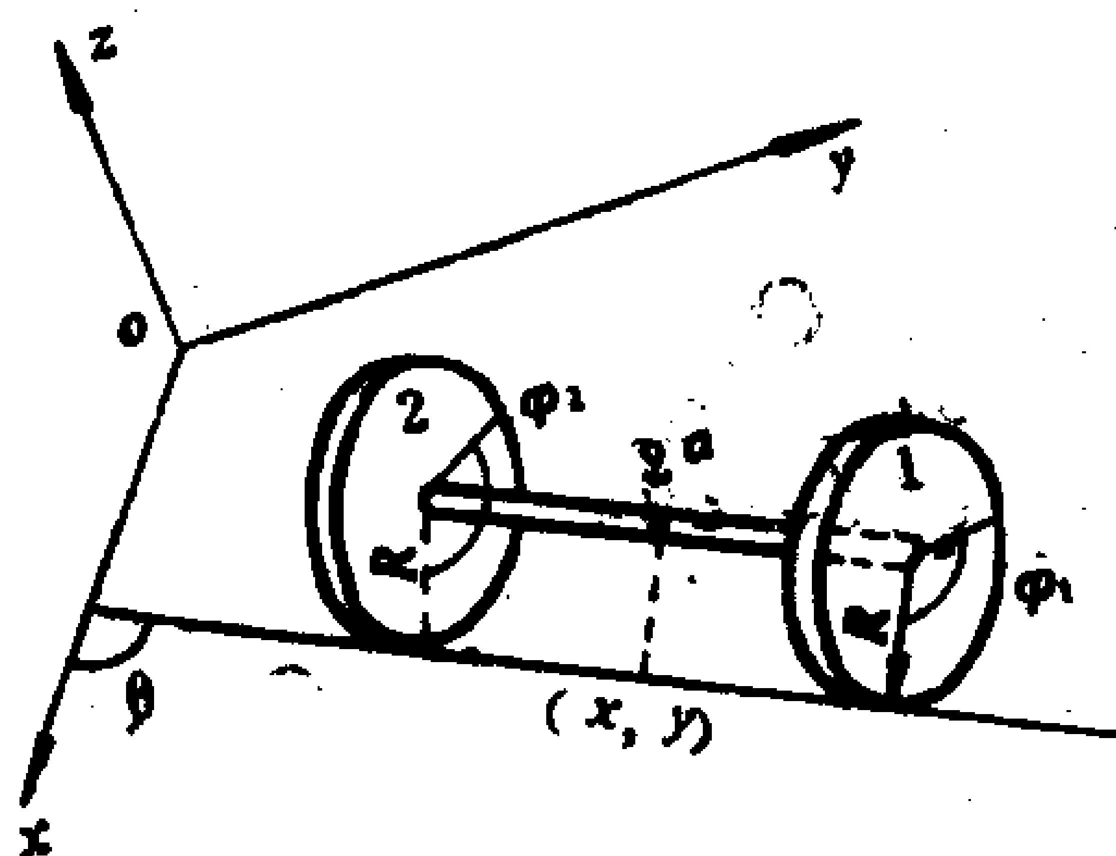
$$\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta=0$$

9-2　半径为a的匀质重球在半径为b的铅垂固定圆柱的粗糙内壁上滚动与转动，试列写运动的约束方程。

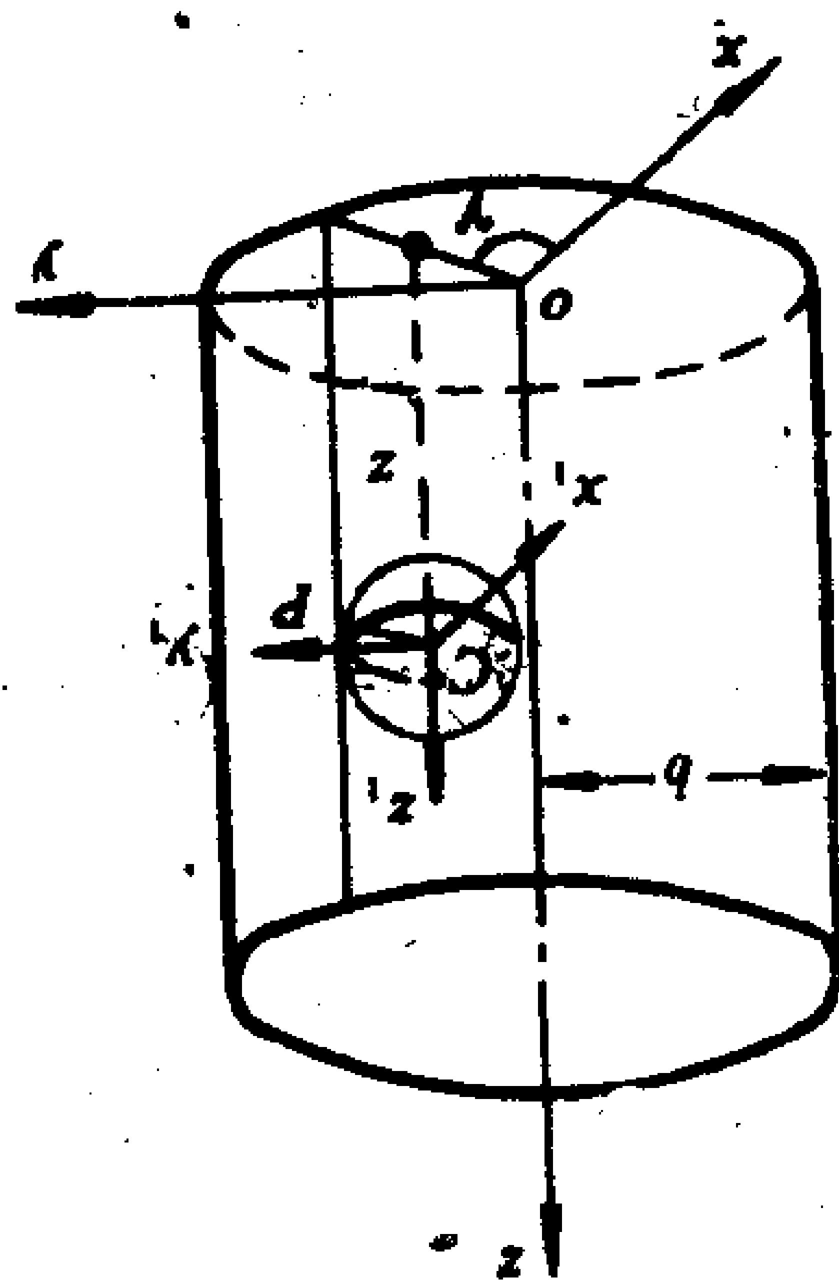
答：取球心c的坐标γ，z及三个欧拉角ψ，θ，φ为广义坐标。非完整约束条件表示球与圆柱接触点P的速度为零，即

$$(b-a)\dot{\gamma}+a\dot{\psi}+a\dot{\varphi}\cos\theta=0$$

$$\dot{z}-a\dot{\theta}\sin(\psi-\gamma)+a\dot{\varphi}\sin\theta\cos(\psi-\gamma)=0$$



题9-1图



题9-2图

9-3　半径为R的匀质圆球沿粗糙水平面滚动，水平面以常角速度Ω绕铅垂固定轴转动，试列写圆球运动的约束方

程。

答：取球心坐标x，y及欧拉角ψ，θ，φ为广义坐标，约束方程为

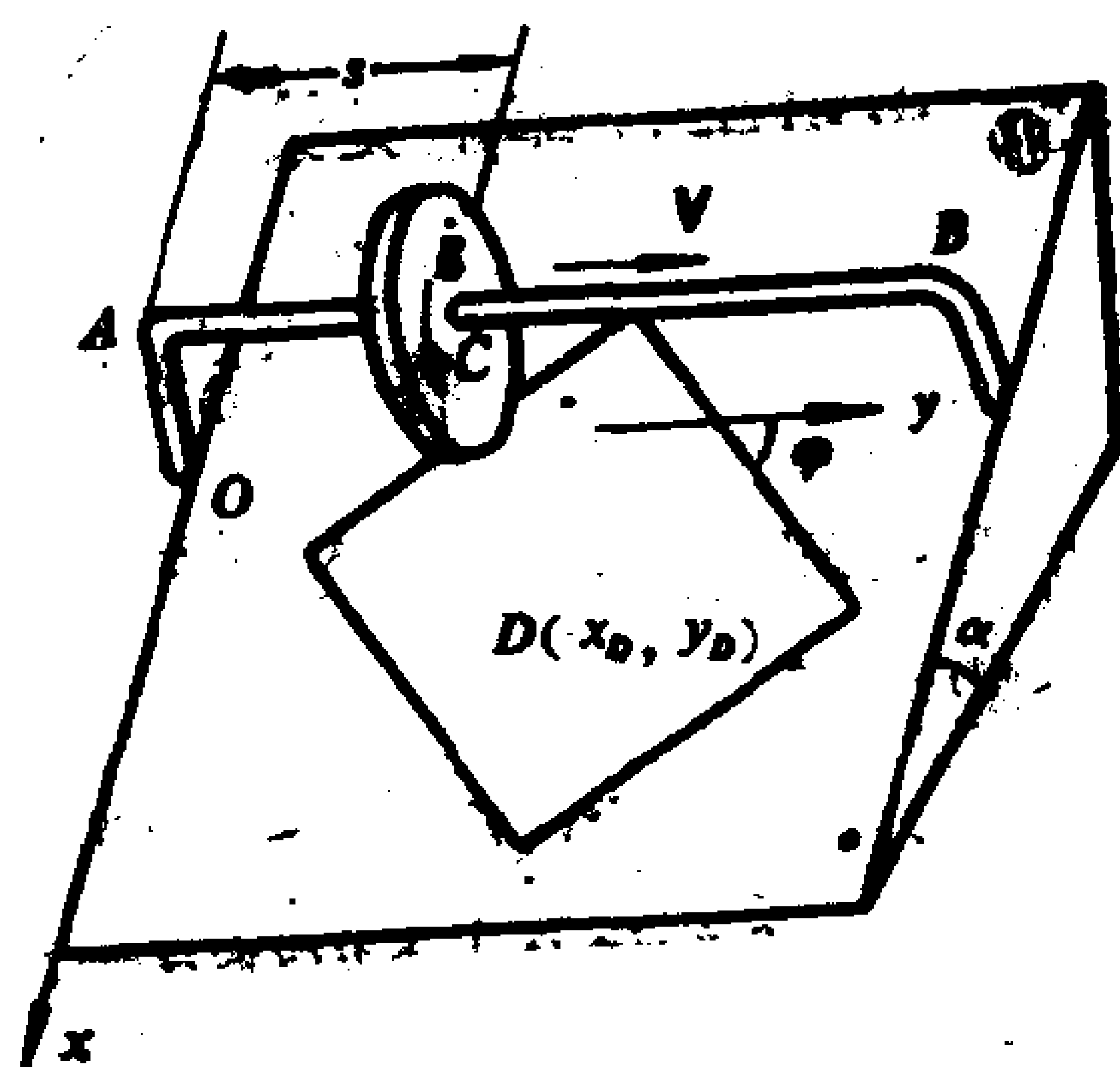
$$\dot{x}+a(\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi)+\Omega y=0$$

$$\dot{y}+a(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi)-\Omega x=0$$

9-4 半径为r的匀质圆盘C套在水平轴AB上，圆盘可绕AB转动，同时沿AB轴以匀速v运动；边长为l的匀质正方形薄板D放在倾角为α的光滑斜面上，并与圆盘相切。设薄板与圆盘间有足够的摩擦力使板与盘之间没有相对滑动(如图示)。试以薄板中心D的坐标x_D，y_D，板边与水平线夹角φ以及圆盘绕轴AB的转角θ为广义坐标，列写系统运动的约束方程。

答：表示盘与板间无相对滑动的约束方程为

$$\dot{x}_D+(s-y_D)\dot{\varphi}+r\dot{\theta}=0,\quad \dot{y}_D+x_D\dot{\varphi}-v=0$$



题9-4图

9-5 一质点在空间运动时受到速度大小为常数的非完整约束，试列写约束方程，并用切塔耶夫定义给出虚位移

δx，δy，δz 之间的关系。

答：$\dot{x}\delta x+\dot{y}\delta y+\dot{z}\delta z=0$

9-6　对题9-4利用切塔耶夫定义给出虚位移满足的关系。

答：$\delta x_D+(s-y)\delta\varphi+r\delta\theta=0$，$\delta y_D+x_D\delta\varphi=0$

9-7　在查浦雷金-卡拉提奥多里问题中，确定系统位置的参数为x，y，θ，约束方程为

$$\dot{y}=\dot{x}\operatorname{tg}\theta$$

试用切塔耶夫定义给出虚位移 δx，δy，$\delta\theta$ 之间的关系。

答：$\delta y=\delta x\operatorname{tg}\theta$

9-8　对半径为R的匀质圆球沿粗糙水平面作纯滚动问题，应用牛青萍定义给出速度空间虚位移$\delta\dot{x}$，$\delta\dot{y}$，$\delta\dot{\psi}$，$\delta\dot{\theta}$，$\delta\dot{\varphi}$之间的关系。

答：$\delta\dot{x}+R(\delta\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta-\delta\dot{\theta}\sin\psi)=0$

$$\delta\dot{y}+R(\delta\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta+\delta\dot{\theta}\cos\psi)=0$$

其中x，y为球心坐标，ψ，θ，φ为欧拉角。

9-9　对题9-5，应用牛青萍定义给出速度空间虚位移之间的关系。

答：$\dot{x}\delta\dot{x}+\dot{y}\delta\dot{y}+\dot{z}\delta\dot{z}=0$

9-10　对四轮小车问题(例9-1)应用牛青萍定义给出速度空间虚位移之间的关系。

答：$-\delta\dot{x}\sin(\theta+x)+\delta\dot{y}\cos(\theta+x)=0$

$$-\delta\dot{x}\sin\theta+\delta\dot{y}\cos\theta-l\delta\dot{\theta}=0$$

$$\delta\dot{x}\cos\theta+\delta\dot{y}\sin\theta-a\delta\dot{\theta}-r_1\delta\dot{\varphi}_1=0$$

$$\delta\dot{x}\cos\theta+\delta\dot{y}\sin\theta+a\delta\dot{\theta}-r_1\delta\dot{\varphi}_2=0$$

$$\delta\dot{x}\cos(\theta+\chi)+\delta\dot{y}\sin(\theta+\chi)-c(\delta\dot{\theta}+\delta\chi)$$

$$-r_2\delta\dot{\varphi}_3=0$$

$$\delta\dot{x}\cos(\theta+\chi)+\delta\dot{y}\sin(\theta+\chi)+c(\delta\dot{\theta}+\delta\dot{\chi})$$

$$-r_2\delta\dot{\varphi}_4=0$$

9-11 查浦雷金-卡拉提奥多里问题的约束方程为

$$\dot{x}\sin\theta-\dot{y}\cos\theta=0 \qquad (a)$$

罗兹方程为

$$\left.\begin{aligned}&m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}-a\dot{\theta}\sin\theta)=\dot{\lambda}\sin\theta\\&m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{y}+a\dot{\theta}\cos\theta)=-\dot{\lambda}\cos\theta\\&(J_0+ma^2)\ddot{\theta}+ma\dot{\theta}(\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta)=0\end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

试由$(a)(b)$求出不定乘子λ作为广义速度，广义坐标、质量、转动惯量以及与约束有关的系数的函数。

答：$\lambda=-\dfrac{mJ_0\dot{x}\dot{\theta}}{(J_0+ma^2)\cos\theta}$

9-12 一质量为m的质点在重力作用下运动，它的运动受有形如

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2-\frac{a^2}{b^2}\dot{z}^2=0$$

的非线性非完整约束，试用罗兹方程(9-4)建立问题的运动微分方程，并求出不定乘子 λ。

答：罗兹方程为

$$m\ddot{x}=2\lambda\dot{x},\quad m\ddot{y}=2\lambda\dot{y},$$

$$m\ddot{z}=-mg-2\frac{a^2}{b^2}\lambda\dot{z}$$

不定乘子

$$\lambda=-\frac{\text{[illegible]}\frac{a^2}{b^2}\dot{z}}{2\left[\dot{x}^2+\dot{y}^2+\frac{a^4}{b^4}\dot{z}^2\right]}$$

9-13 一质量为m的质点A在重力作用下在铅垂平面oxy上运动，它对另一质点B进行追踪(如图示)。质点B以已知规律$x=\xi(t)$沿水平轴ox运动。试用罗兹方程建立质点A的运动微分方程并求出不定乘子λ。

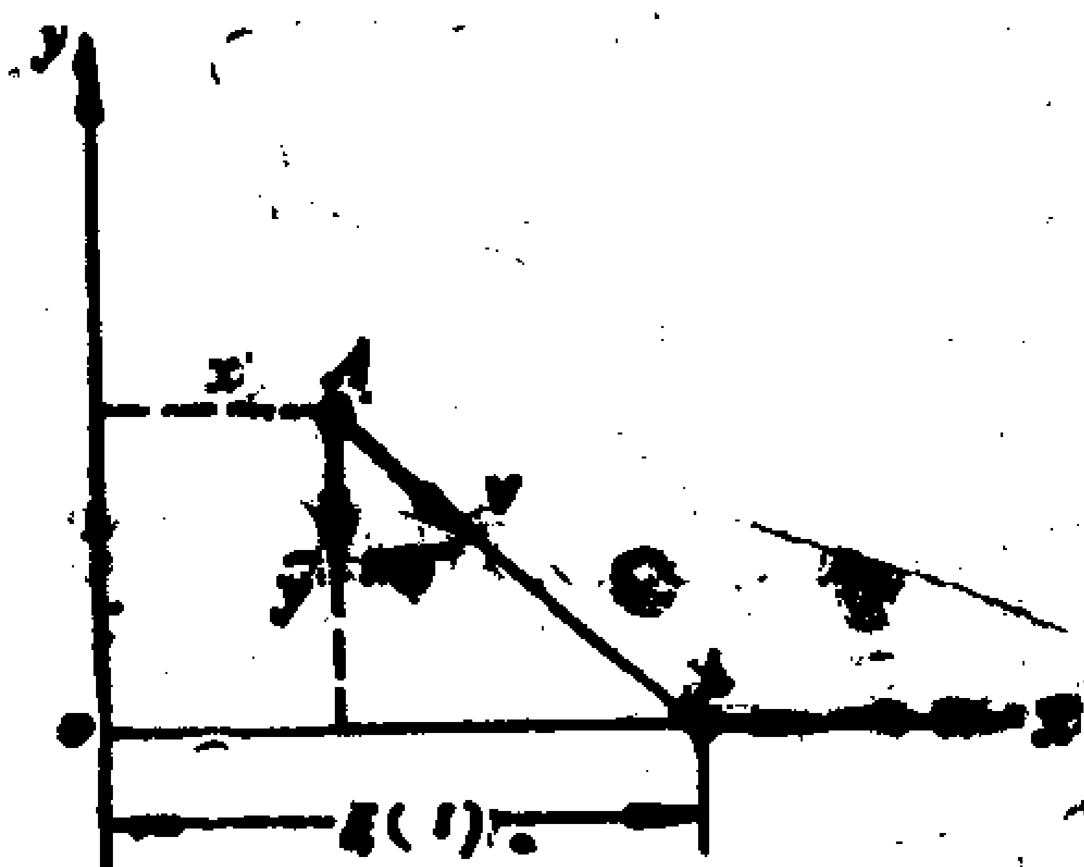
答：约束方程为

$$\dot{y}=\frac{y}{x-\xi}\dot{x}$$

罗兹方程为

$$m\ddot{x}=-\lambda\frac{y}{x-\xi},\quad m\ddot{y}=\lambda-mg.$$

不定乘子 $\lambda=\frac{m}{(x-\xi)^2+y^2}[g(x-\xi)^2+\dot{x}y\dot{\xi}]$。



题9-13图

9-14 试用罗兹方程建立质量为m，半径为a的匀质圆

盘在重力作用下沿粗糙水平面滚动问题的运动微分方程。

答：以圆盘中心坐标x，y及欧拉角ψ，θ，φ为广义坐标，非完整约束方程为

$$\dot{x}+a(\dot{\psi}\cos\psi\cos\theta-\dot{\theta}\sin\psi\sin\theta+\dot{\varphi}\cos\psi)=0$$

$$\dot{y}+a(\dot{\psi}\sin\psi\cos\theta+\dot{\theta}\cos\psi\sin\theta+\dot{\varphi}\sin\psi)=0$$

动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}$$

$$\times[A\dot{\theta}^2+A\dot{\psi}^2\sin^2\theta+C(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})^2]$$

其中A为圆盘对过中心在其平面内的轴的主惯性矩，C为圆盘对过中心垂直于其平面的轴的主惯性矩。

9-15 试用牛青萍方程(9-7)建立题9-13的不带乘子的运动微分方程。

$$答：\ddot{x}\left[1+\frac{y^2}{(x-\xi)^2}\right]+\frac{y^2\dot{x}\dot{\xi}}{(x-\xi)^3}=-\frac{gy}{(x-\xi)}$$

9-16 试用诺沃谢洛夫方程(9-6)建立题9-12的不带乘子的运动微分方程。

答：设$z>0$，有

$$\ddot{x}+\frac{b^2\dot{x}(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})}{a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}=-\frac{gb\dot{x}}{a\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$$

$$\ddot{y}+\frac{b^2\dot{y}(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})}{a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}=-\frac{gb\dot{y}}{a\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$$

9-17 试由题9-11的方程(a)、(b)消去乘子λ而导出能量积分。

答：$\frac{1}{2}m\frac{\dot{x}^2}{\cos^2\theta}+\frac{1}{2}(J_c+ma^2)\dot{\theta}^2=h$。

9-18　试写出题9-12的能量积分。

答：$\frac{1}{2}m\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+mgz=h$

9-19　试由诺沃谢洛夫方程(9-6)导出在什么条件下存在广义能量积分。

答：参看例9-7。

9-20　试用例9-8的结果写出例9-6的加速度能量S。

答：$S=\frac{1}{2}m(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}ma^2[\ddot{\theta}^2+\ddot{\varphi}^2$

$+\ddot{\psi}^2+2\ddot{\psi}\ddot{\varphi}\cos\theta+2\sin\theta(\ddot{\theta}\dot{\varphi}\dot{\psi}-\ddot{\psi}\dot{\theta}\dot{\varphi}$

$-\ddot{\varphi}\dot{\theta}\dot{\psi})]+\cdots$

9-21　试写出题9-13的加速度能量S及$\bar{S}$，并建立阿沛尔方程。

答：$S=\frac{1}{2}m(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2)$

$\bar{S}=\frac{1}{2}m\ddot{x}^2+\frac{1}{2}m\frac{y^2}{(x-\xi)^4}[\ddot{x}(x-\xi)$

$+\dot{x}\dot{\xi}]^2$

9-22　试用阿沛尔方程建立题9-4的运动微分方程。已知圆盘质量为m_c，薄板质量为m_D。系统在重力作用下运动。

答：$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_cr^2\right)\ddot{\theta}^2+\frac{1}{2}m_D(\ddot{x}_D^2+\ddot{y}_D^2)$

$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}m_Dl^2\right)\ddot{\varphi}^2$

取$\ddot{x}_D$，$\ddot{y}_D$为独立的广义加速度，阿沛尔方程(9-10)给出

$$2m_D\ddot{x}_D - m_C r\ddot{\theta} = 2m_D g\sin\alpha$$

$$6m_D x_D \ddot{y}_D + 3m_C r(S - y_D)\ddot{\theta} - m_D l^2\ddot{\varphi} = 0$$

9-23 试用阿沛尔方程解题9-1中系统在重力作用下的运动。已知匀质连杆的质量为m，不计轮子重量；平面oxy与水平成α角，ox为最大倾斜线，oy为水平。

答：$S = \frac{1}{2}m(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) + \frac{1}{2}\frac{1}{3}ma^2\ddot{\theta}^2$

取$\ddot{y}$为不独立广义加速度，则

$$\tilde{S} = \frac{1}{2}m[\ddot{x}^2 + \ddot{x}\text{ctg}^2\theta - \frac{2\ddot{x}\dot{x}\dot{\theta}\text{ctg}\theta}{\sin^2\theta}]$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ma^2\ddot{\theta}^2$$

阿沛尔方程给出

$$\left.\begin{aligned}&m\left(\frac{\ddot{x}}{\sin^2\theta} - \frac{\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta}{\sin^2\theta}\right) = mg\sin\theta\\&\frac{1}{3}ma^2\ddot{\theta} = 0\end{aligned}\right\}$$

9-24 试用广义尼尔森方程(9-17)建立题9-23的运动微分方程。

答：$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ma^2\dot{\theta}^2$

$$\tilde{T} = \frac{m\dot{x}^2}{2\sin^2\theta} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}ma^2\dot{\theta}^2$$

$$\dot{\tilde{T}} = \frac{m\dot{x}\ddot{x}}{\sin^2\theta} - m\dot{x}^2\dot{\theta}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{1}{3}a^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

广义尼尔森方程(9-17)给出

$$\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{x}}-2\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial x}-\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}\left(\frac{\partial\ddot{y}}{\partial\dot{x}}-2\frac{\partial\dot{y}}{\partial x}\right)-\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{x}}=\tilde{Q}_x$$

$$\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\dot{\theta}}-2\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\theta}-\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}\left(\frac{\partial\ddot{y}}{\partial\dot{\theta}}-2\frac{\partial\dot{y}}{\partial\theta}\right)-\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{\theta}}=\tilde{Q}_\theta$$

9-25 试用广义尼尔森方程(9-17)建立题9-13的运动微分方程。

9-26 试用广义尼尔森方程(9-17)列写题9-12的运动微分方程。

9-27 设力学系统的位形由n个广义坐标q_1，q_2，…，q_n来确定，此系统的运动受有g个线性、齐次、稳定的非完整约束

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\dot{q}_\sigma\quad(\beta=1,2,\cdots,g;\ \varepsilon=n-g)\qquad(a)$$

并且系数$B_{\varepsilon+\beta,\sigma}$仅为$q_1$，$q_2$，…，$q_\varepsilon$的函数。设系统有$g$个循环坐标$q_{\varepsilon+1}$，$q_{\varepsilon+2}$，…，$q_n$，并且有力函数$U=U(q_1,q_2,\cdots,q_\varepsilon)$，则非完整系统的运动用查浦雷金方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\widetilde{T}}{q\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\gamma+1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\gamma}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\gamma}\right)\dot{q}_\gamma=0$$

$$(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon)\qquad(b)$$

试利用例9-10的结果将方程(*b*)变换为尼尔森方程。

9-28 试利用例9-10的结果将牛青萍方程(9-7)变换为广义尼尔森方程(9-17)。

参考文献

[1] Whittaker.E.T, A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies , Fourth edition, Cambridge, 1952。

[2] 汪家訸，分析动力学，高教出版社，1958年。

[3] Лурье.А.И, Аналитическая Механика, ФМ, 1961。

[4] Гантмахер.Ф.Р, Лекчии по аналитической механике, ФМ, 1960。

[5] Pars.L.A,Atreatise on analytical dynamics. London, 1965。

[6] 玉光远，应用分析动力学，高教出版社，1981年。

[7] 格林伍德，D.T，经典动力学(孙国锟译)，科学出版社，1982年。

[8] Desloge.E.A, Classical mechanics, Ⅰ, Ⅱ, New York, 1982。

[9] 刘永，分析力学，黑龙江科技出版社，1984年。

[10] 吴镇，分析力学，上海交通大学，1984年。

[11] 黄昭度、纪辉玉，分析力学，清华大学出版社，1985年。

[12] 谈开孚等，分析力学，哈尔滨工业大学出版社，1985年。

[13] 陈滨，分析动力学，北京大学出版社，1987年。

[14] 梅凤翔、刘桂林，分析力学基础，西安交通大学出版社，1987年。

[15] 清华大学理论力学教研组，理论力学，高教出版社，1961年。

[16] 周衍柏，理论力学教程，高教出版社，1979年。

[17] 西安交通大学理论力学教研室，理论力学，人民教育出版社，1979年。

[18] 哈尔滨工业大学理论力学教研室，理论力学，人民教育出版社，1981年。

[19] 朱照宣、周起剑、殷金生，理论力学，北京大学出版社，1982年。

[20] 梅凤翔，非完整系统力学基础，北京工业学院出版社，1985年。

[21] Пятницкий. Е.С等，分析力学习题集(刘正福、王忠礼译)，华东工程学院，1982年。

[22] Бухгольц.Н.Н., Воронков.И.М, Минаков. А.П., Сборник задач по теоретической механике. М. Л. Гостехиздат, 1949.

[23] Мещерский.И.В., Сборник задач по Теоретической Механике, 34-е изд.М, Наука, 1975.

[24] 俊藤宪一等，详解力学演习，1971年。

[25] Сборник заданий для курсовых работ по теоретической Механике, Яблонского. А.А, Москва, высшая шкопа, 1978.

[26] 上海市业余工业大学力学教研室，理论力学习题选集，1980年。

[27] 别列卓娃.O.A等，理论力学习题集(北京航空学院理论力学教研室译)，1982年。

[28] 吕茂烈，理论力学范例分析，陕西科学技术出版社，1986年。

锘緒Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
涔﹀悕＝鍒嗘瀽瀹炴　鑼冧緥涓庝範棰
浣滆　　鍒樻　鏋楀富绋
椤电爜＝５１９
ＩＳＢＮ＝７－８１０１３－０６２－５
鍑虹増绀　鍖椾含鍏嗗伐澶ｙ　鍑虹増绀
鍑虹増鏃ユ湡＝１９８８
鍒嗙被鍙　１３０２０４０６
ＳＳ鍙　１００７０８１３
ｄｘＮｕｍｂｅｒ＝０００００１０９３５０８
ｄｖ＝Ｅ６０ＤＢ３３００７Ｆ５５ＦＤ０２１２８９８０Ｆ７０Ｆ９１Ａ７０
ＵＲＬ＝ｈｔｔｐ：／／ｂｏｏｋ１．ｄｕｘｉｕ．ｃｏｍ／ｂｏｏｋＤｅｔａｉｌ．ｊｓｐ？ｄｘＮｕｍｂｅｒ＝０００００１０９３５０８＆ｄ＝６６２３Ｃ３３１Ａ７４１４ＡＡ３５６２６ＥＢＢ６ＥＢＤ８Ｂ１７８＃ｃｔｏｐ

封面
前言
目录
目录